MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Adolph Mayer, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

65. Band.

Mit 22 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Inhalt des fünfundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einflusse einer stets gleich gerichteten Kraft.

Von

PAUL HERTZ in Hamburg.

Inhalt.

Einleitung.

Die Elektronentheorie verdankt unter vielem andern ihre Bedeutung dem Umstande, daß sie einen Weg zur rein elektromagnetischen Begründung der Mechanik eröffnet. Um zu dieser zu gelangen, hat sie zunächst die Frage zu beantworten:

Welche Kraft wird von einer gegebenen Bewegung erzeugt?

Auf dieser Stufe wird noch die Bewegung als das Gegebene, die Kraft als das daraus Erschlossene, jene gewissermaßen als die Ursache und diese als die Wirkung angesehen. Die Mechanik dagegen faßt das Ursachverhältnis lieber umgekehrt auf und verlangt dementsprechend die Lösung der Frage:

Welche Bewegung wird von einer gegebenen Kraft erzeugt?

Es ist bekannt, wie die Elektronentheorie diese Frage beantwortet. Von einer gegebenen äußeren Kraft, entscheidet sie, wird eine solche Bewegung hervorgerufen, die ihrerseits geeignet ist, eine jener äußeren Kraft entgegengesetzt gleiche innere zu erzeugen. Durch diesen Grundsatz wird die zweite Frage mathematisch zum Umkehrproblem der ersten gemacht und ein ähnliches Verhältnis zwischen beiden hergestellt, wie das zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung, zwischen elliptischen Integralen und elliptischen Funktionen.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die Frage, was *in Wirklichkeit* Ursache, was Wirkung ist, keine allgemeine Antwort gestattet, sondern eine Entscheidung hierüber nur im einzelnen Falle nach Gründen der Zweckmäßigkeit zu treffen ist. Solchen Verhältnissen begegnen wir auch in anderen Gebieten der Physik.*)

Die *erste* der beiden eben erwähnten Fragestellungen wurde für den Fall in gewisser Weise unendlich kleiner Beschleunigungen — der sogenannten quasistationären Bewegung — von M. Abraham erschöpfend behandelt.**) Über den Fall der Quasistationarität hinaus führen die Untersuchungen von G. Herglotz***), in denen die Rotationsgeschwindigkeiten rücksichtlich ihrer Größe keinen Einschränkungen unterworfen werden, wohl aber, wenn man brauchbare Formeln erhalten will, die Translationsbewegung unendlich langsam, wenn auch nicht quasistationär angenommen werden muß.

Ein anderer Fall nichtquasistationärer Bewegung wurde vom Verfasser

---

*) Siehe vor allem: H. Hertz, Band II, S. 263. Außerdem kann man vergleichen: H. Poincaré: La valeur de la science, p. 51ff.

**) Göttinger Nachrichten 1902, Heft 1. Phys. Zeitschrift 4, 1903, S. 57. Ann. d. Phys. 10, 1903, S. 153ff. Theorie der Elektrizität III, Leipzig 1905, I. Abschnitt, drittes Kapitel.

***) Göttinger Nachrichten 1903, Heft 6.

der gegenwärtigen Mitteilung gegeben*); die allgemeine Lösung indes der ersten Frage brachte erst A. Sommerfeld, dessen einfache Formeln ohne jede Vernachlässigung gewonnen sind.**)

Durch diese Untersuchungen erst wird eine erfolgreiche Behandlung jener *zweiten* Frage möglich, wie sie hierdurch auch dringlich wird. A. Sommerfeld selbst wendet seine Methode in diesem Sinne an***) und erhält so neben neuen auch schon früher von G. Herglotz†) gewonnene Resultate. Das Ergebnis jener Untersuchungen von G. Herglotz und A. Sommerfeld besteht in der Auffindung einer Reihe von Bewegungen, sogenannter *Eigenschwingungen*, die kräftefrei möglich sind. Indem wir die hier zugrunde liegende Fragestellung verallgemeinern, können wir sie unter die umfassendere einbegreifen:

Die Bewegung zu bestimmen bei alleiniger Angabe der Kraft als Funktion der Zeit.

Eine befriedigende Behandlung dieses Problems fehlt zur Zeit; nicht einmal liegen Untersuchungen darüber vor, in welchem Grade durch Angabe der inneren Kraft die Bewegung festgelegt wird.

Demgegenüber ist die vorliegende Arbeit besonders einer andern Fassung des Umkehrproblemes gewidmet. Wir fragen, ob man

die Bewegung bestimmen kann aus der Angabe der Bewegung vor einem gewissen Zeitpunkte und der Kraft nach diesem Zeitpunkte.

Dabei erwarten wir natürlich nicht, eine neue Tatsache über das Verhalten der Elektronen zu erfahren. Daß ein Elektron auf eine bestimmte äußere es antreibende Kraft durch irgend eine Bewegung antworten muß, ist ein fast selbstverständliches physikalisches Axiom. Doch nicht hierüber wünschen wir Aufklärung, sondern wir wollen nur untersuchen, ob auch unsere mathematische Nachkonstruktion dieser Forderung genügt und daher geeignet ist, die Naturvorgänge zu beschreiben. Soweit unendlich kleine Geschwindigkeiten und Kräftefreiheit in Betracht kommen, wäre unsere Frage schon durch die Herglotzschen Untersuchungen beantwortet, wenn gezeigt wäre, daß sich jede Bewegungsvorgeschichte aus einer Reihe von kräftefreien Eigenschwingungen zusammensetzen läßt. Da ein solcher *Entwicklungssatz* zwar vermutet aber nie bewiesen worden ist, da wir außerdem auch nicht

*) Phys. Zeitschrift 5. 1904, S. 109 ff. Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons, Diss. Göttingen 1904.

**) Göttinger Nachrichten 1904, S. 99; S. 363; 1905, S. 201. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam Dec. 21, 1904, S. 366. Vgl. auch: G. Herglotz: Göttinger Nachrichten 1903, Heft 6.

***) Göttinger Nachrichten 1904, S. 431. Verhandlungen des dritten Mathematikerkongresses 1905.

†) Göttinger Nachrichten 1903, Heft 6, Abschnitt IV.

kräftefreie Bewegungen und endliche Geschwindigkeiten in Betracht ziehen wollen, haben wir nach anderem Hilfsmittel auszublicken. Als solches bieten sich die Arbeiten A. Sommerfelds dar. Ihre Kenntnis ist unbedingte, aber auch alleinige Voraussetzung für das Verständnis der vorliegenden Überlegungen; doch sind diejenigen Ergebnisse A. Sommerfelds, die wir benutzen, im ersten Paragraphen ohne Beweis zusammengestellt.

Unsere Betrachtung hat es allein mit der *geradlinigen Translationsbewegung* zu tun und bevorzugt den Fall der *Volumenladung*. Ehe die allgemeine Zuordnung von Kraft*verlauf* und Bewegung behandelt wird, scheint es zweckmäßig, die zulässigen Grenzen für die Kraft*werte* festzustellen. Die Untersuchung wird besonders einfach, wenn man sich auf dauernde Überlichtgeschwindigkeitsbewegungen beschränkt. Es zeigt sich dann, daß die äußere Kraft niemals verschwinden, andererseits auch nicht eine gewisse obere Grenze überschreiten kann, beides Tatsachen, die bereits A. Sommerfeld*) auf Grund einer hinreichend großen Anzahl von Beispielen gefunden hat. Läßt man die Beschränkung auf *dauernde* Überlichtgeschwindigkeit fallen, so werden kräftefreie Bewegungen möglich, sollte auch in der Gegenwart und allernächsten Vergangenheit Überlichtgeschwindigkeit herrschen; und wieder ist eine obere Grenze vorhanden, die jedoch über der im vorigen Falle geltenden liegt.

Abgesehen von den Forderungen, die sich hiermit sofort für die äußere Kraft ergeben, zeigt sich, daß im allgemeinen durch eine Kraft eine Bewegung eindeutig bestimmt wird. *Wir beweisen, daß sich die Bewegung eines Elektrons bei vorgeschriebener Anfangsvorgeschichte der Bewegung**) auf eine und nur eine Weise fortsetzen läßt, wofern nur nicht ein gewisses aus der Anfangsvorgeschichte gebildetes Integral verschwindet.* Das Vorhandensein einer solchen Singularität war zu erwarten; anders wäre es nicht verständlich, daß die äußere Kraft eine obere Grenze niemals übersteigt. Es wird nun aber auch im einzelnen klar gemacht werden, weshalb diese Singularitätsbedingung, die sich formal auf die Bewegung und nicht auf die Kraft bezieht, stets bei Annäherung der Kraft an ihre Grenze erfüllt ist. Gewissermaßen singuläre Verhältnisse liegen auch vor, wenn man die äußere Kraft unstetig annimmt; es zeigt sich, daß das Elektron dieser Unstetigkeit nur durch sprungweise Änderung seiner Lage zu begegnen vermag.

Teilweise andere Verhältnisse findet man, wenn man den Elektronen eine gleichförmige Oberflächenladung zuerteilt. Auch unter dieser An-

*) Göttinger Nachrichten 1905, S. 201. Phys. Zeitschrift 7, 1906, S. 23. Jahresb. d. D. Math.-Vereinigung XV, S. 51.

**) Wir setzen voraus, daß das Elektron früher einmal geruht hat. Eine weitere Einschränkung wird später eingeführt werden.

nahme gibt es zwar eine obere Grenze für die Kraft. Die Gültigkeit des Existenzsatzes und Eindeutigkeitssatzes ist aber im wesentlichen nur an das Vorhandensein von Unterlichtgeschwindigkeit geknüpft. Es gibt dementsprechend Kraftverläufe, deren zugehörige Bewegungen plötzlich aufhören, sobald die Geschwindigkeit auf die des Lichtes angewachsen ist. In Stetigkeitsfragen tritt gleichfalls eine Reihe von Unterschieden auf. Endlich dürften die geradlinigen Translationsschwingungen Interesse verdienen, die unter der Annahme von Flächenladung möglich sind: Jede periodische Bewegung mit der Schwingungszeit Elektronendurchmesser dividiert durch Lichtgeschwindigkeit ist kräftefrei.

Sowohl im Falle der Volumenladung als der Flächenladung könnte das Vorhandensein der Singularitäten, bei denen der Existenzsatz versagt, überraschen und als ein Widerspruch gegen jenes physikalische Axiom angesehen werden, daß zu *jeder* Kraft eine Bewegung gehört. Diesen Widerspruch werden wir lösen, wenn wir annehmen, daß jene Kräfteverläufe, zu denen keine Bewegung gehört, in der Natur nicht vorkommen. Wahrscheinlich verdanken nämlich diese Absonderlichkeiten ihr Auftreten nur dem Umstande, daß wir mit der äußern Kraft ein der strengen elektromagnetischen Auffassung fremdes Element eingeführt haben. Eine vollkommenere Behandlung würde statt *eines* von einer *äußern* Kraft getriebenen Elektrons die *kräftefreie* Bewegung eines *Systemes* von beliebig vielen Elektronen untersuchen und die „äußere" Kraft nur als mathematische Rechnungsgröße anerkennen — als Wirkung von $n-1$ Elektronen auf das n^{te}. Bei einer solchen Betrachtung würden wohl alle scheinbaren Paradoxa verschwinden, und es würde von selbst dafür gesorgt sein, daß die sogenannte äußere Kraft jene Bedingungen nicht verletzt, die unsere unvollkommenere Behandlung ihr hat künstlich auferlegen müssen. Aber auch von diesem Standpunkte aus werden nur solche elektrodynamischen Grundgleichungen und solche Grundannahmen der Elektronentheorie als physikalisch brauchbar zu gelten haben, die wenigstens in gewissen Grenzen und wenigstens im großen ganzen zu einem eineindeutigen Entsprechen von Kraft und Bewegung führen, wobei *einzelne* Singularitäten hier ebensowenig wie in der klassischen Mechanik stören können. Das Ergebnis unserer Untersuchung ist der Nachweis, daß, soweit geradlinige Translationsbewegung in Betracht kommt, die Annahme der starren, kugelförmigen Elektronen mit gleichmäßiger räumlicher oder oberflächlicher Ladungsdichte dieser Forderung gerecht wird.*)

*) Die Untersuchungen von E. Wiechert (Gött. Nachr. 1905) behandeln davon ganz verschiedene Grundannahmen. Ein Versagen des Existenzsatzes unter diesen Voraussetzungen würde also keine Schwierigkeit für die gesamte Elektronentheorie bedeuten. Im übrigen ist auch durchaus noch nicht nachgewiesen, wie es wohl auf

Es wurde bereits eine andere Form des Umkehrproblemes erwähnt, bei der die Vorgeschichte der Bewegung durch die Vorgeschichte der Kraft ersetzt wird. Es ist — bei Annahme von Volumenladung — nicht bekannt, wie weit diese Angaben die Bewegung festlegen, insbesondere, ob es außer den Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit und den von G. Herglotz entdeckten Eigenschwingungen noch andere kräftefreie geradlinige Bewegungen gibt; es ist nicht bekannt, ob die gleichförmigen Bewegungen die einzigen kräftefreien werden, wenn man für negativ unendliche Zeiten endliche Geschwindigkeiten verlangt, und, was wohl eng damit zusammenhängt, ob sich jede kräftefreie Bewegung eines Elektrons mit unendlich wachsender Zeit dem Zustande eines gleichförmig bewegten immer mehr annähert.

Über alle diese Fragen kann man am ehesten in einem besondern Falle Aufschluß erhoffen. *Demgemäß machen wir im zweiten Teile die vereinfachende Annahme unendlich kleiner Geschwindigkeiten.* Eine Lösung der angedeuteten Fragen gelingt nun leider auch unter dieser Vereinfachung nicht; immerhin scheint es nicht ausgeschlossen, daß das durch sie gewonnene Ergebnis einmal dazu führen kann.*) *Wir stellen nämlich eine Fundamentallösung auf und zeigen, daß alle andern kräftefreien Lösungen aus ihr, die als Kurve dargestellt werden mag, durch Translation und Superposition hervorgehen,* so daß alles Weitere nur auf die Untersuchung dieser einen Funktion zurückgeführt ist. Das Hilfsmittel, durch das wir zu diesem Ergebnis gelangen, ist die *Theorie einer von Vito Volterra untersuchten Integralgleichung,* von der wir zu einer sehr ähnlichen auf jene reduzierbare Form von Integralgleichungen übergehen. Um den mathematischen Inhalt hervortreten zu lassen, werden wir im zweiten Teile, nachdem die Integralgleichungen für unser Problem aufgestellt sind, diese in ganz allgemeiner Form behandeln und die Beziehungen zur Elektronentheorie immer nur am Schluß der Paragraphen besprechen, so daß der zweite Teil im wesentlichen unabhängig vom ersten ist.

Die Untersuchungen des ersten Teiles sind zum größten Teil bereits in den Göttinger Nachrichten erschienen.**)

---

den ersten Blick scheinen möchte, daß unter den Wiechertschen Annahmen kein Existenzsatz Geltung hat. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

*) Zusatz bei der Korrektur: Es soll in einem Zusatz gezeigt werden, wie man, die eindeutige Entwickelbarkeit einmal *vorausgesetzt*, in einfacher Weise zur Entwicklung der Fundamentalfunktion nach Eigenschwingungen gelangt und damit unter diesem Vorbehalt die allgemeinste Lösung als Superposition der Herglotzschen Eigenschwingungen gewinnt.

**) Drittes Heft 1906.

I. Teil.

Endliche Geschwindigkeiten.

§ 1.

Berechnung der von einer gegebenen Bewegung erzeugten „inneren“ Kraft und der zu ihrer Unterhaltung erforderlichen „äußeren“ Kraft.

Dieser Paragraph stellt sich auf den Boden der ersten in der Einleitung erwähnten Fragestellung: Wir nehmen die Bewegung des Elektrons als gegeben an. Dann gestatten die Untersuchungen Sommerfelds die sogenannte innere Kraft K_i zu berechnen, d. h. diejenige Kraft, die infolge der Bewegung des Elektrons auf dieses selbst ausgeübt wird. Dabei ist es für die Bestimmung der innern Kraft gleichgültig, ob das Elektron mit „materieller“ Masse begabt ist oder nicht, und gleichgültig, wie seine Bewegung zustande kommt.

Es wurde schon die Annahme erwähnt, die der Elektronentheorie in ihrer rein elektromagnetischen Gestalt zugrunde liegt und der wir uns hier anschließen wollen. Ihr zufolge führt das Elektron unter dem Einflusse einer äußern Kraft K eine solche Bewegung aus, daß die aus dieser Bewegung folgende innere Kraft

$$K_i = -K \tag{1}$$

wird.

Indem wir also hier die Formeln für das einer jeden gegebenen Bewegung zugehörige K_i aufstellen, haben wir zwar noch nicht unsere Hauptfrage beantwortet, welche Bewegung durch eine gegebene Kraft hervorgerufen wird, wohl aber jene vorbereitende, welcher äußeren Kraft man bedarf, um eine beabsichtigte Bewegung hervorzurufen. In den Formeln Sommerfelds werden wir K_i überall durch $-K$ ersetzen.

Außerdem nehmen wir bei der Darstellung der Sommerfeldschen Lösung diejenigen Spezialisierungen vor, die unseren Zwecken angemessen sind. *Wir nehmen das Elektron vorerst als gleichmäßig über sein Volumen geladen an und beschränken uns auf geradlinige rotationsfreie Bewegungen.* Ferner gestatten wir uns einige Abweichungen von der Sommerfeldschen Bezeichnungsweise.

Wir führen als Längeneinheit den Radius des Elektrons und als Zeiteinheit die Größe: Elektronenradius durch Lichtgeschwindigkeit ein. Da die Bewegung des Elektrons nach Voraussetzung geradlinig erfolgen soll, so wird auch die Kraft in die Richtung der Bahngeraden fallen. Wir wollen nun auf der Bahngeraden eine Richtung als Vorzugsrichtung auszeichnen und K

dem absoluten Werte nach dem Betrag der äußern Kraft gleich setzen, sein Vorzeichen aber positiv oder negativ annehmen, je nachdem die äußere Kraft mit der Vorzugsrichtung gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist. Es wird häufig bequem sein, als Vorzugsrichtung die Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit zu wählen.

Der Wert von K läßt sich nun in jedem Augenblicke aus der *„Vorgeschichte“* des Elektrons berechnen. Die zu einem bestimmten Augenblicke gehörige Vorgeschichte wollen wir uns durch eine in einer (XY)-Ebene verlaufende *Vorgeschichtskurve* versinnbildlichen.*) Es soll nämlich x eine Zeit bedeuten, und y die Entfernung, welche die Lage des Elektronenmittelpunktes vor x Zeiteinheiten von der jetzigen Lage besaß; dabei sei y positiv, wenn die jetzige Lage auf die frühere im Sinne der Vorzugsrichtung folgt, im andern Falle negativ. Falls wir also die augenblickliche Geschwindigkeitsrichtung zur Vorzugsrichtung machen, so wird die Kurve zunächst einmal in der Halbebene der positiven y verlaufen. Solche Vorgeschichtskurven können in den mannigfachsten Gestalten auftreten: immer werden sie doch der einen Bedingung unterworfen sein, daß jede Parallele zur Y-Achse sie nur einmal schneidet, oder daß ihre Abszissen stets wachsen, weil im andern Falle das Elektron sich gleichzeitig an verschiedenen Punkten befinden müßte. Insbesondere können die Kurven nie in die Halbebene der negativen x eindringen. Sehr wohl können sie dagegen in die Halbebene der negativen y gelangen; solchen Vorgeschichtskurven begegnen wir z. B. bei schwingenden Elektronen.

Von Wichtigkeit ist die Tangente der Kurve. Eine horizontale Tangente — wir denken uns die X-Achse horizontal, die Y-Achse vertikal orientiert — bedeutet Ruhe des Elektrons, eine im Winkel von 45^0 geneigte die Lichtgeschwindigkeit, und eine vertikale würde unendlich große Geschwindigkeit bedeuten. Letztere ist aber auszuschließen und nur gelegentlich als Grenzfall zuzulassen. Allgemein gibt die Neigung der Tangente durch ihren Tangens die Geschwindigkeit des Elektrons in der Vorzugsrichtung.

Indem wir also die früher vorhandenen Geschwindigkeiten des Elektrons, die Herr Sommerfeld $v_{t-\tau}$ schreibt, gleich dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ oder y' setzen, können wir die Sommerfeldsche Formel**) auf die Form bringen:

$$K = m\int \{A(x,y) + B(x,y)y'\}\,dx$$

oder

$$K = m\int A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy. \tag{2}$$

*) Vgl. A. Sommerfeld, III. Note, Figur 11 und 12.

**) Göttinger Nachrichten 1904, Heft 5, S. 398, Gl. 64'.

Hier bezeichne m eine von der Ladung des Elektrons abhängige Zahl, es sei nämlich

$$m = \frac{3\varepsilon^2}{32\pi}, \tag{3}$$

unter ε die Ladung in rationellen Einheiten verstanden. Ferner werde die Integration über die ganze unendliche Vorgeschichtskurve erstreckt, und $A(x, y)$ und $B(x, y)$ seien bekannte Ortsfunktionen in der (XY)-Ebene.

A und B sind aber nicht durch einheitliche analytische Ausdrücke gegeben, vielmehr ergeben sich für sie verschiedene in den verschiedenen Teilen der Ebene:

Man denke sich (Figur 1) eine im Winkel von 45^0 gegen OX geneigte Gerade OA gezogen. Die Linie OA als Vorgeschichtskurve würde der stationären Lichtgeschwindigkeitsbewegung entsprechen. Eine Bewegung, die *stets* mit Unterlichtgeschwindigkeit verlaufen ist, wird durch eine ganz in AOX liegende Kurve dargestellt, eine *stets* mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgte Bewegung durch eine Kurve in YOA. Sei ferner $OB = OC = 2$, D der Schnittpunkt von BC und OA, und seien BE und CF parallel OA. Endlich bezeichnen wir

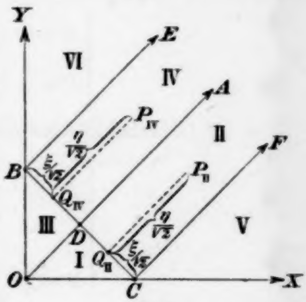


Fig. 1.

das Gebiet ODC mit I
das Gebiet $ADCF$ mit II
das Gebiet BOD mit III
das Gebiet $EBDA$ mit IV
das Gebiet XCF mit V
das Gebiet YBE mit VI.

Dann ist nach der eben erwähnten Formel Sommerfelds
in V und VI

$$A = B = 0.$$

Dagegen ist, wenn

$$f(u) = -\frac{8}{5} + 2u^2 - u^3 + \frac{1}{20}u^5 \text{*)} \tag{4}$$

---

*) l. c. S. 377, Gl. 51'.

gesetzt wird, und $f(u)$ die Ableitung dieser Funktion bezeichnet:

in I (Unterlichtgeschwindigkeitsgebiet, erstes Intervall)*)

$$(5)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{y} f'(x+y) - \frac{1}{y^2} f(x+y) \\ \qquad + \frac{1}{y} f'(x-y) + \frac{1}{y^2} f(x-y), \\ B = \frac{1}{y} f'(x+y) \\ \qquad - \frac{1}{y} f'(x-y); \end{cases}$$

in II (Unterlichtgeschwindigkeitsgebiet, zweites Intervall)

$$(6)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{y} f'(x-y) + \frac{1}{y^2} f(x-y), \\ B = -\frac{1}{y} f'(x-y); \end{cases}$$

in III (Überlichtgeschwindigkeitsgebiet, erstes Intervall)

$$(7)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{y} f'(y+x) - \frac{1}{y^2} f(y+x) \\ \qquad - \frac{1}{y} f'(y-x) + \frac{1}{y^2} f(y-x), \\ B = \frac{1}{y} f'(y+x) \\ \qquad + \frac{1}{y} f'(y-x) \end{cases}$$

und in IV (Überlichtgeschwindigkeitsgebiet, zweites Intervall)

$$(8)\quad \begin{cases} A = -\frac{1}{y} f'(y-x) + \frac{1}{y^2} f(y-x), \\ B = \frac{1}{y} f'(y-x). \end{cases}$$

Endlich bestimmen wir A und B auch für negative y durch die Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} A(x, -y) = -A(x, y), \\ B(x, -y) = B(x, y), \end{cases}$$

die aus Symmetriebetrachtungen leicht zu erhalten sind.

Hiermit ist unsere erste Frage allgemein gelöst. Die Kurve mag ganz beliebig verlaufen, immer wird K durch das über die unendliche Kurve erstreckte Integral $m\int A dx + B dy$ gegeben. In vielen Fällen, aber nicht immer, wird sich die Integration nur über ein endliches Kurvenstück erstrecken, nämlich dann, wenn die Vorgeschichtskurve in V oder VI

*) l. c. S. 398, Gl. 64'.

eindringt und dort dauernd verbleibt. In diesem Falle können wir sie uns auch als auf BE oder CF endigend vorstellen.*)

Es ist jetzt eine genauere Diskussion der Funktionen A und B erforderlich. Zunächst bemerken wir, daß die durch (4) eingeführte Funktion f samt ihren ersten beiden Ableitungen an der Stelle $u = 2$ verschwindet, daß auf BC der Ausdruck $y + x = 2$ ist, und daß $f'(0) = 0$ ist. Hierauf lehrt eine aufmerksame Betrachtung der Gleichungen (6)–(8): *Die Funktionen A und B samt ihren ersten Ableitungen nach x und y sind in der ganzen Viertelebene der positiven x und y dort, wo sie endlich sind, auch stetig. Auf BE und CF verschwinden sie.*

Wir wollen jetzt A und B in I und III berechnen. Wir erhalten aus (5), (4), (7)
für I:

$$\left\{\begin{aligned} A &= (-4 + 2x^2)y + \frac{2}{5}y^3, \\ B &= (8 - 12x + 2x^3) + 2xy^2 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

und für III:

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{x}{10y^3}\{(20x^2 - x^4) + (-60 + 10x^2)y^2 + 15y^4\}, \\ B &= \frac{1}{2y}\{(-12x^2 + x^4) + 16y + (-12 + 6x^2)y^2 + y^4\}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Bei Annäherung an den Punkt O bleiben nach diesen Formeln A und B endlich und stetig. Dasselbe läßt sich von diesen Funktionen bei Annäherung an C zeigen, wie später noch nachgewiesen werden mag. Ferner verhalten sich wegen (9) B, $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$ an OX stetig, während sich A, $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial y}$ beim Überschreiten dieser Linie mit -1 multiplizieren. Nun verschwinden aber nach (10) die letzten drei Größen für $y = 0$, so daß wir den eben ausgesprochenen Stetigkeitssatz so erweitern können: *Die Funktionen A und B sind in der ganzen Halbebene der positiven x samt ihren ersten Ableitungen überall dort, wo sie endlich bleiben, stetig; A und B selbst sind in der ganzen Halbebene endlich und stetig.*

Schließlich bemerken wir noch, daß im Unendlichen A und B unendlich klein werden.

Wir schließen diesen Paragraphen, indem wir drei später wichtig werdende Integrale auswerten, die der Ruhe, der stationären Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit und der Bewegung mit unendlich großer Geschwindigkeit entsprechen.

---

*) Ihrer Schreibweise nach beziehen sich die Sommerfeldschen Formeln nur auf diesen Fall.

Das längs OX genommene Integral $\int A dx + B dy$ liefert, da hier $dx = 0$ zu setzen ist und A nach (10) $= 0$ ist, den Wert Null:

(12) $$\underset{OX}{K} = m \cdot \int_{OX} A dx + B dy = 0.$$

Das Integral, längs OA genommen, läßt sich schreiben:

$$\int_{OD} (A+B)\, dx + \int_{DA} (A+B)\, dx.$$

Im ersten Integrale erhalten wir übereinstimmend aus (10) und (11), indem wir $x = y$ setzen:

$$A + B = 8 - 16x + \frac{32}{5} x^3.$$

Im zweiten Integrale dagegen ist nach (6) oder (8)

$$A + B = \frac{1}{x^2} f(0) = - \frac{8}{5x^2}.$$

Hieraus erhält man

(13) $$\underset{OA}{K} = m \int_{OA} A dx + B dy = 0.$$

Endlich ist nach (11)

$$\int_{OY} A dx + B dy = \int_0^2 \left(8 - 6y + \frac{1}{2} y^3\right) dy = 6,$$

also

(14) $$\underset{OY}{K} = m \int_{OY} A dx + B dy = 6m.$$

§ 2.

Die Funktion E.

Nachdem eben die zu einer gegebenen Bewegung gehörige Kraft berechnet wurde, gilt es jetzt umgekehrt, die einer gegebenen Kraft zugehörige Bewegung zu finden. Als vorbereitende Frage wird man begreiflicherweise untersuchen wollen, in welchen Grenzen überhaupt die vorzuschreibende Kraft zugelassen werden darf, und ob nicht gewisse Kraftverläufe schon wegen der Größe der Kraft von vornherein zu verwerfen sind. Um hierüber Aufschluß zu erhalten, wollen wir nach der größten möglichen Kraft fragen, müssen uns also der Variationsrechnung bedienen.

Will man das Integral $\int (A + By')dx$ untersuchen, so ist nach Lagrange die Gleichung zu bilden:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(A+By') - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}(A+By')\right]$$
$$= \frac{\partial A}{\partial y} + y'\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{d}{dx}(B)$$
$$= \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung setzen wir $= E$:

$$E = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}, \tag{15}$$

und sind damit zu einer Funktion gelangt, die für alle folgenden Untersuchungen von der größten Wichtigkeit werden wird.*) Unsere nächste Aufgabe muß daher sein, sie für die ganze Ebene zu berechnen und zu diskutieren.

Natürlich erhalten wir wieder für die verschiedenen Teile der Ebene verschiedene analytische Ausdrücke. Nach (5), (7), (15) ist in I

$$E = \frac{4}{5}(10 - 5x^2 - y^2), \tag{16}$$

und in III

$$E = \frac{x}{5y^3}\{(-20x^2 + x^4) + (60 - 10x^2)y^2 - 15y^4\}. \tag{17}$$

Zur Berechnung der Funktion E in II empfiehlt sich eine Variabelntransformation. Sei (Fig. 1) P_{II} ein Punkt in II, Q_{II} der Fußpunkt des von P_{II} auf CD gefällten Lotes. Wir wollen CQ_{II} mit $\frac{\xi}{\sqrt{2}}$ und $P_{II}Q_{II}$ mit $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ bezeichnen, so daß wir haben:

---

*) Ihre Dienste sind der von der bekannten Weierstraßschen E-Funktion geleisteten so ähnlich, daß ich sie in den Göttinger Nachrichten unbedenklich als E-Funktion bezeichnet habe, wozu ich mich um so eher berechtigt glaubte, als in unserm Falle die Weierstraßsche Funktion identisch verschwindet, also unbrauchbar wird. Dennoch ist diese Übertragung, einer freundlichen Mitteilung des Herrn C. Carathéodory zufolge, nicht gerechtfertigt. Die Weierstraßsche Theorie benutzt nämlich die Kurvenintegration, unsere Methode die Flächenintegration; und aus dieser Verschiedenheit entspringen auch Unterschiede in der Tragweite der beiden entsprechenden Kriterien, was ihre Notwendigkeit und ihr Hinreichendsein anbetrifft. Da es nun in unserm Falle eine Funktion gibt, die sich in dieser Beziehung genau wie die Weierstraßsche verhält, so ist es nur angemessen, ihr die Bezeichnung E-Funktion vorzubehalten. Dagegen wird es gestattet sein, auch für unsere Funktion den Buchstaben E zu gebrauchen und gelegentlich von ihr als der Funktion E zu reden.

$$(18)\quad \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta, \\ y = \quad\;\; \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta, \\ x - y = 2 - \xi, \\ d\xi = dy - dx, \\ d\eta = dy + dx; \end{cases}$$

ξ kann hier von 0 bis 2, η von 0 bis ∞ variieren.

Setzen wir dann noch

$$(19)\quad \begin{cases} f(2+h) = \psi(h), \\ f'(2+h) = \psi'(h), \end{cases}$$

wo

$$(20)\quad \psi(h) = h^3 + \frac{1}{2}h^4 + \frac{1}{20}h^5$$

für $h = 0$ dreifach verschwindet, so schreiben sich die Gleichungen (6):

$$(21)\quad \begin{cases} A = \quad \frac{2\psi'(-\xi)}{(\xi+\eta)} + \frac{4\psi(-\xi)}{(\xi+\eta)^2}, \\ B = -\frac{2\psi'(-\xi)}{(\xi+\eta)}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und von (20) holt man sehr leicht den auf Seite 11 versprochenen Nachweis nach, daß A und B bei Annäherung an den Punkt C endlich bleiben. Ferner ist nach (15) und (18)

$$E = \frac{\partial(A+B)}{\partial\xi} + \frac{\partial(A-B)}{\partial\eta},$$

also nach (21)

$$(22)\quad = -\frac{8}{(\xi+\eta)^3}\{(\xi+\eta)\psi'(-\xi) + 2\psi(-\xi)\},$$

oder nach (20)

$$(23)\quad E = -\frac{2\xi^2}{5(\xi+\eta)^3}\{(60-40\xi+5\xi^2)\eta + (20\xi-20\xi^2+3\xi^3)\}.$$

In entsprechender Weise berechnen wir E für das Gebiet IV. Hier bedienen wir uns eines ganz ähnlichen Koordinatensystemes. Es sei gestattet, auch diese neuen Koordinaten ξ und η zu nennen, da eine Verwechselung nicht zu befürchten ist. Sei P_{IV} ein Punkt in IV und Q_{IV} der Fußpunkt des von ihm auf BD gefällten Lotes. Dann möge die Strecke $BQ_{IV} = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $P_{IV}Q_{IV} = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ gesetzt werden, oder analytisch:

$$(24)\qquad \left|\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{2}\xi, \\ y &= 2 + \tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{2}\xi, \\ y - x &= 2 - \xi, \\ d\xi &= dx - dy, \\ d\eta &= dx + dy. \end{aligned}\right.$$

Wieder kann ξ von 0 bis 2, η von 0 bis ∞ variieren.

Es ist nun nach (8) und (19)

$$(25)\qquad \begin{cases} A = -\dfrac{2\psi'(-\xi)}{(4+\eta-\xi)} + \dfrac{4\psi(-\xi)}{(4+\eta-\xi)^2}, \\ B = \dfrac{2\psi'(-\xi)}{(4+\eta-\xi)}. \end{cases}$$

Ferner ist nach (15) und (24)

$$E = \frac{\partial(A-B)}{\partial\eta} - \frac{\partial(A+B)}{\partial\xi},$$

also nach (25)

$$(26)\qquad E = \frac{8}{(4+\eta-\xi)^3}\{(4+\eta-\xi)\psi'(-\xi) - 2\psi(-\xi)\},$$

oder nach (20)

$$(27)\qquad E = \frac{2\xi^2}{5(4+\eta-\xi)^3}\{(60-40\xi+5\xi^2)\eta + (240-180\xi+40\xi^2-3\xi^3)\}.$$

Für die Halbebene der negativen y gilt schließlich nach (9)

$$(28)\qquad E(x, -y) = E(x, y),$$

d. h. E nimmt in der Halbebene der negativen y dieselben Werte an, wie an den zur X-Achse spiegelbildlich gelegenen Punkten.

Stellen wir noch einmal die Formeln für die Funktion E zusammen. Wir haben

in I

$$(16)\qquad E = \frac{4}{5}(10 - 5x^2 - y^2);$$

in II

$$(23)\qquad E = -\frac{2\xi^2}{5(\xi+\eta)^3}\{(60-40\xi+5\xi^2)\eta + (20\xi-20\xi^2+3\xi^3)\},$$

wo

$$(18)\qquad \begin{cases} \xi = 2 + y - x, \\ \eta = -2 + y + x \end{cases}$$

ist;

in III

$$(17)\qquad E = \frac{x}{5y^3}\{(-20x^2+x^4) + (60-10x^2)y^2 - 15y^4\};$$

in IV

$$(27)\quad E = \frac{2\xi^2}{5(4+\eta-\xi)^3}\{(60-40\xi+5\xi^2)\eta+(240-180\xi+40\xi^2-3\xi^3)\},$$

wo

$$(24)\quad \begin{cases} \xi = \ \ \ 2+x-y, \\ \eta = -2+x+y \end{cases}$$

ist;

in V und VI

$$E=0$$

und schließlich

$$(28)\quad E(x,-y)=E(x,y).$$

Die so definierte Funktion E ist in der ganzen Ebene endlich. Dagegen besitzt sie in den Punkten O und C Unbestimmtheitsstellen, bleibt jedoch bei Annäherung an diese Punkte unter einer obern Grenze. Dies folgt für III aus der Ungleichung $\frac{x}{y} \gtreqless 1$; was II betrifft, so beachten wir, daß hier die Funktionen $\frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3}$ und $\frac{\xi^3}{(\xi+\eta)^3}$ unter einer obern Grenze bleiben. Um das z. B. für $\frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3}$ zu zeigen, bilde man den reziproken Wert $\frac{1}{\xi^2\eta}(\xi+\eta)^3 = \frac{\xi}{\eta}+3+3\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-1}+\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-2}$, der für positive ξ und η stets >3 ist, woraus folgt, daß $\frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3}$ selbst $<\frac{1}{3}$ ist. Hiernach lehrt die Betrachtung von (17) und (23), daß E bei Annäherung an O und C unter einer obern Grenze bleibt.

Ziehen wir jetzt noch den auf Seite 11 ausgesprochenen Stetigkeitssatz über A, B und ihre ersten Ableitungen heran, und berücksichtigen wir die Definition von E durch (15), so können wir behaupten:

Die Funktion E ist eine in der ganzen Halbebene der positiven x definierte stetige Funktion der Variabeln x und y, die nur für die Punkte 0,0 *und* 2,0 *(O und C) unbestimmt wird, ohne jedoch dort unendlich zu werden. Auf den Geraden BE und CF verschwindet sie.*

Aus der ausnahmslosen Endlichkeit der Funktion E folgt, daß ihr Integral, über einen endlichen Flächenraum genommen, einen endlichen Wert liefert. Aber auch über die ganze (XY)-Ebene integriert, konvergiert sie absolut, d. h. ihr absoluter Betrag ergibt bei einer solchen Integration einen endlichen Wert. Um das zu zeigen, brauchen wir nach (23) und (27) nur die Integrale

$$\int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta\, \frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3}, \qquad \int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta\, \frac{\xi^3}{(\xi+\eta)^3},$$

$$\int\limits_0^2 d\xi \int\limits_0^\infty d\eta \frac{\xi^2}{(4+\eta-\xi)^3} \quad \text{und} \quad \int\limits_0^2 d\xi \int\limits_0^\infty d\eta \frac{\xi^2\eta}{(4+\eta-\xi)^3}$$

zu untersuchen. Es mag genügen das erste dieser Integrale auszuwerten. Das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\eta}{(\xi+\eta)^3} d\eta$ geht durch die Substitution $\xi+\eta=\alpha$ über in

$$\int\limits_\xi^\infty \frac{\alpha-\xi}{\alpha^3} d\alpha = \left[-\frac{1}{\alpha}+\frac{\xi}{2\alpha^2}\right]_\xi^\infty = \frac{1}{2\xi}.$$

Also ist

$$\int\limits_0^2 d\xi \int\limits_0^\infty d\eta \frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \xi d\xi = 1.$$

Ähnlich bestätigt man die Endlichkeit der drei andern Integrale, und hieraus folgt sofort, daß das Integral $\int |E|\, do$, über den ganzen Definitionsbereich erstreckt, einen endlichen Grenzwert besitzt.

Zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen nahmen wir die Lagrangesche Methode der Variationsrechnung. Indes wird es sich bald zeigen, daß eine weitere Verfolgung dieser Methode entbehrlich wird, weil die Funktion E alle uns wichtigen Fragen schon durch ihr Vorzeichen beantwortet.

Es ist also erforderlich, ihr Vorzeichen in den verschiedenen Teilen der (XY)-Ebene festzustellen. Beginnen wir mit dem Dreiecke III (Fig. 1). Der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (17) (S. 15) ist für endliche y und für kleine x sicher positiv. Können wir daher zeigen, daß die durch Nullsetzung dieser Klammer dargestellte Kurve außerhalb des Dreieckes III fällt, so ist damit gezeigt, daß die Funktion E in III durchweg positiv ist. Untersuchen wir also die Kurve

$$(-20x^2+x^4)+(60-10x^2)y^2-15y^4=0$$

oder

$$y=\sqrt{\frac{1}{15}}\cdot\sqrt{30-5x^2\pm\sqrt{900-600x^2+40x^4}}.$$

In der Nähe des Punktes $x=0$ erhalten wir die beiden Entwicklungen:

$$y=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)x+\cdots$$

und

$$y=2-\frac{1}{4}x^2+\cdots.$$

Der durch O gehende Ast dieser Kurve läuft demnach, weil in O der Tangens seiner Tangente $=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, zunächst in I, der durch B gehende

Ast wegen der dort bestehenden Horizontalität seiner Tangente zunächst in IV. Ferner überzeugt man sich leicht, daß beide Kurvenäste im Intervalle $x = 0$ bis $x = 1$ reell sind. In III könnte die Kurve daher nur eintreten, wenn sie einen Schnittpunkt außer O entweder mit OD oder BD gemeinsam hätte. Beides ist nicht der Fall. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $y = x$ bestimmt sich nämlich aus der Gleichung $40x^3 - 24x^4 = 0$, die offenbar keine positive Wurzel unter 1 besitzt, und setzen wir in die Gleichung unserer Kurve $y = 2 - x$, so erhalten wir:

$$240x - 360x^2 + 160x^3 - 24x^4 = 0,$$

oder

$$3x^3 - 20x^2 + 45x - 30 = 0.$$

Auch diese Gleichung besitzt, wie man sich mittels des Budan-Fourierschen Satzes*) leicht überzeugen kann, keine Wurzel zwischen 0 und 1. Somit verschwindet die Funktion E im ganzen Innern von III nicht, und muß, da wir sie für kleine x als positiv erkannt haben, in III durchweg positiv sein.

Wenden wir uns jetzt IV zu. Für kleine ξ ist nach (27) (S. 16) E sicher positiv. Untersuchen wir also noch die durch Nullsetzen der geschweiften Klammer von (27) bezeichnete Kurve:

$$(60 - 40\xi + 5\xi^2)\eta + (240 - 180\xi + 40\xi^2 - 3\xi^3) = 0.$$

Denken wir uns nach dieser Gleichung η als Funktion von ξ gegeben. Für $\xi = 0$ wird $\eta = -\frac{240}{60} = -4$, also negativ. Lassen wir ξ von 0 bis 2 wachsen, so kann η nur positiv werden, wenn vorher einer der beiden Ausdrücke:

$$60 - 40\xi + 5\xi^2,$$

$$240 - 180\xi + 40\xi^2 - 3\xi^3$$

verschwindet. Nun belehrt uns wieder der Budansche Satz darüber, daß der zweite dieser Ausdrücke im Intervalle $\xi = 0$ bis $\xi = 2$ nicht verschwindet. Der erste Ausdruck dagegen verschwindet für $\xi = 2$ und $\xi = 6$, also nicht vor $\xi = 2$. Mithin verläuft die Kurve, wenigstens für $\xi < 2$, außerhalb von IV, und da E jedenfalls für kleine positive ξ positiv ist, so muß es auch im ganzen Gebiete IV, solange $\xi < 2$ ist, positiv sein. Aber auch für $\xi = 2$ ist E in IV positiv, wie wir unmittelbar durch Einsetzen von $\xi = 2$ in (27) nachweisen. Fassen wir also zusammen, was wir über das Verhalten der Funktion E im Gebiete $EBOA$ wissen:

Die Funktion E ist im ganzen Überlichtgeschwindigkeitsgebiete $EBOA$ endlich und stetig, ausgenommen in O, wo sie unbestimmt wird, ohne jedoch

---

*) Vgl. z. B. H. Weber, Algebra I, S. 341.

unendlich zu werden. Am Rande EBO, mit Ausschluß des Punktes O, verschwindet sie. In allen andern Punkten des Gebietes ist sie positiv.

Im *Unterlichtgeschwindigkeitsgebiet* ist die Funktion E nicht mehr definit, wie schon (16) (S. 15) erkennen läßt. Natürlich ist die Kurve $E=0$, längs deren der Zeichenwechsel stattfindet, stetig, sie besitzt aber auch, wie etwas später (S. 20) bewiesen werden soll, nirgends einen Knick. In I zeigt sie nach (16) die Gestalt einer Ellipse mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, in II läßt sie sich am einfachsten übersehn, wenn man $\mathfrak{x} = 2 - \xi$ setzt, so daß $\mathfrak{x}$ die mit $\sqrt{2}$ multiplizierte Strecke DQ_{II} vorstellt (Fig. 1). Dann ergibt (23):

$$(20\mathfrak{x} + 5\mathfrak{x}^2)\eta = 16 - 24\mathfrak{x} + 2\mathfrak{x}^2 + 3\mathfrak{x}^3,$$

also die Gleichung einer unendlich ausgedehnten Kurve, die sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeitsgeraden $\mathfrak{x} = 0$ anschließt. Einen schematischen Überblick über diese Verhältnisse gibt die Figur 2, die auch die Viertelebene der negativen y umfaßt. Sie läßt die aus (28) folgende Symmetrie zur OX-Achse erkennen, und zeigt die Halbebene der positiven x in die vier Gebiete $E=0$, $E>0$, $E<0$, $E=0$ zerlegt, deren Grenzen stark ausgezeichnet sind. $GHKH'G'$ stellt die im Innern des Unterlichtgeschwindigkeitsgebietes verlaufende Kurve $E=0$ dar, die OA und OA' als Asymptoten besitzt.

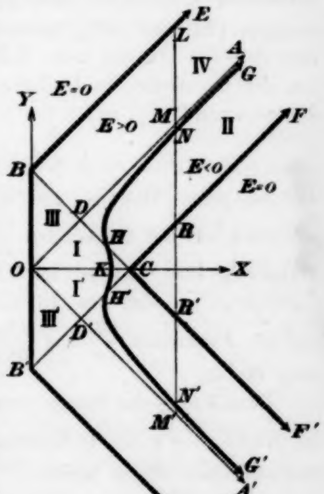


Fig. 2.

Eine hier nicht weiter mitgeteilte Rechnung zeigt, daß das in II liegende Stück unserer Kurve bei H etwa mit dem Werte $\mathfrak{x} = 0{,}775$ beginnt und daß sein η mit abnehmendem $\mathfrak{x}$ überall wächst. Außerdem ergibt sich, daß sich auch seine Tangente monoton, d. h. stets im gleichen Sinne dreht. Der Zug HK muß in der Richtung GG' durchlaufen werden, wenn er Stück einer möglichen Vorgeschichtskurve sein soll. Dasselbe gilt, weil GG' keinen Knick besitzt, auch noch von hinreichend nahe an H anliegenden Teilen der Kurve $E=0$; weiter ist klar, daß umgekehrt die sehr weit hinausliegenden Teile von HG in der Richtung $G'G$ durchlaufen werden müssen, wenn sie Stücke einer möglichen Vorgeschichtskurve werden sollen. Zwischen beiden Arten von Kurvenstücken

gibt es also nach dem eben über die Monotonität der Tangente Gesagten einen und nur einen Grenzpunkt, in dem die Tangente senkrecht gerichtet ist. Diesen Verhältnissen ist in der Figur Rechnung getragen worden.

Um später nicht unsern Gedankengang unterbrechen zu müssen, schließen wir hier die Diskussion der beiden Ableitungen $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ an. Wir beginnen damit, zu zeigen, daß diese Funktionen überall dort, wo sie endlich sind, auch stetig bleiben. Für die Grenzen zwischen II und V und zwischen IV und VI folgt das aus (22) und (26) (S. 14 u. 15), da nach (20) ψ an der Stelle 0 dreifach verschwindet. Um die Stetigkeit an der Grenze von II und IV zu erweisen, muß gezeigt werden, daß $\frac{\partial E}{\partial \eta}$ beim Überschreiten von DA stetig bleibt, $\frac{\partial E}{\partial \xi}$ aber auf beiden Seiten gleich, doch von entgegengesetzten Vorzeichen ist (weil ξ in II und IV nach verschiedenen Richtungen gerechnet wird). Auch das bestätigen die Gleichungen (22) und (26), wenn man noch bedenkt, daß $\psi'(-2)=0$ ist. Aus (5)—(8) erkennt man, daß beim Überschreiten von BC (wenn man von der Innenseite des Dreiecks OBC kommt) in dem Ausdrucke für E der Summand

$$-\frac{2}{y^2}f'(x+y)+\frac{2}{y^3}f(x+y)$$

verloren geht. Hieraus, und aus $f(2)=f'(2)=f''(2)=0$ erkennt man die Stetigkeit der Funktionen $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ an BC, und in ganz ähnlicher Weise folgt ihre Stetigkeit an OD. Endlich kann auch an OX kein Sprung stattfinden, wie sich aus (16) und (28) ergibt. Wir haben also gefunden, *daß die Funktionen* $\frac{\partial E}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial E}{\partial y}$ *überall dort, wo sie endlich sind, auch stetig bleiben.*

Daraus folgt das bereits vorweggenommene (S. 19) Ergebnis, daß längs der Kurve $E=0$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ stetig ist, diese Kurve also nirgends einen Knick besitzt.

Ein Unendlichwerden der Funktion $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ ist nur an den Punkten O und C möglich. Wir haben in III nach (17) (S. 15)

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{1}{5y^3}\{(-60x^2+5x^4)+(60-30x^2)y^2-15y^4\}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{x}{5y^4}\{(60x^2-3x^4)+(-60+10x^2)y^2-15y^4\}.$$

Es sind also $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ in O nicht endlich, dagegen bleiben wegen

$\frac{x}{y} \leqq 1$ die Funktionen $x \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$, $x \cdot \frac{\partial E}{\partial y}$, $y \frac{\partial E}{\partial x}$ und $y \frac{\partial E}{\partial y}$ um O herum unter einer obern Grenze.

Ähnliches gilt für die Umgebung von C. Bilden wir nach (23) (S. 15) $\frac{\partial E}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial E}{\partial \eta}$. Die hierbei auftretenden in C unendlich werdenden Summanden sind — abgesehen von stetigen Faktoren, mit denen sie multipliziert sind —:

$$\frac{\xi^3}{(\xi+\eta)^4},\quad \frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^4},\quad \frac{\xi^2}{(\xi+\eta)^3},\quad \frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^3}.$$

Setzen wir nun

$$\bar{x} = x - 2$$

und untersuchen die Funktionen

$$\bar{x}\frac{\partial E}{\partial \bar{x}},\quad y\frac{\partial E}{\partial \bar{x}},\quad \bar{x}\frac{\partial E}{\partial y},\quad y\frac{\partial E}{\partial y}.$$

Diese enthalten, wenn man die Umrechnung nach (18) (S. 14) vornimmt, die Summanden

$$\frac{\xi^4}{(\xi+\eta)^4},\quad \frac{\xi^3\eta}{(\xi+\eta)^4},\quad \frac{\xi^2\eta^2}{(\xi+\eta)^4},\quad \frac{\xi^3}{(\xi+\eta)^3},\quad \frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3},\quad \frac{\xi\eta^2}{(\xi+\eta)^3},$$

jeden noch mit einer stetig bleibenden Funktion multipliziert. Alle diese Funktionen bleiben für positive ξ, η durchaus endlich, wie wir das für $\frac{\xi^2\eta}{(\xi+\eta)^3}$ bereits auf Seite 16 gesehen haben, und wie wir das von den andern Funktionen in genau entsprechender Weise zeigen können. Somit besitzen auch die Funktionen

$$\bar{x}\frac{\partial E}{\partial \bar{x}},\quad y\frac{\partial E}{\partial \bar{x}},\quad \bar{x}\frac{\partial E}{\partial y},\quad y\frac{\partial E}{\partial y}$$

in der Nähe von C eine obere Grenze.

Aus dem eben Bewiesenen folgt, daß in der Nähe von O und C die Funktionen $r\frac{\partial E}{\partial x}$ und $r\frac{\partial E}{\partial y}$ endlich bleiben, unter r den Abstand von diesen Punkten verstanden.

§ 3.

Unmöglichkeit der dauernd kräftefreien Überlichtgeschwindigkeitsbewegung; obere Grenze der Kraft.

Die soeben durchgeführte Vorzeichenbestimmung verschafft uns einen Überblick über die größten und kleinsten möglichen Werte der Kraft. Allerdings läßt sich diese Untersuchung nur dann einfach durchführen, wenn man die Kurven auf gewisse Gebiete beschränkt. Eine der einfachsten Annahmen

besteht in der Beschränkung auf das Gebiet $EBOA$ (Fig. 1; Fig. 3). Betrachten wir zunächst zwei ganz in $EBOA$ verlaufende von O ausgehende Kurvenstücke $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, die im selben Punkt S endigen, und sei $\mathfrak{c}_2$ ganz rechts von $\mathfrak{c}_1$ gelegen. Untersuchen wir die Differenz der Integrale längs $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$:

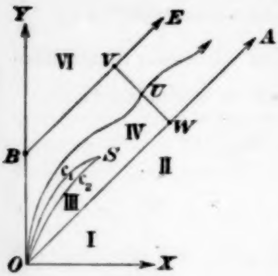


Fig. 3.

$$\int\limits_{O\mathfrak{c}_2 S} A dx + B dy - \int\limits_{O\mathfrak{c}_1 S} A dx + B dy.$$

Wir können sie offenbar durch ein längs der geschlossenen Kurve $O\mathfrak{c}_2 S\mathfrak{c}_1 O$ genommenes Integral ersetzen, und dieses läßt sich nach dem Stokesschen Satze in das Flächenintegral

$$-\int\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) do$$

umformen, wo do das Flächendifferential bedeutet, und die Integration über den von den Kurven umschlossenen Flächenraum zu erstrecken ist. Da nun dieses Integral, das wir auch

$$-\int E do$$

schreiben können, nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen negativ ist, so folgt der allgemeine Satz: Von zwei in $EBOA$ verlaufenden Kurven, die, ohne sich sonst zu schneiden, O mit einem und demselben Punkte dieses Gebietes verbinden, liefert die rechts liegende ein kleineres Integral

$$\int A dx + B dy.$$

Sei jetzt eine ganz in YOA verlaufende Vorgeschichtskurve gegeben. Wir ersetzen sie zunächst durch eine ganz in $EBOA$ verlaufende unendliche Kurve, indem wir sie, sollte sie in VI eindringen, durch ein geradliniges längs BE laufendes Stück ersetzen, das sich entweder unendlich weit erstreckt, wenn nämlich die gegebene Kurve in VI verbleibt, oder nur bis zum nächsten Schnittpunkt läuft, wenn die gegebene Kurve wieder in IV eintritt. Entsprechend ist zu verfahren, wenn die Kurve die Grenze BE noch öfter schneidet. Durch diesen Ersatz kann jedenfalls nach dem, was wir über die Funktionen A und B wissen, der Wert des Integrales $\int A dx + B dy$ nicht geändert werden. Betrachten wir also jetzt eine unendliche in $EBOA$ verlaufende Kurve, von der wir noch voraussetzen wollen, daß sie nicht ganz mit einem der Ränder OBE und OA zusammenfällt. Sei U ein variabler Punkt auf der Kurve, UV das Lot

von U auf BE und UW das Lot von U auf OA. Die Strecken UV und UW können auch Null werden. Wir wenden dann auf die zwei durch U gehenden Kurven $OBVU$, OU und auf die zwei durch W gehenden Kurven OUW, OW den eben bewiesenen Satz an, und haben

$$\int_{OU} Adx + Bdy < \int_{OBV} Adx + Bdy + \int_{VU} Adx + Bdy$$

$$\int_{OW} Adx + Bdy < \int_{OU} Adx + Bdy + \int_{UW} Adx + Bdy$$

oder

$$\int_{OW} Adx + Bdy - \int_{UW} Adx + Bdy < \int_{OU} Adx + Bdy$$
$$< \int_{OBV} Adx + Bdy + \int_{VU} Adx + Bdy.$$

Diese Ungleichungen schließen das Gleichheitszeichen aus, selbst dann, wenn U mit W oder U mit V zusammenfällt. Rücken wir mit U immer weiter hinaus, so rücken auch V und W ins Unendliche. Dabei nähern sich $\int_{OW} Adx + Bdy$ und $\int_{OBV} Adx + Bdy$ den endlichen Grenzwerten $\int_{OA} Adx + Bdy$ und $\int_{OBE} Adx + Bdy$, d. i. nach (13) und (14) den Werten 0 und 6, ferner streben $\int_{UW} Adx + Bdy$ und $\int_{VU} Adx + Bdy$ gegen Null, da A und B im Unendlichen unendlich klein werden. Hieraus folgt aber, daß $\int_{OU} Adx + Bdy$ nicht über alle Grenzen wachsen kann, vielmehr muß

$$0 < \operatorname{Lim} \int_{OU} Adx + Bdy < 6$$

sein*), unter Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Was hierdurch von allen Kurven in YOA bewiesen ist, gilt im besondern auch von den Überlichtgeschwindigkeitsvorgeschichten. Denn wenn auch nicht jede Kurve in YOA eine reine Überlichtgeschwindigkeitsbewegung darstellt, so ist doch umgekehrt die Kurve jeder reinen Überlichtgeschwindigkeit in YOA enthalten.**) Wir können somit sagen:

Herrschte während der ganzen Vorgeschichte eines Elektrons dauernd Überlichtgeschwindigkeit, so ist in der Gegenwart eine Kraft zur Aufrechterhaltung der Bewegung erforderlich. Diese Kraft kann jedoch nicht eine gewisse obere Grenze überschreiten.

---

*) Daß wirklich ein Limes vorhanden ist, kann durch ganz ähnliche Betrachtungen erwiesen werden.

**) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904. S. 384.

Diese beiden Sätze werden A. Sommerfeld*) verdankt, der sie durch numerische und graphische Ausrechnung einer großen Anzahl von Fällen bestätigt hat.

Als obere Grenze für die möglichen Kräfte fanden wir $6m$ oder nach (3)

$$\frac{9\varepsilon^2}{16\pi}.$$

In dieser Angabe ist die Abhängigkeit vom Elektronradius nicht ausgedrückt, was daher rührt, daß wir ihm die Größe 1 zugeschrieben haben. Benutzen wir gewöhnliche Längeneinheiten, und setzen den Radius $= a$, so erhalten wir als obere Grenze der Kraft

$$\frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}.\text{**})$$

Es fragt sich nun, wie weit diese Sätze noch gelten, wenn man die Beschränkung auf Überlichtgeschwindigkeit fallen läßt. Aus der auf Seite 17 nachgewiesenen Endlichkeit des über die ganze Ebene erstreckten Integrales $\int |E|\, do$ folgt durch Anwendung des Stokesschen Satzes:

Es gibt eine obere Grenze für die Kräfte, die durch geradlinige Translation erzeugt werden können.

Diese Grenze selbst zu finden ist bisher nicht gelungen. Indessen ist es leicht, die zu größten Werten der Kraft führenden Kurven ausfindig zu machen, wenn man die Punkte vorgibt, in denen sie die Kurve $E = 0$ durchsetzen sollen. Werde z. B. gefordert, daß die Kurve in einem gegebenen Punkte N (Fig. 2) das Gebiet $E \geqq 0$ verläßt, und von da ab stets in $E \leqq 0$ verläuft. Dabei soll N so weit rechts liegend angenommen sein, daß es schon in den Teilen der Kurve $E = 0$ liegt, wo ein Durchlaufen in der Richtung NG mit einen Wachsen der Abszissen verbunden ist. Die Kurve, die dieser Forderung genügend den größten Kraftwert liefert, ist eine Kurve $OLNN'G'$, wenn LN' das Stück der Senkrechten durch N bezeichnet, das zwischen BE und $H'G'$ liegt. Es ist klar, daß jede andere Kurve durch O und N, deren Abszissen niemals abnehmen, einen kleineren Wert liefern muß. Denn, läßt man auf das Stück ON einer solchen Vergleichskurve den Zug $NLBO$ folgen, so hat man eine Durchlaufung in dem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne vorgenommen, während das Stück der Vergleichskurve in $E \leqq 0$, ergänzt durch ein Verbindungsstück im Unendlichen und durch $G'N'N$, zu einer Durchlaufung im Uhrzeigersinne führt.

---

*) Gött. Nachr. 1905. S. 201 ff. Ph. Zeitschr. 7, 1906. S. 23. Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung XV, S. 51.

**) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904. S. 402. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam Dez. 21, 1904. S. 366.

Allgemein läßt sich, wenn alle Punkte vorgeschrieben sind, in denen eine Kurve von einem der vier Gebiete der Figur 2 in ein anderes übertreten soll, durch einfache geometrische Überlegungen finden, welche diesen Bedingungen genügende Kurve den größten Kraftwert liefert, wobei jedoch die stark ausgezeichneten Grenzkurven als mit zwei Seiten begabt gedacht werden müssen, und ihre Verfolgung nach Belieben einem Verlauf in dem einen oder andern der anstoßenden Gebiete äquivalent ist. Solche zu extremalen Kraftwerten führenden Kurven, oder Extremalzüge, wie wir sie nennen wollen, können nur aus Teilen bestehen, die entweder senkrecht verlaufen oder in denen $E = 0$ ist. Denn dort, wo keines von beiden der Fall ist, kann man durch Ausbiegung nach beiden Seiten sowohl zu einer Vergrößerung als Verkleinerung von K gelangen. Es ist also längs eines Extremalzuges durchweg $Edx = 0$. Zu den einfachsten Extremalzügen zählen OY und OBE, weiter unsere eben beschriebene Kurve $OBLN'G'$. Einen andern Extremalzug erhält man, wenn man mit $OBLN'$ beginnt, dann $N'G'$ ein Stück verfolgt, sich dann senkrecht nach oben wendet bis zum Schnitt mit BE und endlich BE weiter verfolgt. Überhaupt kann man Extremalzüge finden, die jede gewünschte Anzahl von Malen zwischen BE und $H'G'$ pendeln. Sollen die Kurven aber $G'G$ in der Nähe von $H'H$ schneiden, so erhält man andere Formen.

Um die obere Grenze der Kraft im allgemeinen Falle zu finden, hätte man nun unter der Gesamtheit der Extremalzüge eine Wahl zu treffen. Diese Auswahl scheint mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Dennoch können wir ohne Mühe gewisse Aufschlüsse über jene Grenze erhalten. Zunächst ist klar, daß sie nicht kleiner als $6m$ sein kann, weil der Extremalzug OBE bereits den Wert $6m$ liefert. Es fragt sich aber, ob diese bei reiner Überlichtgeschwindigkeitsbewegung geltende Grenze durch eine Kombination von Überlichtgeschwindigkeit und Unterlichtgeschwindigkeit übertroffen werden kann. Um hierüber Aufklärung zu gewinnen, betrachten wir zunächst den Extremalzug $OBLNN'G'$. Da aber seine Behandlung zu umständlichen Rechnungen führen würde, so untersuchen wir statt seiner den Streckenzug $OBLMN'M'A'$, wo wir unter M und M' die Schnittpunkte von LN' mit OA und OA' verstehn. Dieser Streckenzug schließt sich dem Extremalzug um so enger an, je weiter L hinausrückt. Nennen wir R und R' seine Schnittpunkte mit CF und CF', so sehen wir, daß die ihm zukommende Kraft den Wert $6m$ um die Summe der drei Integrale

$$\int_{LM} B\,dy, \quad \int_{MR} B\,dy, \quad \int_{RM'} B\,dy$$

oder wegen (9) um

$$\int\limits_{LM} B\,dy + 2\int\limits_{MR} B\,dy = -\int\limits_{ML} B\,dy - 2\int\limits_{RM} B\,dy$$

übertrifft.

Nun ist nach (8)

$$-\int\limits_{ML} B\,dy = -\int\limits_{x}^{x+2} \frac{dy}{y}\, f'(y-x) = -\int\limits_{0}^{2} \frac{du}{u+x}\, f'(u),$$

wo $x \geqq 2$ vorausgesetzt wird. Da aber nach (4) (S. 9) $f'(u)$ die Nullstellen $-4, 0, 2, 2$ besitzt, also im Intervall 0 bis 2 stets dasselbe und zwar positive Vorzeichen aufweist, so hat man weiter

$$-\int\limits_{ML} B\,dy > -\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{2} f'(u)\,du$$

$$> -\frac{1}{x}\,[f(2) - f(0)]$$

also nach (4)

$$> -\frac{8}{5x}.$$

Ähnlich ist nach (6)

$$-\int\limits_{RM} B\,dy = \int\limits_{x-2}^{x} \frac{dy}{y}\, f'(x-y)$$

$$= \int\limits_{0}^{2} \frac{du}{x-u}\, f'(u)$$

$$> \frac{1}{x}\int\limits_{0}^{2} f'(u)\,du$$

$$> \frac{1}{x}\,[f(2) - f(0)]$$

$$> \frac{8}{5x},$$

also

$$-\int\limits_{ML} B\,dy - 2\int\limits_{RM} B\,dy > \frac{8}{5x}.$$

Um mehr als $\frac{8}{5x}\,m$ übertrifft somit der unserem Streckenzug zukommende Kraftwert das bei reiner Überlichtgeschwindigkeit geltende Extremum $6m$. Außerdem gibt $\frac{8}{5x}\,m$ den asymptotischen Wert*), um den sich die beiden

*) Was dabei vernachlässigt ist, verschwindet nach dem Gesetze: Const. x^{-2}.

Extremalzüge OBY und $OBLN'G'$ schließlich unterscheiden, wenn das zu LN' gehörige x über alle Grenzen wächst. Unsere Ungleichungen dagegen gelten auch für endliche x, wofern $x \geqq 2$ ist.

Indem wir speziell $x = 2$ setzen, gewinnen wir den Satz:

Das für reine Überlichtgeschwindigkeit geltende Extremum stellt nicht mehr das Extremum im allgemeinen Falle dar. Vielmehr kommt dem allgemeinen Falle ein um mehr als $\frac{4}{5}m$ *höher liegendes Extremum zu.**)

Wenden wir uns zweitens der Frage nach der kräftefreien Überlichtgeschwindigkeitsbewegung zu. Hier hat man sich vor einem Mißverständnis zu hüten: Es ist mit unserer obenstehenden Behauptung nicht gemeint, daß niemals eine Elektronenbewegung mit Überlichtgeschwindigkeit kräftefrei vor sich gehen könnte, sondern nur so viel haben wir bewiesen: Hat während der *ganzen* Vorgeschichte Überlichtgeschwindigkeit geherrscht, so ist in der Gegenwart zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine Kraft erforderlich. Es ist dagegen sehr wohl möglich, daß eine Bewegung erst mit Unterlichtgeschwindigkeit vor sich geht, und darauf mit Überlichtgeschwindigkeit, und daß diese Überlichtsgeschwindigkeitsbewegung zeitweise kräftefrei verläuft. Ein Blick auf die Figur 2 läßt die Möglichkeit dieses Vorkommens erkennen. Die Gerade OX liefert den Kraftwert 0, eine Ausbauchung an ihr im Gebiete $E < 0$ nach oben angebracht, führt zu einem negativen Kraftwert; wegen der Endlichkeit von E um O läßt sich die Kurve bei O so wenig ausbiegen, daß der Kraftwert immer noch negativ bleibt, und die Kurve doch anfangs in III verläuft. Deformieren wir jetzt die Kurve stetig in eine ganz im Überlichtgeschwindigkeitsgebiet verlaufende, so daß dabei die Übergangskurven stets ihren Anfang in III haben, so ändert sich der Kraftwert stetig**) und muß daher einmal Null werden. *Wir sind somit zu einer kräftefreien Überlichtgeschwindigkeitsbewegung gelangt.*

Es ist jedoch äußerst wahrscheinlich, daß solche Überlichtgeschwindigkeitsbewegungen sich nur unmeßbar kleine Zeiten kräftefrei erhalten können, so daß bei Annahme gleichförmiger Volumenladungen vom physikalischen Standpunkte die Überlichtgeschwindigkeit als unmöglich zu gelten hat. Das schließt nicht aus, daß bei anderen Ladungsverteilungen andere Verhältnisse obwalten.

Betrachten wir jetzt eine Vorgeschichte, bei der die Geschwindigkeit

---

*) Die Kurven $OBLM'A'$ stellen keine Bewegung aus der Ruhe dar. Doch kann man durch sie den Kraftwert $6m$ übertreffen, so ist klar, daß das auch durch Bewegungen geleistet werden kann, die aus der Ruhe heraus vor sich gehn.

**) Siehe den folgenden Paragraphen (S. 30).

stets größer als eine Geschwindigkeit v_0 war, wo v_0 wieder größer als die Lichtgeschwindigkeit sei. Man sieht, daß in diesem Falle in jedem Augenblick die von der äußeren Kraft geleistete Arbeit $> v_0 K(v_0)$ war, wenn $K(v)$ die der stationären Bewegung mit der Geschwindigkeit v entsprechende Kraft bezeichnet. Eine solche Bewegung müssen wir, da ihr eine unendliche Energie zukommt, von der Betrachtung ausschließen. *Es ist unmöglich, daß ein Elektron sich dauernd mit Geschwindigkeiten bewegt hat, die sämtlich größer sind als eine feste die Lichtgeschwindigkeit übersteigende Geschwindigkeit.*

Wir sind so zu einer bemerkenswerten Einteilung der Vorgeschichtskurven in *energetisch mögliche* und *energetisch unmögliche**) gelangt. Leider fehlt es bis jetzt an einem sicheren Kriterium, um in besonderen Fällen diese Scheidung durchzuführen. Sollten vielleicht die energetisch möglichen nur diejenigen sein, die sich im Unendlichen einer Geraden anschließen?**)

Zur sichern Erledigung dieser Aufgabe würde man eine Formel gebrauchen, die aus der Bewegungsvorgeschichte die Energie zu berechnen gestattet. Eine solche liefert die Sommerfeldsche Theorie nicht. Zur Kenntnis der Energie werden wir wohl die augenblickliche Verteilung der Feldstärken kennen müssen, also Größen, in deren schließlicher Elimination gerade ein Hauptvorteil der Sommerfeldschen Methode besteht. Dennoch ist klar, daß das gegenwärtige Feld durch die Vorgeschichte der Bewegung bestimmt ist; bedient man sich der Maxwellschen Differentialgleichungen, so wird diese Bestimmung allerdings nur dann eindeutig, wenn ihnen gewisse Bedingungen hinzugefügt werden, Bedingungen, durch welche dann *energetisch unmögliche* Vorgeschichten ausgeschlossen werden***); die Theorie der *retardierten Potentiale* dagegen ist wesentlich einfacher und führt stets eindeutig zu einer Feldstärkenverteilung als Lösung, auch bei energetisch unmöglichen Bewegungsvorgeschichten. Die Sommerfeldsche Methode hat ihren Ausgang in der Theorie der retardierten Potentiale, und liefert daher auch zu jeder Bewegungsvorgeschichte, auch einer energetisch unmöglichen, eindeutig eine zugehörige Kraft.†) *Wir*

*) Anderes Beispiel einer energetisch unmöglichen Vorgeschichte: Seit ewig pendelndes Elektron.

**) Diese Frage hängt wohl mit den im zweiten Teile aufgeworfenen Fragestellungen zusammen.

***) Vgl. des Verfassers Diss. § 1.

†) Man sieht, daß eine andere Form des Umkehrproblemes ist: Gegeben das Anfangsfeld und für die Folge die äußere Kraft. Welche Bewegung führt das Elektron in der Folgezeit aus? Über eine dritte Form des Umkehrproblemes: Angabe der Kraft für die Zeit $-\infty$ bis $+\infty$, war in der Einleitung die Rede und wird noch im zweiten Teile gesprochen werden.

*wollen uns jedoch der Einfachheit halber von jetzt ab auf solche Vorgeschichten beschränken, bei denen vor einer gewissen Zeit Ruhe geherrscht hat.**)

§ 4.

Zeitliche Änderung der Kraft; Kraftanstieg.

Die bisherigen Untersuchungen lieferten, da wir uns auf einen festen Zeitpunkt beschränkten, nur die Grenzen für die Kraft*werte*, entschieden aber nicht die Frage, welchen Bedingungen der Kraft*verlauf* unterliegt, wenn er einer Bewegung entsprechen soll. Eine der ersten Fragen betrifft die Stetigkeit solcher Kraftverläufe. Bei dieser wie bei allen folgenden Untersuchungen ist eine Umformung des Ausdruckes für die Kraft nützlich. Wir haben nämlich nach (2), (12), (15) (S. 8, 12, 13) unter Benutzung des Stokesschen Satzes

$$K = m\int E\,do, \tag{29}$$

wo do ein Flächendifferential bedeutet, und die Integration über das ganze unendliche Gebiet zwischen der X-Achse und der Vorgeschichtskurve zu erstrecken ist resp. über den endlichen Teil, der nicht zum Gebiete V oder dessen Spiegelbild an OX gehört. In der Halbebene der negativen y hat man das Flächendifferential do negativ anzusetzen.

Denken wir uns jetzt eine einparametrige Schar von Vorgeschichtskurven, die auseinander durch stetige Deformation hervorgehen. Da nach S. 17 das Integral $\int |E|\,do$ über die ganze Halbebene erstreckt einen endlichen Wert besitzt, so läßt sich, bei beliebiger Wahl von ε, ein solcher Kreis aus ihr herausschneiden, daß das Integral $\int |E|\,do$ über alle außen befindlichen Teile genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Nach (29) wird die Differenz der zwei Kurven zukommenden Kraftwerte durch ein Integral über den von ihnen eingeschlossenen Flächenraum gewonnen. Man kann daher zu einer Kurve der Schar stets eine andere so nahe gelegene finden, daß die Teile zwischen ihnen, die im Kreise liegen, zu dem Integral (29) zusammen einen Beitrag $< \frac{\varepsilon}{2}$ liefern, die Kraftwerte der Kurven sich also um

*) In dem von E. Wiechert untersuchten Falle scheint zunächst ein eindeutiges Entsprechen zwischen Kraft und Bewegung ganz ausgeschlossen zu sein. Hierzu ist aber zu bemerken, daß dieser Fall zu den energetisch unmöglichen gehört. Ersetzen wir ihn durch den Fall einer Bewegung aus der Ruhe heraus, mag dieselbe auch in noch so entlegener Vorzeit geherrscht haben, so dürften die Verhältnisse wesentlich anders liegen. Jedenfalls ist bisher nicht bewiesen worden, daß dann ein Umkehrtheorem nicht gilt.

weniger als ε unterscheiden. Mit anderen Worten: *Bei stetiger Deformation einer Vorgeschichtskurve ändert sich die zugehörige Kraft stetig.**)

Gehen wir jetzt zu den speziellen Deformationen über, die die Vorgeschichtskurve im Laufe der Bewegung erleidet. Dann müssen wir einige neue Festsetzungen treffen und neue geometrische Vorstellungen einführen. Denn während wir bisher nur einen festen Zeitpunkt und die dazu gehörige Vorgeschichte zu betrachten hatten, sollen wir uns jetzt eine Folge solcher Zeitpunkte vorstellen und zu jedem die Vorgeschichte konstruieren.

Folgendes sei unsere *analytische* Darstellung: Unter $t = 0$ verstehen wir einen bevorzugten Zeitmoment; ein positiver Wert von t bedeute einen auf diesen Moment nach t Zeiteinheiten folgenden Zeitpunkt, und für jeden Zeitpunkt t denken wir uns die Vorgeschichtsfunktion gegeben, die bestimmt, welche Entfernung y das Elektron vor x Zeiteinheiten — also zur Zeit $t-x$ — von der zur Zeit t eingenommenen Lage besaß. Und *geometrisch*: Zur Zeit 0 ist eine durch O gehende Vorgeschichtskurve gegeben, die V_0 heißen möge. Diese Kurve ändert mit der Zeit ihre Gestalt und geht stetig in immer neue durch O gehende Kurven über. Die zur Zeit t gehörige Kurve möge V_t heißen.

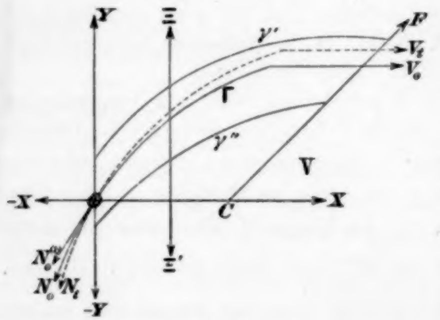


Fig. 4.

Gibt es nun nicht ein einfaches geometrisches Gesetz, nach dem die Kurve V_0 in die Kurven V_t übergeht? Ein solches ist in der Tat nicht schwer aufzufinden. Wir müssen hierzu die auf die Zeit 0 folgende Bewegung ebenfalls durch eine Kurve darstellen, welche die Nachgeschichtskurve heißen und mit N_0 bezeichnet werden möge (vgl. Fig. 4). Diese Kurve wird zweckmäßig in die Halbebene der negativen x eingezeichnet; das der Abszisse $x = -|x|$ zugehörige y bedeutet die Entfernung, die der Elektronenmittelpunkt $|x|$ Zeiteinheiten später von seiner gegenwärtigen Lage besitzen wird. Diese Kurve N_0 bildet die nach rückwärts gerichtete Fortsetzung der Kurve V_0; N_0 und V_0 zusammen als ein Gebilde mögen C_0 heißen. Entsprechend werden N_t und C_t definiert. Nun gewinnt man die C_t aus C_0 durch

*) Wurde auf S. 27 benutzt.

einen einfachen geometrischen Prozeß, den wir als das *Hindurchschieben oder Hindurchgleiten* durch O bezeichnen wollen. Wir denken uns nämlich C_0 als starres Gebilde und verschieben es translatorisch so, daß es stets durch O hindurchgeht, und seine Translationsrichtung in jedem Augenblicke mit der Richtung seiner Tangente in O übereinstimmt.*) Man sieht leicht, daß es gerade dieser Prozeß ist, der die C_0 in die sukzessiven C_t überführt. Endlich wird jede C_t durch die Vertikale in O in die rechts befindliche V_t und die links befindliche N_t zerschnitten. Die Nachgeschichtskurve kann auch mit Knickpunkten behaftet sein, diese werden beim Durchgleiten von V eine sprungweise Änderung der Translationsrichtung zur Folge haben.

Die hier beschriebenen Deformationen sind durchaus stetig. Nach dem oben Bewiesenen folgt also: *Die Kraft ändert sich im Laufe der Bewegung stetig. Hieran ändern auch Unstetigkeiten der Geschwindigkeiten nichts.***)

Unsere Darstellung liefert uns einen Ausdruck für den Differentialquotienten $\frac{dK}{dt}$ der Kraft nach der Zeit, den wir kurz K' schreiben und als *Kraftanstieg* bezeichnen.

Betrachten wir nämlich die beiden zu den benachbarten Zeiten 0 und δt gehörigen benachbarten Kurven V_0 und $V_{\delta t}$. Die Differenz der beiden ihnen entsprechenden K, die Größe δK, läßt sich nach (29) durch ein Flächenintegral über den schmalen zwischen ihnen gelegenen Raum ausdrücken:

$$\delta K = m\int E\,\delta y\,dx,$$

wo y die Ordinate der Kurve V_0, $y + \delta y$ die Ordinate der Kurve $V_{\delta t}$ als Funktion der Abszisse x, und daher δy die senkrechte Distanz dieser beiden Kurven bedeutet.

Bezeichnet nun v_0 die zur Zeit 0 vorhandene Geschwindigkeit des Elektrons, oder den Tangens des Winkels zwischen OX und der Kurve V_0

*) Mechanisch: Ein aus zwei sehr nahen Schienen bestehendes Gebilde gleitet translatorisch wie rotatorisch über einen dazwischen liegenden festen Stift.

**) Dieselbe Folgerung ergibt sich aus dem Satze von der Stetigkeit der Feldstärken. Dieser läßt sich beweisen, wenn man die Theorie der retardierten Potentiale als Ausgangspunkt der Betrachtung wählt. Geht man dagegen von den Maxwellschen Differentialgleichungen aus, so kann von einem Beweise dieses Stetigkeitssatzes keine Rede sein. Die Stetigkeit der Feldstärken gehört dann mit in die *Definition* der Lösung; sie ist eine Forderung, die man den Differentialgleichungen adjungieren muß, um die Lösung eindeutig zu machen, und daher niemals aus den Gleichungen selbst zu deduzieren. (Vgl. d. Verfassers Diss. S. 12.) Wir hatten schon einmal Gelegenheit, über das logische Verhältnis zwischen Maxwellschen Gleichungen und retardierten Potentialen zu sprechen. [S. 28.]

im Punkte $x=0$, so ist klar, daß $V_{\delta t}$ aus V_0 durch eine Translation nach oben um $v_0\delta t$ und nach rechts um δt entstanden ist. Es ist also für $x \neq 0$

$$\delta y = v_0 \delta t - y' \delta t.$$

Wir zerschneiden jetzt die Halbebene der positiven x durch eine senkrecht zur X-Achse rechts von O verlaufende Scheidelinie $\Xi\Xi'$ in zwei Teile. Berücksichtigen wir nur die Bestandteile des Integrales (29) (S. 29), die von dem rechten Teile der Halbebene herrühren, so würde aus den beiden letzten Formeln folgen:

$$\delta K = m\int E(v_0 - y')\,\delta t\,dx$$

und daher

$$K' = m\int E(v_0 - y')\,dx.$$

Hierzu kommt aber noch ein Korrektionsglied von dem linken Teile der Halbebene, indes sieht man leicht, daß der von diesem Teile gelieferte Beitrag zu K' mit unendlich abnehmendem Abstande der Geraden $\Xi\Xi'$ von O verschwindet, so daß man schließlich erhält

(30) $$K' = m\int_{V_0} E(v_0 - y')\,dx$$

oder auch

(31) $$K' = m\left[v_0\int_{V_0} E\,dx - \int_{V_0} E\,dy\right],$$

wobei das Kurvenintegral über die ganze Vorgeschichtskurve zu erstrecken ist.

Wir setzen nun

(32) $$\int_{V_0} E\,dx = a_0,$$

(33) $$-\int_{V_0} E\,dy = b_0,$$

und können dann auch schreiben

(34) $$K' = m\,[a_0 v_0 + b_0].$$

Ebenso wie den Kraftanstieg zur Zeit 0 kann man auch den Kraftanstieg zur Zeit t finden; nur hat man dann natürlich nicht über die Kurve V_0, sondern über die Kurve V_t zu integrieren. Wir setzen

(35) $$\int_{V_t} E\,dx = a(t),$$

(36) $$-\int_{V_t} E\,dy = b(t),$$

und erhalten:

(37) $$K'(t) = m[a(t)\,v(t) + b(t)].$$

Alle diese Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit auch dann, wenn die Bewegung zur Zeit 0 resp. zur Zeit t einer zeitlichen Unstetigkeit der Geschwindigkeit unterworfen sind. Nur ist dann überall statt v_0 resp. $v(t)$ die nach der Unstetigkeit herrschende Geschwindigkeit einzusetzen, die $\overset{+}{v}_0$ resp. $\overset{+}{v}(t)$ geschrieben werden mag.

Wir wollen nun unsere Kurvenintegrale wieder in Flächenintegrale verwandeln. Berechnen wir das über die X-Achse genommene Integral $\int E\,dx$, so erhalten wir nach (16) (S. 13) den Wert $\frac{16}{3}$, und finden daher unter Benutzung des Stokesschen Satzes, der in diesem Falle auf eine einfache Integration hinauskommt,

(38) $$a_0 = \frac{16}{3} + \int\limits_{V_0,\,OX} \frac{\partial E}{\partial y}\,do,$$

(39) $$b_0 = \int\limits_{V_0,\,OX} \frac{\partial E}{\partial x}\,do,$$

wobei die Integrationen über den von den Kurven V_0 und OX umschlossenen Flächenraum zu erstrecken sind, und entsprechend

(40) $$a(t) = \frac{16}{3} + \int\limits_{V_t,\,OX} \frac{\partial E}{\partial y}\,do,$$

(41) $$b(t) = \int\limits_{V_t,\,OX} \frac{\partial E}{\partial x}\,do.$$

Diese Umformungen sind gestattet, weil nach dem auf S. 21 Bewiesenen $r \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$ und $r \cdot \frac{\partial E}{\partial y}$ in der Nähe von O und C endlich bleiben und daher die nächste Umgebung dieser Punkte einen verschwindenden Beitrag zu der rechten Seite von (40) und (41) liefert.

Die Formel (30) wird sinnlos, wenn die Vorgeschichtskurve endliche senkrecht verlaufende Stücke besitzt. Dagegen bleiben auch in diesem Falle (31) und die nachfolgenden Formeln gültig, was man durch eine einfache Überlegung erkennt. Vorausgesetzt ist hierbei nur, daß die Vorgeschichtskurve geometrisch stetig ist, was jedoch eine Unstetigkeit der Vorgeschichtsfunktion — Ort als Funktion der Zeit — nicht ausschließt. Die senkrechten Stücke können bei einem positiven x liegen, oder auch bei $x = 0$. Im letzten Falle wird, wenn $\overset{+}{v}$ endlich ist, eine Unstetigkeit von v vorliegen und der endliche Wert $\overset{+}{v}$ für (31) maßgebend sein. Ob solche senkrechten Stücke durch wirkliche Kraftverläufe erzeugt werden, ist eine andere, später zu behandelnde Frage. Einstweilen nehmen wir sie

als gegeben hin und untersuchen nur, wie solche Bewegungen sich fortsetzen lassen. Unsere Formeln gelten gleichfalls, wenn die Tangente der Vorgeschichtskurve in diskreten Punkten senkrecht steht, womit keine Unstetigkeit der Vorgeschichtsfunktion verbunden ist.

§ 5.

Existenz und Eindeutigkeit der Bewegung, die zu einer vorgeschriebenen Kraft gehört.

Jetzt sind wir vorbereitet, einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen, den wir zunächst genau formulieren wollen: *Ein Elektron ruht zuerst. Darauf führt es eine endliche Zeit hindurch eine gegebene Bewegung mit stets endlicher Geschwindigkeit aus. Aus der Bewegung kann auch die Kraft berechnet werden. Von einem bestimmten Zeitpunkte an ist die Bewegung nicht mehr gegeben, sondern eine Zeitfunktion, so jedoch, daß sie sich zeitlich stetig an die vorhin wirkende Kraft anschließt. Wir behaupten, daß wir eine endliche Zeit hindurch die Bewegung auf eine und nur eine Weise so fortsetzen können, daß während dieser Zeit die aus ihr berechnete Kraft gerade die vorgeschriebene Zeitfunktion wird.*

Zwei Einschränkungen müssen wir noch machen. *Erstens soll das zur Anfangsvorgeschichte gehörige Integral a_0 von Null verschieden sein.* Außerdem führen wir noch eine zweite Beschränkung ein, von der wir nicht wissen, ob sie notwendig ist: Wir setzen voraus, daß die gegebene Vorgeschichtskurve des Anfangszustandes nicht durch C geht.

Sei V_0 (Figur 4) die Anfangsvorgeschichtskurve. Wegen des horizontalen Astes, mit dem sie endet, muß sie CF oder deren Spiegelbild schneiden. Wir umgeben V_0 mit einem Schutzgebiete Γ, das von einem Stücke von CF oder deren Spiegelbild, einem Stücke der Vertikalen OY und zwei Grenzkurven γ' und γ'' begrenzt ist und den folgenden nach Voraussetzung erfüllbaren Bedingungen genügt:

1) V_0 hat keinen Punkt mit den beiden Grenzkurven von Γ gemein.
2) Γ enthält nicht den Punkt C.
3) Jede durch O gehende in Γ verlaufende Kurve liefert bei der Integration (38) ein von Null verschiedenes a_0.

Nach der Bedingung 1) besitzt der Abstand in senkrechter Richtung der Grenzkurven von V_0 eine untere Grenze. Sei $\mathfrak{d}$ eine positive Zahl, kleiner als diese. Ferner sei L größer als alle x in Γ, und G größer als der Absolutwert der Funktionen

$$x\frac{\partial E}{\partial x},\ x\frac{\partial E}{\partial y}$$

in Γ. Endlich sei β größer als der absolute Wert aller Integrale b_0, die nach (39) von Kurven durch O in Γ gebildet werden, und α sei eine von Null verschiedene positive Zahl, kleiner zu wählen, als der absolute Wert aller Integrale a_0, die nach (38) zu Kurven durch O in Γ gehören.

Zu der so umgebenen Kurve V_0 suchen wir eine passende Nachgeschichtskurve N_0. Für $t < 0$ ist die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit gegeben und damit indirekt auch: $K(t)$, $a(t)$, $b(t)$. Für $t > 0$ ist von diesen Funktionen nur $K(t)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $K'(t)$ gegeben, $v(t)$ dagegen wird gesucht. Unsere Methode besteht nun darin, die unbekannten Funktionen $v(t)$, $a(t)$, $b(t)$ *zusammen* zu bestimmen, wobei wir der Gleichung (37)

$$K' = m[a(t)v(t) + b(t)] \tag{37}$$

Genüge leisten müssen. Diese Bestimmung gelingt mit Hilfe der von H. A. Schwarz und E. Picard*) ausgebildeten Methode der sukzessiven Approximation.

Als erste Annäherung $v^{(1)}(t)$ für $v(t)$ wählen wir eine Konstante und zwar die zur Zeit 0 vorhandene Geschwindigkeit v_0. Also:

$$v^{(1)}(t) = v(0) = v_0. \tag{42}$$

Die dieser Annäherung entsprechende Nachgeschichtskurve $N_0^{(1)}$ ist eine geneigte Gerade, die sich ohne Knick in $x = 0$ an V_0 anschließt.

Diese Wahl von $N_0^{(1)}$ ist indes nur zweckmäßig, wenn K' zur Zeit 0 stetig vorgeschrieben ist. Ist dagegen $\overset{+}{K}'$ nicht $= m[a\bar{v}_0 + b_0]$ vorgeschrieben, so weiß man, daß die nach dem Sprunge herrschende Geschwindigkeit von $\bar{v}_0$ verschieden, nämlich

$$\overset{+}{v}_0 = \frac{\overset{+}{K}' - b_0}{a_0}$$

werden wird, und wird als erste Annäherung zweckmäßig wählen

$$v^1(t) = \overset{+}{v}_0.$$

Wir brauchen für das Folgende die Stetigkeit von K' weder zur Zeit 0 noch zu einer andern Zeit vorauszusetzen.

V_0 und $N_0^{(1)}$ zusammen bilden die erste Annäherungskurve $C_0^{(1)}$. „Schieben" wir $C_0^{(1)}$ „durch" O hindurch, so erhalten wir die Schar der $C_t^{(1)}$, $V_t^{(1)}$, $N_t^{(1)}$. Wir bezeichnen von jetzt ab die Ordinaten von V_0 mit y_0, von $V_t^{(1)}$ mit $y_t^{(1)}$.

Wir nehmen t nicht größer als τ, und müssen τ rücksichtlich seiner Größe einer Reihe von Einschränkungen unterwerfen. Die erste ist**):

---

*) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. I, S. 241. E. Picard, Traité d'analyse, 2. éd., tome II, p. 340.

**) Hier enthält die Mitteilung in den Göttinger Nachrichten eine Inkorrektheit.

I) τ soll so klein sein, daß alle Differenzen $y_t^{(1)} - y_0$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $\mathfrak{b}$ (S. 34) sind. Daraus folgt, daß alle $V_t^{(1)}$ in Γ verlaufen. Unter $\mathfrak{b}^*$ wollen wir eine feste Größe verstehen, die dem absoluten Betrage nach größer als alle Differenzen $y_t^{(1)} - y_0$ und kleiner als $\mathfrak{b}$ ist.

Nach (40) und (41) (S. 33) liefern nun die Kurven $V_t^{(1)}$ Integrale $a^{(1)}(t)$, $b_t^{(1)}(t)$. Wir setzen nämlich

$$(43)\qquad \begin{cases} a^{(1)}(t) = \dfrac{16}{3} + \displaystyle\int\limits_{V_t^{(1)}, ox} \dfrac{\partial E}{\partial y}\, do, \\ b^{(1)}(t) = \displaystyle\int\limits_{V_t^{(1)}, ox} \dfrac{\partial E}{\partial x}\, do. \end{cases}$$

Im Anschluß an (36) setzen wir sodann

$$(44)\qquad v^{(2)}(t) = \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b^{(1)}(t)}{a^{(1)}(t)}$$

und wissen wegen der Bedingung (I) für τ und der Bedingung (3) für Γ, daß $v^{(2)}(t)$ für t zwischen 0 und τ stets endlich bleibt. Aus $v^{(2)}$ erhalten wir die Kurve $N_0^{(2)}$ und damit die Schar der $C_t^{(2)}$, $V_t^{(2)}$, $N_t^{(2)}$. Wir nehmen nun

II) τ so klein, daß alle $V_t^{(2)}$ in Γ enthalten sind.

Sodann konstruieren wir, wie oben, $a^{(2)}(t)$, $b^{(2)}(t)$ und $v^{(3)}(t)$ und wissen, daß $a^{(2)}(t)$ durchweg $\neq 0$ und daß $v^{(3)}(t)$ endlich ist. Weitere Beschränkungen dieser Art legen wir τ nicht auf. Zu $v^{(3)}(t)$ konstruieren wir die Schar $V_t^{(3)}$ und, falls diese durchweg in Γ liegen sollte, was wir aber nicht wissen, können wir $v^{(4)}(t)$ bilden. So fahren wir fort und zwar so lange, als wir noch durchweg von Null verschiedene $a(t)$ erhalten. Wir haben allgemein

$$(45)\qquad v^{(n+1)}(t) = \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b^{(n)}(t)}{a^{(n)}(t)},$$

$$(46)\qquad a^{(n)}(t) = \frac{16}{3} + \int\limits_{V_t^{(n)}, ox} \frac{\partial E}{\partial y}\, do,$$

$$(47)\qquad b^{(n)}(t) = \int\limits_{V_t^{(n)}, ox} \frac{\partial E}{\partial x}\, do,$$

vorausgesetzt daß $V_t^{(1)}, V_t^{(2)}, \cdots, V_t^{(n)}$ für $0 < t < \tau$ in Γ enthalten sind, eine Voraussetzung, die nach den Bedingungen (I) und (II) wenigstens für $n = 2$ erfüllt ist.

Schätzen wir nun die Differenz $a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)$ ab. Dazu ist eine geometrische Hilfsbetrachtung erforderlich. Seien $v^{(n')}(t)$ und $v^{(n'')}(t)$ zwei Funktionen aus der Reihe der Funktionen $v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), \cdots, v^{(n)}(t)$ und seien $y_t^{(n')}$ und $y_t^{(n'')}$ die Ordinaten der zugehörigen $V_t^{(n')}$ und $V_t^{(n'')}$. Wir wollen das Maximum der Differenz $|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}|$ an einer gegebenen Stelle, d. h. für ein gegebenes x und für alle t von 0 bis τ bestimmen. Diese Größe schreiben wir $\mathrm{M}\,|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}|$, indem M allgemein ein Maximum für alle t von 0 bis τ bedeuten soll.

1) Behandeln wir erstens den Fall

$$x > \tau.$$

Sei t irgend eine Zeit, die kleiner als τ gewählt sein muß, so ist es unsere Aufgabe, $V_t^{(n')}$ und $V_t^{(n'')}$ für die Abszisse x zu vergleichen, oder, wie wir uns auch ausdrücken mögen, die hindurchgeschobenen $V^{(n')}$ und $V^{(n'')}$ zur Zeit t an der Stelle x zu vergleichen. Zunächst betrachten wir sie aber einmal zur Zeit 0 an der Stelle $x - t$. Sie fallen zusammen, weil zur Zeit 0 überhaupt alle V zusammenfallen, nämlich mit V_0. Jetzt setzt der Durchschiebungsprozeß ein. Er bringt die vorhin zusammenfallenden Punkte um t nach rechts, also gerade nach x, und entfernt sie um

$$\int_0^t \{v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)\}\,dt$$

in vertikaler Richtung. Es wird also sein

$$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \overline{\gtrless}\, t \cdot \mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

und a fortiori

$$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \overline{\gtrless}\, \tau \cdot \mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|. \tag{48}$$

2) Sei zweitens

$$x < \tau.$$

Ist

a) $t < x$, so schließen wir, wie eben, daß

$$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \overline{\gtrless}\, t \cdot \mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|,$$

also a fortiori

$$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \overline{\gtrless}\, x \cdot \mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

ist. Ist dagegen

b) $t > x$, so betrachten wir $V_t^{(n')}$ und $V_t^{(n'')}$ zur Zeit $t - x$ an der Stelle O. Hier finden wir die Ordinatendifferenz 0, weil in O alle V_t zusammenfallen. Die Punkte, die sich zur Zeit $t - x$ an der Stelle O befinden, sind zur Zeit t um x nach rechts gerückt, befinden sich also in x, und sind um

$$\int_{t-x}^t \{v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)\}\,dt$$

senkrecht gegeneinander verschoben, so daß man hat

(49) $$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \gtrless x\mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|.$$

Wir dürfen also zusammenfassend behaupten: Für

(48) $$x > \tau \text{ ist } |y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \gtrless \tau\cdot\mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

und für

(49) $$x < \tau \text{ ist } |y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| \gtrless x\cdot\mathrm{M}\,|v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|.$$

Setzen wir nun für n' und n'' die Indizes n und $n-1$ ein und berücksichtigen, daß in Γ nach Voraussetzung $\frac{\partial E}{\partial y} < \frac{G}{x}$ ist, so erhalten wir nach (46)

(50) $$\left\{\begin{aligned} |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| &< \int_0^\tau \left\{\frac{G}{x}\cdot x\mathrm{M}\,|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\right\} dx \\ &+ \int_\tau^L \left\{\frac{G}{x}\cdot \tau\mathrm{M}\,|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\right\} dx \end{aligned}\right.$$

oder

$$|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| < \{\mathrm{M}\,|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\}\, G\cdot\left[\tau + \tau\, ln\,\frac{L}{\tau}\right]$$

oder

(51) $$|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| < R\cdot\{\mathrm{M}\,|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\},$$

wo

(52) $$R = G\left[\tau + \tau\, ln\,\frac{L}{\tau}\right]$$

ist.

Ebenso ist

(53) $$|b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| < R\cdot\{\mathrm{M}\,|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\}.$$

Schätzen wir zweitens die Differenz $v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)$ ab. Zunächst wissen wir, da $V_t^{(1)}, V_t^{(2)}, \cdots, V_t^{(n)}$ in Γ verlaufen, daß sowohl $v^{(n+1)}(t)$ als auch $v^{(n)}(t)$ im Intervalle 0 bis τ endlich bleiben. Sei $\varkappa$ größer als das Maximum von $\frac{1}{m}K'(t)$ im Intervalle von 0 bis τ. Dann folgt aus (45) (S. 36) und den Festsetzungen auf S. 35

$$\begin{aligned} |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| &< \frac{\varkappa}{\alpha^2}\,\mathrm{M}\,|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| \\ &+ \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{M}\,|b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| \\ &+ \frac{\beta}{\alpha^2}\,\mathrm{M}\,|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)|, \end{aligned}$$

oder

(54) $$|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < S\mathrm{M}\left\{\begin{array}{l} |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| \\ |b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| \end{array}\right\},$$

wenn M das Maximum von den beiden Argumenten bedeutet, und

$$S = \frac{\varkappa}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} \tag{55}$$

ist. Hierbei ist $\varkappa$ eine feste positive Zahl, und sollten wir später genötigt sein, τ noch weiter zu verkleinern, so werden wir doch $\varkappa$ und damit S ungeändert lassen. Verbinden wir (54) mit (51) und (53), so erhalten wir:

$$|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < R \cdot S \cdot \mathrm{M}\, |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|, \tag{56}$$

und das gilt, wenn $V_t^{(1)}, \cdots, V_t^{(n)}$ in Γ enthalten sind, also wenigstens noch für $n = 2$. Man hat also auch

$$|v^{(3)}(t) - v^{(2)}(t)| < R \cdot S \cdot \mathrm{M}\, |v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)|$$

oder

$$|v^{(3)}(t) - v^{(2)}(t)| < R \cdot S \cdot w,$$

wenn unter w das Maximum von $|v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)|$ im Intervalle 0 bis τ verstanden ist, und allgemein

$$|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < (RS)^{n-1} w. \tag{57}$$

Nun unterwerfen wir τ einer dritten Bedingung. Nach (52) kann R durch Verkleinerung von τ beliebig klein gemacht werden.*) Wählen wir also

III) τ so klein, daß $RS < 1$ ist.

Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} |v^{(n+1)}(t) - v^{(1)}(t)| \leqq \;& \mathrm{M}\, |v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)| \\ & + \mathrm{M}\, |v^{(3)}(t) - v^{(2)}(t)| \\ & + \cdots + \mathrm{M}\, |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| \\ & < w + (RS) w + \cdots + (RS)^{n-1} w \\ & < w(1 + RS + (RS)^2 + \cdots) \\ & < \frac{w}{1 - RS}, \end{aligned}$$

und da nach (48) und (49)

$$|y_t^{(n')} - y_t^{(n'')}| < \tau \mathrm{M}\, |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

ist, erhalten wir:

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(1)}| < \frac{w\tau}{1 - RS}.$$

Nach der Festsetzung auf S. 36 ist $|y_t^1 - y_0| < \mathfrak{d}^*$, wo $\mathfrak{d}^* < \mathfrak{d}$ ist, daher hat man

$$|y_t^{(n+1)} - y_0| < \mathfrak{d}^* + \frac{w\tau}{1 - RS}.$$

Nun wählen wir

---

*) Also: Nach der Wahl von Γ sind $\mathfrak{d}$, L, G, α, β als feste Größen zu wählen, nach einer beliebigen vorläufigen Wahl von τ die Größen $\varkappa$ und S, und nach Wahl I) von τ die Größen $\mathfrak{d}^*$ und w. R dagegen ist Funktion von τ. Auch hier ist die Fassung der Göttinger Nachrichten verbessert.

IV) τ so klein, daß
$$\frac{w\tau}{1-RS} < \mathfrak{d} - \mathfrak{d}^*$$
ist.

Dann haben wir
$$|y_t^{(n+1)} - y_0| < \mathfrak{d},$$
d. h. unter der Voraussetzung daß noch die Kurven $V_t^{(n)}$ in Γ verlaufen, haben wir gezeigt, daß auch die $V_t^{(n+1)}$ in Γ bleiben. Für ein so klein bestimmtes τ schließen wir nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, daß alle V_t in Γ bleiben werden.

Wir sind somit zu einer unendlichen Reihe von Kurven V und Funktionen v gelangt. Bilden wir die Reihe
$$v^{(0)} + (v^{(1)} - v^{(0)}) + (v^{(2)} - v^{(1)}) + \cdots.$$

Wegen (57) und wegen $RS < 1$ wird sie gleichmäßig gegen eine Funktion konvergieren, die $v(t)$ heißen soll. Nach (51), (53) und (57) konvergieren ebenso die Reihen
$$a^{(1)} + (a^{(2)} - a^{(1)}) + (a^{(3)} - a^{(2)}) + \cdots$$
und
$$b^{(1)} + (b^{(2)} - b^{(1)}) + (b^{(3)} - b^{(2)}) + \cdots$$
gleichmäßig gegen Grenzfunktionen $a(t)$ und $b(t)$.

Die Funktion $v(t)$ dient zur Konstruktion der Nachgeschichtskurve N_0 und diese liefert beim Hindurchschieben eine Schar V_t. Mit wachsendem n konvergieren die $V_t^{(n)}$ gleichmäßig — d. h. unabhängig von t — gegen die V_t, eben weil $v^{(n)}(t)$ gleichmäßig gegen $v(t)$ strebt.*) Aus dieser letzten Tatsache schließen wir nun weiter, daß
$$\int\limits_{V_t^{(n)},\,OX} \frac{\partial E}{\partial x}\,do \quad \text{und} \quad \int\limits_{V_t^{(n)},\,OX} \frac{\partial E}{\partial y}\,do$$
mit wachsendem n gleichmäßig gegen
$$\int\limits_{V_t,\,OX} \frac{\partial E}{\partial x}\,do \quad \text{und} \quad \int\limits_{V_t,\,OX} \frac{\partial E}{\partial y}\,do$$
konvergieren. Um nämlich z. B.
$$\int\limits_{V_t^{(n)}} \frac{\partial E}{\partial x}\,do \quad \text{bis auf } \varepsilon \text{ an} \int\limits_{V_t} \frac{\partial E}{\partial x}\,do$$
heranzubringen, schließen wir erst O durch einen Kreis von so kleinem Radius aus, daß das Integral $\int \frac{\partial E}{\partial x}\,do$ hierüber $< \frac{\varepsilon}{2}$ **) ist. Für das übrige

*) Vgl. Formel (48) und (49).

**) Vgl. die Schlußbemerkung von § 2.

Gebiet in Γ besitzt aber $\frac{\partial E}{\partial x}$ eine obere Grenze. Sei G^* diese und wählen wir n so groß, daß $V_t^{(n)}$ und V_t für alle t um weniger als $\frac{\varepsilon}{2LG^*}$ unterschieden sind, so sind in der Tat die beiden in Rede stehenden Integrale auf weniger als ε einander angenähert.

Aus dem eben Bewiesenen, sowie den Gleichungen (45)—(47) ergibt sich aber sofort:

$$v(t) = \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b(t)}{a(t)},$$

$$a(t) = \frac{16}{3} + \int\limits_{V_t, OX} \frac{\partial E}{\partial y}\, do,$$

$$b(t) = \int\limits_{V_t, OX} \frac{\partial E}{\partial x}\, do.$$

Bei einer $v(t)$ entsprechenden Bewegung wird also der nach (36), (39), (40) zu bestimmende Kraftanstieg gerade mit unserer vorgeschriebenen Funktion K' identisch, womit unser Existenzbeweis geführt ist.

Wir schließen hier noch einen Eindeutigkeitsbeweis an. Es kann nicht zwei verschiedene Funktionen v geben, die unser Problem lösen. In der Tat, wären v_{I} und v_{II} solche Funktionen, so wählten wir wieder τ so klein, daß $RS < 1$ ist, und daß bei der durch v_{I} sowohl als durch v_{II} erzeugten „Durchschiebung" die V_t in Γ bleiben.

Wir erhielten dann in entsprechender Weise wie vorhin:

$$|v_{\mathrm{I}}(t) - v_{\mathrm{II}}(t)| < RS \cdot \mathrm{M}\, |v_{\mathrm{I}}(t) - v_{\mathrm{II}}(t)| \tag{58}$$

oder

$$\mathrm{M}\, |v_{\mathrm{I}}(t) - v_{\mathrm{II}}(t)| < RS \cdot \mathrm{M}\, |v_{\mathrm{I}}(t) - v_{\mathrm{II}}(t)|, \tag{59}$$

was wegen $RS < 1$ ein offenbarer Widerspruch wäre. Also läßt sich unsere Bewegung bei vorgeschriebenem Kraftverlauf nur auf eine Weise fortsetzen.*)

Für den Fall, daß V_0 durch C geht, habe ich den Existenzbeweis nicht führen können. Ich habe für kleine τ nur die Ungleichung $|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < RS\sqrt{|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|}$ erhalten können, mit etwas veränderter Bedeutung des R, eine Ungleichung, auf die sich kein Konvergenzbeweis stützen läßt.

Unser Existenzbeweis und Eindeutigkeitsbeweis sind dagegen vollständig geführt, unter der Voraussetzung, daß V_0 nicht durch C geht, und daß das zur Anfangsvorgeschichte gehörige Integral $\alpha_0 = \int\limits_{V_0} E\,dx$ von Null verschieden ist.

*) Vgl. C. Jordan: Cours d'analyse, 2. éd., tome III. § 80, p. 92.

Es werde nochmals daran erinnert, daß über die Stetigkeit von K' keinerlei Voraussetzung gemacht wurde. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz bleibt also auch bei Kraftverläufen mit unstetigen Kraftanstiegen gültig. Aus (37) (S. 33) folgt: *Die Geschwindigkeit ist stetig oder unstetig, je nachdem der Kraftanstieg stetig oder unstetig ist.**)

Alle Überlegungen bleiben unverändert bestehen, wenn die Vorgeschichte in diskreten Punkten oder endlichen Stücken senkrecht verläuft, da hierdurch nicht die Gültigkeit der Gleichungen (37)—(41) — vgl. Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen — noch der Gleichungen (48) und (49) erschüttert wird. Wenn $\overset{+}{K}'(0)$ unendlich ist, dagegen $K'(t)$ für $t > 0$ endlich und $K(t)$ stetig bleibt, so hat man als erste Näherung $v^{(1)}(t)$ die für $t = 0$ unendlich werdende Funktion $\frac{\frac{1}{m}K'(t) - b_0}{a_0}$ zu wählen und es kommt wohl zunächst darauf an, ob $v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)$ endlich bleibt und ein endliches Maximum w besitzt. Was geschieht, wenn die Kraftkurve $K(t)$ für positive t nicht nur in diskreten Punkten, sondern in endlichen Stücken senkrecht verläuft, wird später besprochen werden.

§ 6.

Singularitäten.

Bei oberflächlicher Betrachtung scheinen die bisher gewonnenen Resultate sich zu widersprechen. Wir haben gesehen, daß man zu einem gegebenen Kraft*verlauf* eine zugehörige Bewegung auffinden kann. Andrerseits wissen wir, daß gewissen, nämlich zu großen, Kraft*werten* unter keinen Umständen eine Bewegung entsprechen kann. Hierin aber könnte ein Widerspruch erblickt werden, da es frei steht, sich einen Kraftverlauf vorzustellen, bei dem die Kraft stetig von Null bis zu jenen verbotenen Werten wächst.

Der Widerspruch löst sich, sobald man bedenkt, daß unser Existenzbeweis nicht lückenlos gilt, sondern gewissen Singularitäten gegenüber versagt. Bei dieser Erkenntnis dürfen wir nicht stehen bleiben. Wir fragen weiter, warum gerade bei Annäherung an den Extremalzug OY singuläre Verhältnisse auftreten müssen. Die Antwort ist in der auf Seite 25 gemachten Bemerkung enthalten, daß längs jedes Extremalzuges $Edx = 0$ ist. Daher gehören alle Extremalzüge zu der umfassenderen

*) Auf Grund der Untersuchung spezieller Fälle allgemein ausgesprochen von Van der Waals jn. K. Akademie van Wetenschappen Dez. 21, 1905. S. 482 ff. archives néerl. 1906. S. 296. Weitere Beispiele finden sich: P. Hertz, Phys. Zeitschr. 5, 1904, 168; Dissert. S. 72 f.; A. Sommerfeld, Göttinger Nachrichten 1905, Heft 3, S. 204 ff.

Gattung von Kurven, für die $\int E dx = a = 0$ ist, und in deren Nähe daher der Existenzsatz versagt. Aus (17) (S. 13) folgt, daß, wenn die Vorgeschichtskurve sich sehr nahe an OY hält, a und b verschwinden, die Geschwindigkeit also bei endlichem K' sehr groß wird. Dasselbe gilt bei Annäherung an die andern Extremalzüge.

Wir wollen jetzt die Untersuchung von einem andern Standpunkt aus führen: Wir nennen einen Bewegungszustand oder eine Vorgeschichte regulär, wenn erstens das Integral $\int E dx = a$ von Null verschieden ist, und zweitens die Vorgeschichtskurve nicht durch C geht.*) Dann lassen sich die Ergebnisse des vorigen Paragraphen so aussprechen: *Bei gegebener äußerer Kraft von endlichem Kraftanstieg läßt sich ein regulärer Bewegungszustand eine endliche Zeit hindurch regulär fortsetzen (d. h. immer in reguläre Bewegungszustände übergehend).***) Es liegt nahe zu fragen, wie lange das möglich ist. Somit sind wir zu der folgenden Fragestellung gedrängt: *Wir gehen von einem regulären Bewegungszustand aus und lassen darauf alle möglichen Kraftverläufe mit endlichen Kraftanstiegen wirken. Welche Typen der Bewegungsfortsetzbarkeit können vorkommen?*

Ein erstes Einheitsprinzip gewinnen wir mit Hilfe einer Menge [t], die wir durch die folgende Festsetzung definieren: Eine Zahl t soll zu ihr gehören, wenn sich die Bewegung bis zur Zeit t regulär fortsetzen läßt und zur Zeit t ebenfalls regulär ist. Es liegen zwei Möglichkeiten vor: Die Menge t kann eine obere Grenze besitzen oder nicht. Der zweite Fall bedeutet physikalisch dauernde Fortsetzbarkeit der Bewegung. Er ist natürlich möglich, wie das Beispiel der kräftefreien Ruhe zeigt, und bedarf keiner weitern Erläuterung.

In dem nun uns noch allein beschäftigenden anderen Falle läßt sich sofort behaupten, daß die Menge [t] nicht abgeschlossen sein kann. Denn wäre die obere Grenze t* unter den Zahlen t enthalten, so ließe sich die Bewegung nach dem Existenzsatz über sie hinaus regulär fortsetzen; sie wäre also gar keine obere Grenze. Es sind nun in unserem Falle wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden, entsprechend den beiden Definitionseigenschaften der t: 1) Der jener oberen Grenze entsprechende Zeitpunkt t* wird durch die Bewegung nicht erreicht. 2) Er wird erreicht, aber in ihm ist der Bewegungszustand singulär. Beide Fälle sind möglich und sollen gesondert behandelt werden.

1) Zeigen wir an einem Beispiele die Möglichkeit des ersten Falles. Wir fragen, welche Gestalt zur Zeit 0 die Nachgeschichtskurve haben

*) Es mag dahingestellt bleiben, ob die letzte Forderung wirklich nötig ist.

**) Der Satz bezieht sich also nur auf den Fall, daß $\overset{+}{K}'$ endlich ist. Dagegen brauchen $\bar{K}'$ und damit $\bar{v}$ nicht endlich zu sein.

muß, damit er eintritt. Da die Nachgeschichtskurve, die ja nur abnehmende Abszissen besitzt (Fig. 4), eine negative Abszisse $-t^*$ nicht unterschreiten soll, so muß sie sich der Vertikalen mit jener Abszisse asymptotisch anschließen. Wir „schieben“ die so gestaltete Nachgechichtskurve durch O hindurch und erhalten damit eine zweite korrespondierende Kurve, die Kraftkurve $K(t)$, die das dem jedesmaligen V_t entsprechende K anzeigt. Diese zweite Kurve ist an der Stelle t^* nicht definiert, kommt aber in der Nähe von t^* dem Werte $6m$ beliebig nahe, denn die Kurven V_t schließen sich mit wachsendem t immer mehr dem Extremalenzug OY an. Indem wir jener zweiten Kurve mit „hebbarer“ Unstetigkeit an der Stelle t^* den Wert $6m$ beilegen, sind wir zu *einem durchweg stetigen Kraftverlauf* gelangt. Läßt man eine Kraft nach diesem Gesetz auf das Elektron wirken, so zeigt es sich, daß die Bewegung unter ihrem Einflusse zwar noch zu jeder Zeit $< t^*$ existiert, zur Zeit t^* selbst aber unmöglich wird, d. h. gerade der oben erwähnte Fall bietet sich dar. Gleichzeitig bemerken wir, daß wir durch diese Methode den allgemeinsten Fall beschrieben haben, in dem ein stetiger Kraftverlauf zu einer derartigen Singularität führt. Es ist zu beachten, daß bei dieser Bewegung dem Zeitpunkt t^* kein bestimmter im Endlichen gelegener Ort des Elektrons zukommt.

2) Es ist der Fall zu untersuchen, daß für $t < t^*$ die Bewegung möglich und regulär ist, und sich noch bis zur Zeit t^* inklusive fortsetzen läßt, dann aber singulär wird. Da wir die Möglichkeit, daß V_{t^*} durch C geht, nicht berücksichtigen wollen, bleibt nur übrig, daß

$$\int_{V_{t^*}} E\,dx = 0$$

ist, und wir haben die beiden Fälle zu unterscheiden, daß $\mathfrak{v}_{t^*}$ endlich und unendlich ist.

$$\text{a)} \quad \mathfrak{v}_{t^*} = \infty; \quad \int_{V_{t^*}} E\,dx = 0.$$

Hier bieten sich wieder zwei Möglichkeiten dar. Entweder die Bewegung läßt sich noch über t^* fortsetzen, oder sie hört im Zeitpunkte t^* auf. Beide Fälle können tatsächlich eintreten. Daß der erste Fall eintreten kann, ist leicht zu zeigen. Wir konstruieren eine Vorgeschichtskurve V_{t^*}, welche die beiden obenstehenden Eigenschaften besitzt, in O senkrecht zu stehen und ein verschwindendes a zu besitzen. Daran schließen wir eine beliebige Nachgeschichtskurve, die ebenfalls mit vertikaler Tangente einsetzt. Es sei dahingestellt, ob man die Wahl so treffen kann, daß $\lim\limits_{t=t^*} a_t \cdot v_t$ endlich bleibt für $t > t^*$ und $t < t^*$, also $\bar{K}'(t^*)$ und $\overset{+}{K}'(t^*)$ endlich sind.

Der zweite Fall kommt jedenfalls auch bei endlichem Kraftanstieg vor. Um das einzusehen, sind noch einige Überlegungen nötig. Zunächst ist

klar, daß alle möglichen Integrale $b = \int E\,dy$ eine obere Grenze besitzen. Denken wir uns jetzt einen Vorgang, bei dem die Kraft stetig bis auf einen Wert $> 6m$ wächst, und setzen den Kraftverlauf mit einem positiven Kraftanstieg fort, der durch m dividiert stets größer ist als die obere Grenze aller Integrale b. Die Bewegung kann dann nicht dauernd fortgesetzt werden, weil man sonst zu beliebig hohen Kräften gelangen würde. Ist t^* die obere Grenze der Zeitpunkte, in denen sie noch möglich ist, so kann sie sicher bis zur Zeit t^* inklusive fortgesetzt werden, denn die entgegengesetzte Annahme würde mit Notwendigkeit zur Kraft $K = 6m$ führen. Zur Zeit t^* wird also $a = 0$ sein*) und wegen $K' + mb$ folgt $v = \infty$. Der fragliche Fall ist somit als möglich nachgewiesen: *Die Bewegung läßt sich bis zum Zeitpunkte t^* inklusive fortsetzen, aber nicht über ihn hinaus. Das Elektron besitzt in ihm eine unendlich große Geschwindigkeit, aber — im Gegensatz zum vorigen Fall — einen bestimmten Ort.*

$$\text{b)}\quad v_{t^*} \text{ endlich;}\quad \int_{V_{t^*}} E\,dx = 0.$$

Dann muß mit Notwendigkeit zur Zeit t^* der Kraftanstieg $K' = mb$ sein. Da in der Gleichung (37) (S. 33) der Koeffizient von v verschwindet, könnte es scheinen, als ob die Bewegung unendlich vieldeutig würde und sich mit jeder Geschwindigkeit fortsetzen ließe. Diese in den Göttinger Nachrichten von mir geäußerte Vermutung ist irrig, worauf mich Herr G. Herglotz aufmerksam gemacht, indem er auf die Notwendigkeit, die zweite Ableitung von K zu bilden, hinwies.

Nehmen wir zunächst an, daß $\bar{v}_{t^*} < 1$ ist. Indem man auf $\frac{\partial E}{\partial y}$ und $\frac{\partial E}{\partial x}$ dieselben Operationen anwendet, wie im vierten Paragraphen auf E, gewinnt man aus (38) und (39) zwei Formeln für $\frac{da}{dt}$ und $\frac{db}{dt}$, und bekommt, diese in die nach t differenzierte Gleichung (37) eingesetzt, unter Berücksichtigung von $\alpha_0 = 0$

$$(60)\qquad \frac{\overset{+}{K}''}{m} = \overset{+}{v}^2\left[\int \frac{\partial E}{\partial y}\,dx\right] + \overset{+}{v}\left[\int \frac{\partial E}{\partial x}\,dx - \int \frac{\partial E}{\partial y}\,dy\right] - \int \frac{\partial E}{\partial x}\,dy.$$

Es war also ein Irrtum, anzunehmen, daß sich die Bewegung mit jeder Geschwindigkeit fortsetzen ließe. Vielmehr kommen überhaupt nur zwei Werte in Frage, die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind. Ist K'' stetig, so ist eine Wurzel dieser Gleichung reell, nämlich gleich $\bar{v}$, also in diesem Fall beide reell. Auch diese Bemerkung stammt von G. Her-

*) Der Beweis hat eine Lücke. V_{t^*} könnte durch C gehen.

glotz. Ob beide Geschwindigkeiten wirklich eine Fortführung der Bewegung gestatten, wäre noch zu untersuchen.

Etwas anders liegen die Verhältnisse im Falle der *Überlichtgeschwindigkeit.* Zunächst sieht man, daß die Koeffizienten der letzten Gleichung nicht mehr endlich sind. Gleichwohl können $\frac{da}{dt}$ und $\frac{db}{dt}$ endlich sein. Man hat nämlich

$$
(61)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \int \frac{\partial E}{\partial y}\,(\bar{v}\,dx - dy),\\
\frac{db}{dt} &= \int \frac{\partial E}{\partial x}\,(\bar{v}\,dx - dy),
\end{aligned}\right.
$$

wo zwar $\frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial x}$ bei O unendlich werden, dafür aber $\bar{v}\,dx - dy$ in diesem Punkte verschwindet, so daß $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ und damit auch $\bar{K}''$ endlich sein können. Ist nach dem Sprunge $\overset{+}{K}''$ endlich vorgeschrieben, so kann von einer Fortsetzung mit einer Geschwindigkeitsunstetigkeit nicht die Rede sein, wie wir jetzt zeigen wollen. In der Nähe von O gilt nach den auf S. 20 stehenden Formeln:

$$
(62)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{12}{x}\left\{\frac{1}{\bar{v}^4} - \frac{1}{\bar{v}^2}\right\},\\
\frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{12}{x}\left\{\frac{1}{\bar{v}^3} - \frac{1}{\bar{v}}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Um a nach δt Zeiteinheiten zu erhalten, muß die Vorgeschichtskurve ein wenig verschoben werden. Bezeichnen ξ_1 und ξ_2 zwei sehr nahe an O gelegene Abszissen, und $\underset{\xi_1\cdots\xi_2}{\delta a}$ den Beitrag zu δa, der von den zwischen diesen Abszissen liegenden Teilen der Ebene herrührt, so liefert die geometrische Anschauung nach (38) (S. 33)

$$
\underset{\xi_1\cdots\xi_2}{\delta a} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial E}{\partial y}\,(\overset{+}{v} - \bar{v})\,\delta t\,dx,
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\xi_1\cdots\xi_2}{a'} &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial E}{\partial y}\,(\overset{+}{v} - \bar{v})\,dx,\\
&= 12\,(\overset{+}{v} - \bar{v})\left(\frac{1}{\bar{v}^4} - \frac{1}{\bar{v}^2}\right) ln\,\frac{\xi_2}{\xi_1},
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$
\underset{\xi_1\cdots\xi_2}{b'} = 12\,(\overset{+}{v} - \bar{v})\left(-\frac{1}{\bar{v}^3} + \frac{1}{\bar{v}}\right) ln\,\frac{\xi_2}{\xi_1}.
$$

Nun ist $\frac{K''}{m} = a'\overset{+}{v} + b'$. Da $ln\,\frac{\xi_2}{\xi_1}$ durch passende Wahl der ξ_1 und ξ_2

beliebig vergrößert werden kann, so muß, da doch K'' endlich sein sollte, notwendig $\overset{+}{v} = \overset{-}{v}$ sein. Also: *Passiert ein Elektron den Bewegungszustand $a = 0$ mit Überlichtgeschwindigkeit und ist K'' endlich vorgeschrieben, so ist die Bewegung mit keiner andern als der unmittelbar vorher vorhandenen Geschwindigkeit fortsetzbar.*

Die hier gegebene Aufzählung und Besprechung der singulären Fälle ist nicht lückenlos. Haben wir doch den Fall, daß die Vorgeschichte durch C geht, ganz bei Seite lassen müssen, und ließ sich doch auch in einigen anderen Fällen die Diskussion nicht ganz zu Ende führen. Dennoch haben wir wohl eine gewisse vorläufige Übersicht gewonnen. Folgende Zusammenstellung möge unser Einteilungsprinzip noch einmal zur Anschauung bringen*):

Bewegung stets regulär.	Bewegung nicht dauernd regulär.

Bewegung bis zu einem bestimmten Zeitpunkt exkl. fortsetzbar ($K = 6m$).	Bewegung bis zu einem bestimmten Zeitpunkt inkl. fortsetzbar; dort Singularität und zwar:

Geschwindigkeit unendlich; $a = 0$.	Geschwindigkeit endlich; $a = 0$.

Bewegung weiter fortsetzbar.	Bewegung nicht weiter fortsetzbar.	Unterlichtgeschwindigkeit	Überlichtgeschwindigkeit
		Bewegung mit höchstens zwei Geschwindigkeiten fortsetzbar.	(wenn K'' endlich) nur Fortsetzung mit stetiger Geschwindigkeitsänderung.

Da auf den Fall: V_0 durch C, keine Rücksicht genommen ist, so sind alle singulären Fälle durch die Gleichung $a = 0$ ausgezeichnet. Der Fall, $K = 6m$, stellt nur dann eine Singularität dar, wenn die Beziehung

*) Es werde noch einmal daran erinnert, daß wir die Bewegungsvorgeschichte und den stetigen Kraftverlauf für die Folge als das Gegebene ansehn. Nur bei dieser Auffassung hat die nachstehende Zusammenstellung einen Sinn. Um die Möglichkeit der verschiedenen Typen zu beweisen, mußten wir allerdings gelegentlich umgekehrt von den Bewegungskurven ausgehen und zu ihnen die Kraftkurven suchen.

zur Zeit festgehalten wird. Achtet man dagegen auf die Nachgeschichtskurve allein, so hat man in jenem Fall eine unendlich ausgedehnte Kurve, die nirgends aufhört, und wenn man mit konstanter Geschwindigkeit über ihre Bogenlänge dahinschreitet, wird man nie zu einer Singularität kommen. Von diesem Gesichtspunkte aus wäre der Fall also den stets regulären zuzuordnen.

Die Extremalzüge stellen einen speziellen Fall der singulären Kurven $a = 0$ dar, doch haben wir sie durch unsere Beschränkung auf Kurven mit horizontalem Ausläufer ausgeschlossen. Die Gesamtheit der Kraftwerte, die zu Kurven mit horizontalem Ausläufer gehören, ist jedenfalls keine abgeschlossene Menge. Denn jede solche Kurve läßt sich, da sie kein Extremalzug ist, durch eine andere übertreffen. Eine asymptotische Annäherung durch Bewegungen aus der Ruhe heraus an das absolute Kraftmaximum ist keineswegs in so einfacher Weise möglich, wie an den Wert $6m$, sondern dürfte recht verwickelte Bewegungsvorgänge erfordern.

§ 7.

Unstetigkeit der äußeren Kraft.

Wie das Vorhandensein einer oberen Grenze für die Kraftwerte im Widerspruch mit dem Existenzsatze zu sein scheint, so hat man auch in der Unmöglichkeit der dauernd kräftefreien Überlichtgeschwindigkeit Schwierigkeiten zu finden geglaubt. Man hat dabei folgenden Fall ins Auge gefaßt*): Ein Elektron wird durch endliche Kräfte auf Überlichtgeschwindigkeit gebracht und dann *plötzlich* von dem Einflusse der äußeren Kraft befreit. Da das nunmehr kräftefreie Elektron sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann, so schien nur der einzige Ausweg offen, anzunehmen, daß das Elektron *plötzlich* auf Unterlichtgeschwindigkeit sinkt.

Bei näherer Betrachtung sehen wir jedoch, daß eine derartige Bewegung keine Lösung der gestellten Aufgabe bedeutet. Hatten wir doch im § 4 gezeigt, daß die innere Kraft sich immer stetig ändert, auch dann, wenn die Geschwindigkeit Unstetigkeiten unterworfen ist. Bei der geschilderten Bewegung können also äußere und innere Kraft nicht im Gleichgewicht sein, da jene unstetig, diese stetig ist, woran auch die Annahme eines Geschwindigkeitssprunges nichts ändern kann. Die Schwierigkeit liegt somit ganz allein an der unstetigen Wahl der äußeren Kraft, und wird auch bei jedem unstetigen Kraftverlauf eintreten, einerlei, ob

*) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1905, S. 201. Phys. Zeitschr. 7, 1906, S. 21. Jahresb. d. D. Mathem.-Vereinig. XV, S. 51. W. Wien, Phys. Zeitschr. 7, 1906, S. 16.

das Elektron Überlichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit besitzt.*)

Es sind also zunächst unstetige Kraftverläufe von vornherein auszuschließen, da sie zu unlösbaren Aufgaben führen. Das hindert uns jedoch nicht zu fragen, was geschieht, wenn der Kraftverlauf zwar nicht gerade unstetig, d. h. der Kraftanstieg *unendlich* groß, wohl aber der Kraftanstieg *sehr* groß angenommen wird; und weiter scheint es wünschenswert, zu untersuchen, ob nicht die Bewegungskurven, die solchen Kraftverläufen entsprechen, mit wachsender Steilheit des Kraftverlaufes gegen eine Grenzkurve konvergieren, die dann als Lösung zu jenem unstetigen Kraftverlauf angesehen werden dürfte.

Wir stellen den vorgegebenen unstetigen Kraftverlauf $K(t)$ in Kurvenform dar (Fig. 5). Die Zeit der Unstetigkeit werde dabei als Anfangspunkt 0 der Zeitrechnung gewählt. Kurz vorher besitze die Kraft den Wert $\bar{K}$, kurz nachher den Wert $\overset{+}{K}$. Wir denken uns ferner eine Menge $[\tau]$ von positiven Zahlen τ, die das Intervall von 0 bis zu einer positiven Zahl kontinuierlich erfüllen, und dieser Menge eine einparametrige Schar von Kurven $K^\tau(t)$ zugeordnet. Eine solche Kurve $K^\tau(t)$, in der Figur punktiert gezeichnet, soll überall mit $K(t)$ übereinstimmen, und nur im Intervalle 0 bis τ von ihr abweichen, indem sie hier in stetiger monotoner Weise den Übergang von $\bar{K}$ zu $K(\tau)$ vermittelt. Man hat also

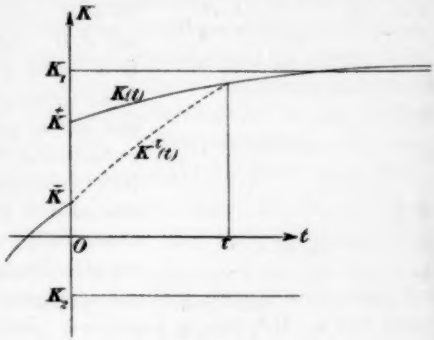


Fig. 5.

(63) $$K^\tau(\tau) = K(\tau),$$

und

(64) $$\lim_{\tau=0} K^\tau(\tau) = \lim_{\tau=0} K(\tau) = \overset{+}{K}.$$

τ nennen wir die Anomaliezeit und können, da zu jeder Anomaliezeit eine Bewegungskurve gehört, uns die Frage vorlegen, ob die Schar dieser Kurven gegen eine Grenzkurve konvergiert.

*) Dieser Sachverhalt wurde zuerst von J. Van der Waals jn. klargelegt: K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam Dez. 21, 1905. S. 477. Arch. Néerl. 1906. S. 296. Vgl. auch P. Hertz, Phys. Zeitschrift 7. 1906. S. 347.

Sei $OV = V_0$ (Fig. 6) die Vorgeschichtskurve zur Zeit 0 vor der Kraftunstetigkeit; sie sei regulär, so daß $\int\limits_{V_0} E dx \neq 0$ ist, endige in einen horizontalen Ast und verlaufe nirgends senkrecht. Diese Eigenschaften gestatten es, zwei ihr parallele durch Vertikalverschiebung nach beiden Seiten aus ihr erzeugte Kurven $Z_1 W_1$, $Z_2 W_2$ zu finden, so daß jede Kurve durch O in dem von ihnen umschlossenen Flächenraum ein von Null verschiedenes Integral a besitzt. Wir wählen eine Fläche Γ mit den Grenzen $(-YY)$; $(\overline{G}'G'W_1) = \gamma'$; $(\overline{G}''G''W_2) = \gamma''$, wo G' und G'' auf $Z_1 W_1$ und $Z_2 W_2$ liegen und $G'\overline{G}'$ und $G''\overline{G}''$ zwei in die vorhin definierte Fläche nicht eindringende Senkrechte sind. Γ kann und soll so gewählt werden, daß jeder in ihr verlaufenden, durch O gehenden Kurve ein von Null verschiedenes a zukommt.*) Sei α eine positive Zahl zwischen 0 und der unteren Grenze aller dieser a. Endlich sei Z ein variabler Punkt auf $(-YY)$, die Entfernung

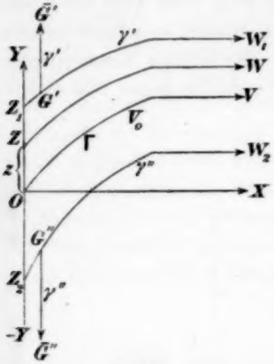


Fig. 6.

OZ (nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet) heiße z, und OZ_1 werde mit z_1, OZ_2 mit z_2 bezeichnet. Bedeutet ZW die aus OV durch senkrechte Translation entstandene Parallelkurve, so sind die zu der Kurve OZW gehörigen Integrale K, a, b reine Funktionen von z und mögen als solche $K(z)$, $a(z)$, $b(z)$ geschrieben werden. $K(z_1)$ heiße K_1, $K(z_2)$ heiße K_2. Wenn wir die oben erwähnte Konvergenz unter der Annahme als richtig erweisen, daß $\overset{-}{K}$ und $\overset{+}{K}$ zwischen K_2 und K_1 exklusive liegen, so heißt das, daß sie stattfindet, sobald die Größe des Kraftsprunges eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Wir legen nun in der Tat jene Annahme dem folgenden zugrunde.

Da es auf die Konvergenz bei Annäherung von τ an 0 ankommt, darf die Anomaliezeit rücksichtlich ihrer Größe verschiedenen Einschränkungen unterworfen werden.

I) kann und soll τ so klein gewählt werden, daß $\overset{-}{K}$ und $K(\tau)$ und damit auch alle $K^\tau(t)$ für t von 0 bis τ (Fig. 5), sich von K_2 und K_1 um mehr als eine feste Größe unterscheiden, die im folgenden unverändert beibehalten wird und δ heißen möge.

---

*) Man zeigt leicht nach der Schlußbemerkung von § 2 (S. 21), daß das Integral $\int \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| do$ zwischen zwei sich nähernden senkrechten Geraden unendlich klein gemacht werden kann, auch wenn der Punkt O auf oder zwischen ihnen liegt.

Betrachten wir die Gesamtheit aller Kurven, die von irgend einem Punkte der Geraden $(-YY)$ ins Gebiet der positiven x gezogen werden können, ohne abnehmende Abszissen zu besitzen. Aus dem Stokesschen Satze und der nach (23) und (27) (S. 14 u. 15) leicht festzustellenden Endlichkeit des Integrales $\int \left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| do$ folgt, daß die Gesamtheit der über sie erstreckten Integrale $\int E dy$, jedes Integral von ihrem Schnittpunkte mit $(-YY)$ an genommen, dem absoluten Werte nach unter einer oberen Grenze bleibt. Sei $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl größer als diese.

Hieraus folgt eine bemerkenswerte Eigenschaft von $\mathfrak{L}$. Sei OV^p eine beliebige Vorgeschichtskurve, die mit einer beliebigen Nachgeschichtskurve verbunden werde und mit ihr zusammen ϑ Zeiteinheiten lang „durch O hindurchgeschoben werde". Diese Verschiebung, die zu der Vorgeschichtskurve OV^p_ϑ führen möge, läßt sich in eine endliche vertikale und in eine endliche horizontale Verschiebung zerlegen. Die Vertikalverschiebung soll zuerst vorgenommen werden. Sie führe den Anfangspunkt O der OV^p nach Z^p_ϑ und OV^p in die Parallelkurve $Z^p_\vartheta W^p_\vartheta$. Hierauf findet die Horizontalverschiebung statt, wodurch $Z^p_\vartheta W^p_\vartheta$ mit ihrer nach links gerichteten Fortsetzung nach OV^p_ϑ geschoben wird. Wir untersuchen nun die Änderung von K bei dieser letzten Verschiebung und finden, daß

$$\left|K_{oz^p_\vartheta w^p_\vartheta} - K_{ov^p_\vartheta}\right| < m\mathfrak{B}\vartheta$$

ist.

Diese Eigenschaft der Größe $\mathfrak{B}$ ist später zu benutzen. Einstweilen unterwerfen wir die Anomaliezeit τ der Bedingung

$$\text{II)} \quad \tau < \frac{\delta}{2\mathfrak{B}m}.$$

Da $a(z)$ im Intervalle $z = z_1$ bis $z = z_2$ von Null verschieden ist, so ist die Funktion $K(z)$ eine monotone Funktion, die stetig von K_2 zu K_1 überleitet. Da wegen der Bedingung I) $K_2 - K_1 > \delta$ ist, so gibt es zwei und nur zwei Werte z_3 und z_4 im Intervalle z_1 bis z_2, derart, daß die Funktionen $K(z_3)$ resp. $K(z_4)$ gerade um $\frac{\delta}{2}$ von K_1 resp. K_2 abweichen. Seien Z_3 und Z_4 Punkte auf $(-YY)$ mit den Ordinaten z_3 und z_4, und betrachten wir die Gesamtheit der Kurven ZW (Fig. 6), deren Z zwischen diesen Punkten liegt. Jede dieser Kurven mag durch eine ganz beliebige Fortsetzung im Gebiete der negativen x verlängert sein; eine so verlängerte Kurve wird bei einer horizontalen Translation zunächst noch in Γ verbleiben und erst aus Γ teilweise herausfallen, wenn die horizontale Verschiebung eine gewisse Größe erreicht hat. Man kann nun eine Zahl h angeben, derart, daß jede beliebige Kurve unserer Gesamtheit, mit jeder

beliebigen Verlängerung im Gebiete der negativen x ausgestattet, bei jeder horizontalen Translation, die kleiner als h ist, ganz in Γ verbleibt. Eine solche Wahl von h wäre nicht möglich, wenn OV irgend eine senkrechte Tangente hätte. Sei nun

$$\text{III)} \quad \tau < h.$$

Nach diesen Einschränkungen für die Anomaliezeit τ betrachten wir die von einem Kraftverlauf $K^\tau(t)$ hervorgerufene Bewegung. Sie läßt die Vorgeschichtskurve V_0 in eine Schar von Kurven V_t^τ übergehen. Dabei muß, ehe die Bewegung aufhört regulär zu werden, erst die entsprechende V_t^τ das Gebiet Γ verlassen haben. Wir behaupten nun, daß für kein τ und kein $t < \tau$ die V_t^τ das Gebiet Γ verlassen kann. Nehmen wir zum Beweise das Gegenteil an, daß nämlich für ein bestimmtes τ ein solches Verlassen des Gebietes Γ möglich wäre. Dann bedenken wir, daß man die V_t^τ aus V_0 erhalten kann, indem man ihr eine gewisse Nachgeschichtskurve N_0 anhängt und dann eine endliche Vertikalverschiebung und eine endliche Horizontalverschiebung ausführt. Betrachten wir bei demjenigen τ, bei dem ein Verlassen von Γ vorkommen sollte, die zu allen V_t^τ gehörigen Vertikalverschiebungen. Von diesen müssen einige den Punkt O der OV über das Intervall $Z_3 Z_4$ hinausführen, denn im andern Falle könnte wegen der Bedingung III) kein Verlassen von Γ eintreten. Es gäbe somit auch eine Vertikalverschiebung, die den Punkt O der OV gerade entweder nach Z_3 oder Z_4 bringt. Behalten wir diese im Auge; um zu der zugehörigen V_t^τ zu gelangen, ist noch eine Horizontaltranslation erforderlich. Nun ist nach Definition das der Kurve $OZ_3 W_3$ oder $OZ_4 W_4$ zugehörige K gerade um $\frac{\delta}{2}$ von K_1 resp. K_2 entfernt. Andererseits besitzt die V_t^τ nach II) ein K, welches um weniger als $\frac{\delta}{2}$ von dem K der $OZ_3 W_3$ resp. $OZ_4 W_4$ entfernt ist, also um weniger als δ von K_1 resp. K_2. Doch das steht im Widerspruch mit unserer Forderung I) an die τ, so daß sich die Annahme, die V_t^τ könnten das Gebiet Γ verlassen, als irrig erwiesen hat. Somit geben die Kraftverläufe $K^\tau(t)$ sämtlich zu Bewegungen Anlaß, die bis zur Zeit τ regulär definiert sind, endliche Geschwindigkeiten besitzen und deren Vorgeschichtskurven V_t^τ das Gebiet Γ nicht verlassen, und daher, wie geometrisch leicht folgt, auch dauernd im Gebiet $W_1 Z_1 Z_2 W_2$ bleiben müssen.

Indem wir die dem Kraftverlauf $K^\tau(t)$ zukommenden Funktionen a, b, v mit $a^\tau(t)$, $b^\tau(t)$, $v^\tau(t)$ schreiben, haben wir nach (37) (S. 33)

$$\frac{1}{m}\int_0^\tau K'^\tau(t)\,dt = \int_0^\tau a^\tau(t)\,v^\tau(t)\,dt + \int_0^\tau b^\tau(t)\,dt,$$

oder wenn β eine Zahl größer als das Maximum aller b ist, die von Kurven durch O in Γ erzeugt werden, und η eine Zahl zwischen -1 und $+1$ bedeutet, unter Berücksichtigung von (63) (S. 49)

$$\frac{1}{m}\left\{K(\tau)-\bar{K}\right\}=\int_0^\tau a^\tau(t)\,v^\tau(t)\,dt+\eta\cdot\beta\cdot\tau.$$

Hieraus und aus (64) folgt

$$m\lim_{\tau=0}\int_0^\tau a^\tau(t)\,v^\tau(t)=\overset{+}{K}-\bar{K}. \tag{65}$$

Wir führen nun außer den Funktionen $a^\tau(t)$, $b^\tau(t)$, $v^\tau(t)$ die Funktion $z^\tau(t)$ ein. Diese definieren wir durch die Gleichung

$$z^\tau(t)=\int_0^t v^\tau(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{66}$$

oder in Worten: $z^\tau(t)$ ist diejenige Ortsveränderung, die das Elektron unter dem Einflusse des Kraftverlaufes $K^\tau(t)$ in der Zeit von 0 bis t erlitten hat, und zugleich diejenige Größe, um die V_t^τ gegen V_0 senkrecht verschoben ist. Aus dieser seiner letzten Eigenschaft folgt

$$a^\tau(t)=a\{z^\tau(t)\}+\varepsilon^\tau(t), \tag{67}$$

wo $a(z)$ die bereits auf S. 50 definierte Funktion bedeutet, nämlich das Integral $\int\limits_{0zw}E\,dx$, und $\varepsilon^\tau(t)$ nach (38) (S. 33) mit abnehmendem τ unabhängig von t gegen Null konvergiert. Nun ist

$$v_t^\tau=\frac{\frac{1}{m}K'^\tau(t)-b^\tau(t)}{a^\tau(t)},$$

also

$$|a^\tau(t)|\;|v^\tau(t)|<\frac{1}{m}\,|K'^\tau(t)|+\beta;$$

daher ist

$$\int_0^\tau |a^\tau(t)|\;|v^\tau(t)|\,dt$$

und darum auch

$$\int_0^\tau |v^\tau(t)|\,dt$$

— auch mit unbegrenzt abnehmendem τ — endlich.

Hieraus, aus (65) und (67) und der Konvergenz von $\varepsilon^\tau(t)$ gegen Null, folgt

$$m\lim_{\tau=0}\int_0^\tau a\{z^\tau(t)\}\,v^\tau(t)\,dt=\overset{+}{K}-\bar{K} \tag{68}$$

oder nach (66)

$$m \lim_{\tau=0} \int_0^\tau a\{z^\tau(t)\} \frac{dz^\tau(t)}{dt}\, dt = \overset{+}{K} - \bar{K}.$$

Führen wir $z^\tau(t)$ als Integrationsvariable ein, so läßt sich diese Gleichung schreiben

$$m \lim_{\tau=0} \int_0^{z^\tau(\tau)} a(z)\, dz = \overset{+}{K} - \bar{K},$$

wo, weil die V_t^τ das Gebiet $W_2 Z_2 Z_1 W_1$ nicht verlassen, $z^\tau(\tau)$ zwischen z_1 und z_2 liegt. Da $a(z)$ in diesem Intervall nicht verschwindet, so ergibt die obige Gleichung, daß ein Lim $z^\tau(\tau)$ vorhanden sein muß, und daß, wenn

(69) $$\lim_{\tau=0} z^\tau(\tau) = s$$

gesetzt ist,

(70) $$m \int_0^s a(z)\, dz = \overset{+}{K} - \bar{K}.$$

ist.

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von s bei gegebener Kraftunstetigkeit. Die Größe s hat eine einfache physikalische Bedeutung: sie stellt nach (69) den Grenzwert dar, dem die in der Anomaliezeit erhaltene Ortsänderung des Elektrons bei verschwindender Anomaliezeit zustrebt.

Fig. 7.

Es liegt nahe zu fragen, was geschieht, wenn man die Vorgeschichtskurve direkt um s senkrecht verschiebt. Figur 7 zeigt die Kurve $OV = V_0$ und ihr parallel SW_s. Bei dieser Parallelverschiebung ist K um $m\int E do$ gewachsen, wobei das Integral über den — in der Figur schraffierten — Raum zwischen OV und SW_s zu erstrecken ist. Dieses Integral ist aber, wegen $\int E dx = a$, nichts anderes als das Integral $m \int_0^s a(z)\, dz$, oder nach (70) $= \overset{+}{K} - \bar{K}$. Nehmen wir also eine instantane Ortsänderung des Elektrons um s vor, so können wir zu negativen sowohl als positiven Zeiten der äußeren Kraft durch die innere das Gleichgewicht halten.

Wir sind somit zu einer unstetigen Bewegungskurve für das Elektron gelangt, die für $t = 0$ den Sprung von 0 auf s macht, und einer Schar von stetigen Kurven $z^\tau(t)$, derart daß $\lim_{\tau=0} z^\tau(t) = s$ ist. Die Kurvenschar $z^\tau(t)$ verhält sich der unstetigen Kurve gegenüber in dieser Beziehung,

wie die Schar der $K^\tau(t)$ zu der Kurve $K(t)$. Zwar sind jene nicht notwendig monoton; es läßt sich aber zeigen, daß das Maximum, um das diejenigen ihrer Ordinaten, die außerhalb des Intervalles 0 bis s liegen, sich von den Ordinaten 0 und s unterscheiden können, mit abnehmendem τ beliebig abnimmt. Sei, um die Ideen zu fixieren, etwa $\overset{+}{K} > \overset{-}{K}$ und $s > 0$, wie in unseren Figuren. Da $v^\tau(t) = \dfrac{\frac{1}{m} K'^{\tau}(t) - b^\tau(t)}{a^\tau(t)}$ ist, und $K'^\tau(t)$ wegen der vorausgesetzten Monotonität zwischen 0 und $+\infty$ liegt, so ist, falls $v^\tau(t)$ negativ ist, $|v^\tau(t)| < \frac{\beta}{\alpha}$ und die Kurve $s^\tau(t) = \int_0^t v^\tau(\vartheta)\, d\vartheta$ kann nicht unter $-\frac{\beta}{\alpha}\tau$ sinken, wo für α und β die Definitionen auf S. 50 und 53 gelten. Ähnlich folgt, daß sie von einer gewissen Kleinheit der τ ab nicht über $s + \frac{\beta}{\alpha}\tau$ wachsen kann. Da der horizontale Abstand einer solchen Kurve $s^\tau(t)$ von der unstetigen Kurve τ beträgt, also ebenfalls mit τ verschwindet, so kann man sich so ausdrücken, daß jene die stetige Bewegungen des Elektrons darstellenden Kurven geometrisch gegen die unstetige Kurve konvergieren. Übrigens kann man den unstetigen Kurven, der Bewegungskurve sowohl als auch der Kraftkurve, durch einen hinzugefügten vertikalen Zug geometrisch ihre Unstetigkeit nehmen. Wir sind somit zu folgendem Satz gelangt:

Wenn ein regulärer Bewegungszustand vorliegt, so läßt sich um den momentan vorhandenen Kraftwert ein endliches Intervall von Kraftwerten abgrenzen. Wird innerhalb dieses Intervalles ein Sprung der äußeren Kraft vorgeschrieben, so kann diesem unstetigen Kraftverlauf dann und nur dann das Gleichgewicht gehalten werden, wenn der Ort des Elektrons eine Unstetigkeit erleidet. In dem betreffenden Intervall sind Größe des Kraftsprunges und des Ortssprunges einander eineindeutig stetig zuzuordnen. Wird ein Kraftsprung durch eine Schar stetiger monotoner Kraftverläufe angenähert, die sich um eine immer kleiner werdende Zeit, die Anomaliezeit, von ihm unterscheiden, und konstruiert man zu jedem Gliede der Schar die zugehörige Bewegungskurve, so erhält man eine Schar von Bewegungskurven, welche gegen die Kurve der unstetigen Bewegung konvergiert, so daß insbesondere die in der Anomaliezeit erlittene Ortsänderung mit abnehmender Anomaliezeit gegen jenen Ortssprung konvergiert.

Hiernach kann die Zweckmäßigkeit unserer Ausdrucksweise nicht in Zweifel gezogen werden, wenn wir jenen unstetigen Vorgang geradezu als Lösung des Problems mit unstetigem Kraftverlauf auffassen. Daß eine solche Lösung nicht bei jedem Kraftsprung gefunden werden kann, vielmehr die Beschränkung auf ein Kraftintervall auch notwendig war, folgt

schon aus dem Vorhandensein einer oberen Grenze für die Kraft. Wir hatten angenommen, daß V_0 nirgends senkrechte Tangenten oder endliche senkrechte Stücke besitzt. Sollte das doch der Fall sein — also haben z. B. früher einmal Kraftsprünge stattgefunden —, so läßt sich der Beweis mit geringen Änderungen beibehalten.

Wir wollen zu unserm Ausgangspunkt zurückkehren. Ein Elektron, das sich dauernd mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt hat, werde plötzlich von seiner äußeren Kraft befreit. Dann ändert es plötzlich seinen Ort. Daß in diesem Falle eine Unstetigkeit überhaupt stattfinden muß, läßt sich auch aus dem Satze von der Unmöglichkeit der dauernd kräftefreien Überlichtgeschwindigkeitsbewegung erschließen. Denn dieser Satz wäre verletzt, wenn sich die Bewegung ohne jede Unstetigkeit fortsetzen ließe. Dieser Zusammenhang wurde von A. Sommerfeld erkannt. Nicht aber können wir aus jenen Überlegungen Aufschluß über die Art der Unstetigkeit gewinnen. Insbesondere ist es unrichtig anzunehmen, daß nach Beseitigung der Kraft notwendig Unterlichtgeschwindigkeit herrschen müsste. Denn der Vorgang während der Anomaliezeit, wenn auch unendlich rasch, ist schon als Unterbrechung der dauernden Überlichtgeschwindigkeit anzusehen. Daher kann nach dem Sprunge wieder Überlichtgeschwindigkeit auftreten.

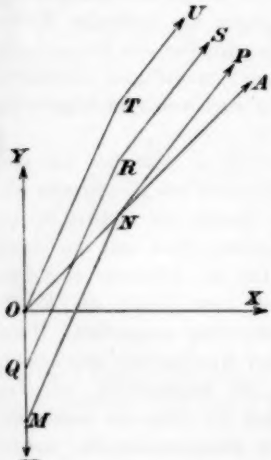


Fig. 8.

Bilden wir ein Beispiel: M auf $(-YO)$ (Fig. 8) und N auf OA seien so gewählt, daß im Dreieck ONM durchweg $E > 0$ ist, dann ist $K_{OMNA} < 0$ und bei genügend kleiner Wahl des Winkels PNA, dessen einer Schenkel oberhalb von OA liege, auch $K_{OMNP} < 0$. Ferner machen wir OTU parallel MNP, und haben $K_{OTU} > 0$; aus Gründen der Stetigkeit gibt es also eine ihr parallele QRS, so daß $K_{OQRS} = 0$ ist. Sei jetzt OTU die Vorgeschichte des zu betrachtenden Elektrons, das also dauernd Überlichtgeschwindigkeit besessen hat. Wird dann die äußere Kraft plötzlich entfernt, so geht die Vorgeschichtskurve instantan in $OQRS$ über. Die Geschwindigkeit, mit der sich das Elektron nach dem Sprunge weiter bewegt, ist $\frac{-\int E dy}{\int E dx}$, muß also, da längs QRS stets $E > 0$ und $dy > dx$ ist, absolut genommen > 1 sein. Wir haben somit ein Beispiel für folgenden Vorgang gefunden:

Ein Elektron hat sich dauernd mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt. Plötzlich wird die Kraft entfernt; es ändert plötzlich seinen Ort, und bewegt sich unmittelbar nach der Unstetigkeit mit Überlichtgeschwindigkeit.

§ 8.

Flächenladung.

Da eine flächenhafte Ladungsverteilung als Grenzfall einer sehr dichten über eine sehr dünne Schicht ausgebreiteten Volumenladung angesehen werden kann, so darf es nicht wundernehmen, daß die Annahme der *gleichförmigen Oberflächenladung* in bezug auf Stetigkeitsfragen zu wesentlich anderen Ergebnissen führt als die bisher zugrunde gelegte.

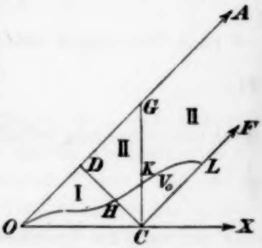


Fig. 9.

Die Figur 9, die wir bei der Behandlung dieses Falles benutzen, entspricht der früher gebrauchten (Fig. 1); doch können die Gebiete III und IV fortfallen, da nach A. Sommerfeld*) ein flächenhaft geladenes Elektron durch keine endliche Kraft auf Überlichtgeschwindigkeit gebracht werden kann.

Sei CG das Lot in C auf OX; $\bar{x}$ die Abszisse von C aus gerechnet, also $\bar{x} = x - 2$, seien H, K, L die Schnittpunkte der Vorgeschichtskurve V_0 mit CD, CG, CF oder mit deren Verlängerungen im Gebiete der negativen y, seien ferner y_1 und y_2 die Ordinaten von H und L, und endlich

$$\bar{m} = \frac{\varepsilon^2}{16\pi}, \tag{71}$$

so ist nach A. Sommerfeld**)

$$\frac{1}{\bar{m}} K = \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) ln \frac{1+v}{1-v} + \frac{2}{v} + ln \frac{y_1}{y_2} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{\bar{x}}{y^2}\, d\bar{x},$$

wo die Integration über das Stück der Vorgeschichtskurve zwischen HL zu erstrecken ist. Wir führen zur Abkürzung ein

$$\Phi(v) = \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) ln \frac{1+v}{1-v} + \frac{2}{v} \tag{72}$$

*) Göttinger Nachrichten 1904, S. 387.
**) Göttinger Nachrichten 1904, S. 397.

und schreiben demnach

$$\frac{K}{m} = \Phi(v) + ln\,\frac{y_1}{y_2} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{\bar{x}}{y^2}\,d\bar{x}. \tag{73}$$

Dabei kann OV entweder in II oder in II', dem Spiegelbild von I an OX, verlaufen. Wegen der Unmöglichkeit der Überlichtgeschwindigkeit ist der Fall ausgeschlossen, daß OV sowohl in II als auch in II' eindringt.

Beachtung verdient der Fall, daß HL geradlinig ist. Nennen wir $\hat{v}$ den Tangens des von HL und OX gebildeten Winkels, so ist in diesem Falle

$$\bar{x} = \frac{1}{\hat{v}}\{y - y_1 - \hat{v}y_1\}; \quad \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} = \hat{v},$$

und nach (73) ergibt sich

$$\frac{K}{m} = \Phi(v) - \Phi(\hat{v}). \tag{74}$$

Durch Grenzübergang erhalten wir hieraus für den Fall, daß V_0 durch C geht,

$$\frac{K}{m} = \Phi(v) - \Phi(\hat{v}),$$

wo $\hat{v}$ die vor zwei Zeiteinheiten vorhandene Geschwindigkeit bedeutet. Ist diese $= v$, so wird $K = 0$ oder in Worten: Besitzt ein flächenhaftes Elektron dieselbe Geschwindigkeit und nimmt es denselben Ort ein, wie vor zwei Zeiteinheiten, so bedarf es zur Aufrechterhaltung seiner Bewegung keiner äußeren Kraft. Und hieraus folgt weiter: *Eine ganz beliebige periodische Translationsbewegung eines flächenhaft geladenen Elektrons mit der Schwingungszeit: Elektronendurchmesser dividiert durch Lichtgeschwindigkeit, d. h. eine Bewegung, bei der sich die Lagen des Elektrons nach einer solchen Zeit wiederholen, kann sich ohne äußere Kraftwirkung vollziehen.* Die hier geschilderten longitudinalen Schwingungen sind als ein Vibrieren des Elektrons zu bezeichnen. Dabei besitzen die größtmöglichen Elongationen die Länge des Elektronenradius, weil Überlichtgeschwindigkeit bei Flächenladung nach den Untersuchungen des Herrn A. Sommerfeld ausgeschlossen ist.

Wir wollen jetzt fragen, zwischen welchen Grenzen die äußere Kraft enthalten ist. Für diese Untersuchung formen wir das Kurvenintegral in (73) in ein Flächenintegral um und schreiben

$$\frac{K}{m} = \Phi(v) - 2\int \frac{do\,\bar{x}}{y^3}, \tag{75}$$

wo das Integrationsgebiet von HL und einer beliebigen Horizontalen zwischen diesem Kurvenstück und C begrenzt wird.

Es ist nötig, die Funktion Φ zu diskutieren. Wir bemerken, daß $\Phi(-v) = -\Phi(v)$, daß $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(1) = 2$ ist. Ferner ist

$$\frac{d\Phi}{dv} = -\frac{4}{v^2} + \frac{2}{v^3}\, ln\, \frac{1+v}{1-v}. \tag{76}$$

Diese Funktion ist gerade, hat an der Stelle 0 den Wert $\frac{4}{3}$ und ist, wie aus ihrer Reihenentwicklung hervorgeht, im Intervalle -1 bis $+1$ durchweg positiv und $\geqq \frac{4}{3}$. Mithin ist $\Phi(v)$ eine im Intervalle -1 bis $+1$ eindeutige und umkehrbare Funktion. Bezeichnet man die inverse Funktion mit Ψ, so ist Ψ eine im Intervall -2 bis $+2$ monoton wachsende Funktion, deren Ableitung

$$\Psi' \leqq \frac{3}{4}$$

ist, und (75) kann geschrieben werden:

$$v = \Psi\left(\frac{K}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do\right). \tag{77}$$

Sei nun der Schnittpunkt K der Vorgeschichtskurve $V_0 = OL$ mit CG gegeben, und weiter bekannt, daß während der ganzen Vorgeschichte die Geschwindigkeit absolut kleiner als eine gegebene v^* war, und werde gefragt, welche diesen Bedingungen genügende Vorgeschichte den absolut größten Wert der äußeren Kraft liefert. (75) zeigt, daß die gesuchte Vorgeschichtskurve im Gebiete der positiven $\bar{x}$ ein möglichst großes, im Gebiete der negativen $\bar{x}$ ein möglichst kleines Integrationsgebiet umspannen muß, oder umgekehrt, also zwischen H und L geradlinig verläuft. Man findet daher nach (74) als extremale Werte der Kraft

$$K = \bar{m}\,\{\Phi(v^*) - \Phi(-v^*)\} = 2\,\bar{m}\,\Phi(v^*),$$

denn einen extremalen Kraftwert erhält man, wenn $\hat{v} = -v$ ist. Da v^* jeden Wert zwischen -1 und $+1$ annehmen kann, und $\Phi(1) = 2$ ist, ergibt sich nach (71) (S. 57):

Die Gesamtheit der möglichen äußeren Kräfte ist zwischen den Grenzen $-\frac{\varepsilon^2}{4\pi}$ *und* $+\frac{\varepsilon^2}{4\pi}$ *enthalten. Die Grenzen selbst können nur unter Zuhilfenahme der Lichtgeschwindigkeit erreicht werden, wenn diese Geschwindigkeit zu zwei um zwei Zeiteinheiten getrennten Zeitpunkten in entgegengesetzter Richtung angenommen wird.*

Es fragt sich, ob innerhalb dieser Grenzen jedem Kraftverlauf eine Bewegung entspricht. Wir nehmen eine Anfangsvorgeschichte an und setzen voraus, *daß die ihr entsprechende Kurve nicht durch C geht, und daß in der Gegenwart Unterlichtgeschwindigkeit herrscht.* Weiter nehmen wir die äußere Kraft zunächst stetig an. Es ist dann nach (72) und (75)

$$\left|\frac{K(0)}{\bar{m}} + \int \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do\right| < 2.$$

Wir können also V_0 mit einem Schutzgebiete Γ so umgeben und eine Zahl τ so klein wählen, daß für alle Kurven in Γ und alle $t \leqq \tau$

$$\left| \frac{K(t)}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do \right| < 2$$

ist. Ferner konstruieren wir die unendliche Reihe der Funktionen:

$$\begin{aligned}
v^{(1)}(t) &= v_0,\\
\bar{a}^{(1)}(t) &= \int\limits_{V^{(1)}} \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do,\\
v^{(2)}(t) &= \Psi\left\{\bar{a}^{(1)}(t) + \frac{K(t)}{m}\right\},\\
&\vdots\\
\bar{a}^{(n)}(t) &= \int\limits_{V_t^{(n)}} \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do,\\
v^{(n+1)}(t) &= \Psi\left\{\bar{a}^{(n)}(t) + \frac{K(t)}{m}\right\}.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch, daß Ψ' im Intervalle -2 bis $+2$ eine obere Grenze besitzt, so können wir unsere frühere Beweismethode nahezu unverändert beibehalten und Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis führen. Abgesehen also von dem noch nicht genügend untersuchten Falle, daß V_0 durch C geht, läßt sich behaupten:

Herrscht Unterlichtgeschwindigkeit und ist die äußere Kraft stetig vorgeschrieben, so kann die Bewegung eine endliche Zeit auf eine und nur eine Weise festgesetzt werden.

Auch Unstetigkeiten im Kraftverlauf sind zulässig und ziehen Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit, nicht der Lage des Elektrons nach sich. Doch ist eine Lösung nur möglich, wenn die äußere Kraft $\overset{+}{K}$ nach dem Sprunge der Ungleichung

$$\left| \frac{\overset{+}{K}}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^3}\, do \right| \leqq 2$$

genügt.

Da, wie wir sahen, die möglichen äußeren Kräfte in endliche Grenzen eingeschlossen sind, so muß es Kraftverläufe geben, bei denen die Bewegung singulär wird. Da aber andererseits bei Unterlichtgeschwindigkeit die Bewegung stets fortgesetzt werden kann, so können diese Singularitäten nur beim Erreichen der Lichtgeschwindigkeit auftreten. Hierfür läßt sich ein einfaches Beispiel angeben. Es werde angenommen, daß die Vorgeschichtskurve in II und zum Teil noch in I geradlinig verläuft. Bei einer Durchschiebung durch 0 wird dann zunächst immer noch der in II

enthaltene Teil der Kurve geradlinig sein und die Bewegungsgleichung eben so lange von der Form sein:

$$v = \Psi\left(\frac{K}{m} + \text{Constans}\right).$$

Da Ψ nur im Intervalle -2 bis $+2$ definiert ist, *gibt es also Kraftverläufe, die das Elektron auf Lichtgeschwindigkeit führen, aber von diesem Augenblicke an keine Bewegung mehr definieren.*

Unter der Annahme gleichförmiger Volumenladung fanden wir zwar ein Beispiel dafür, daß eine Bewegung nur bis zu einem gewissen Zeitpunkt inkl. fortgeführt werden kann und dort unendlich wird; dafür aber, daß die Bewegung bis zu einem gewissen Zeitpunkt inkl. mit *endlicher* Geschwindigkeit fortgeführt werden kann und nicht über diesen hinaus, wurde kein Beispiel aufgefunden. Ob es ein solches gibt, ist fraglich. Im Falle der Flächenladung haben wir soeben einen solchen Vorzug aufgezeigt. In Stetigkeitsfragen treten gleichfalls zwischen den Fällen der Volumenladung und Flächenladung bedeutende Unterschiede auf, zu deren Veranschaulichung die folgende Zusammenstellung diene:

	Volumenladung	**Flächenladung**
K unstetig	Ortssprung	v unstetig
K stetig, K' unstetig	v unstetig	v stetig, v' unstetig.

II. Teil.

Unendlich kleine Geschwindigkeiten.

(Integralgleichungen mit zwei variabeln Grenzen konstanter Differenz.)

Wir wollen uns im zweiten Teile der Betrachtung eines besonderen Falles zuwenden, indem wir annehmen, daß die Geschwindigkeit des Elektrons stets klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Durch diese Einschränkung gelangen wir zu einer wesentlich vereinfachten Theorie, deren weiterer Ausbau sich von drei Standpunkten aus rechtfertigen läßt.

Vom *rein physikalischen* Standpunkte aus kann man suchen, aus den Schwingungen, zu denen jene Theorie sofort führt, gewisse Anhaltspunkte für die Erklärung der Serienspektren zu gewinnen. Zwar kommen den von uns zu behandelnden Schwingungen Wellenlängen von ganz anderer Größenordnung zu, als bei den Spektren auftreten, dennoch vermutet A. Sommerfeld*) Analogien zwischen jenen mathematisch gut be-

*) Göttinger Nachrichten 1904, S. 436. Verhandl. des 3. intern. Math.-Kongr. 1905, S. 436.

kannten Schwingungen und den hypothetischen der Physik. Als sicherstes Ergebnis dürfte aber wohl noch gelten, daß an der Erzeugung des sichtbaren Spektrums mehr als ein Elektron im Molekül beteiligt sein muß.

Vom *mathematisch-physikalischen* Standpunkte aus ist zu hoffen, daß man durch Betrachtung jenes vereinfachten Falles weitere Aufschlüsse darüber erhält, wie die Probleme der Elektronenmechanik in eindeutiger und lösbarer Weise zu stellen sind, d. h. ob nicht auch unter anderen als den im ersten Teile gestellten Bedingungen ein eindeutiges Entsprechen von Kraft und Bewegung stattfindet. Die hiermit zusammenhängenden Fragen wurden bereits in der allgemeinen Einleitung erwähnt.

Vom *rein mathematischen* Standpunkte dürften jene Eindeutigkeits- und Existenzfragen ebenfalls wichtig sein, da sie gleichzeitig eine ganze Klasse von Integralgleichungen betreffen. Wir werden diese Integralgleichungen in zunächst ganz allgemeiner Form ohne Rücksicht auf die Elektronentheorie behandeln, wodurch die Entwickelungen in keiner Weise umständlicher werden, wenn sie auch etwas von ihrer Anschaulichkeit einbüßen sollten. Nachher wird selbstverständlich die Anwendung auf die Elektrodynamik gegeben. Von den sogenannten Integralgleichungen zweiter Art, die besonders J. Fredholm*), D. Hilbert**) und E. Schmidt***) untersucht haben, unterscheiden sich unsere Gleichungen durch die Veränderlichkeit der Grenzen; sie lassen sich jedoch in der Form jener Integralgleichungen schreiben, wenn man $-\infty$ und $+\infty$ als Grenzen zuläßt. Von den in den ersten Arbeiten D. Hilberts bevorzugten Gleichungen unterscheiden sie sich außerdem noch durch die Unsymmetrie des Kernes. Aus diesen Unterschieden lassen sich andere bedeutende Abweichungen begreifen. Eine homogene Integralgleichung mit festen Grenzen und symmetrischem Kern besitzt nur eine endliche Anzahl von Lösungen, dagegen gibt es eine ganze Schar von kräftefreien Bewegungen eines Elektrons — die Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit und die von G. Herglotz entdeckten Schwingungen, von denen die letzteren allerdings in negativ unendlichen Zeiten unendlich große Geschwindigkeiten besitzen.

Ob man nach der Forderung endlicher Geschwindigkeiten für sehr große negative Zeiten, außer den gleichförmigen Bewegungen, nur eine endliche Zahl von Lösungen oder gar keine übrig behält, und dadurch zu einer größeren Übereinstimmung mit der Theorie der Integralgleichungen mit festen Grenzen gelangt, war ich leider nicht imstande zu entscheiden.

*) Acta mathem. 27, 1903.

**) Gött. Nachr. 1904, 1905, 1906.

***) Erhard Schmidt: Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissertation Göttingen 1905. Math. Ann. Bd. 63.

Es ist dies im wesentlichen dieselbe Frage, auf deren Wichtigkeit schon vom mathematisch-physikalischen Standpunkte hingewiesen wurde.*) Endlich sei noch bemerkt, daß die kräftefreien Elektronenbewegungen nicht den Lösungen entsprechen, die E. Schmidt bei unsymmetrischen Kernen Eigenfunktionen nennt.**)

Von größtem Werte für die von uns betrachteten Integralgleichungen sind die Untersuchungen V. Volterras***) über Integralgleichungen mit einer variabeln Grenze. Neben einem unabhängigen Wege, der uns zur Lösung unserer Gleichungen führt, werden wir auch zeigen, daß sie als besonderer Fall der von Volterra untersuchten aufgefaßt werden können, und werden so auf einem neuen Wege die bereits erhaltenen Ergebnisse bestätigen.

Unser Hauptresultat besteht in der Auffindung einer Schar von Lösungen — im Falle der Elektronentheorie entstehen sie, geometrisch gesprochen, durch Translation auseinander —, aus denen sich durch Superposition die allgemeine Lösung zusammensetzen läßt.

§ 9.

Ableitung der Grundgleichungen für unendlich kleine Geschwindigkeiten.

Sind die Geschwindigkeiten des Elektrons stets sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so verläuft die Vorgeschichtskurve in großer Nähe der Abszissenachse. In dieser Gegend kann näherungsweise (16) (S. 13) durch

$$E = 4(2 - x^2) \tag{78}$$

und in (29) (S. 29) do durch $y\,dx$ ersetzt werden, so daß für die auf das Elektron wirkende Kraft die Gleichung gilt:

$$K = 4m\int_0^2 (2 - x^2)\, y\, dx. \tag{79}$$

Hier bezeichnet $y(x)$ die Vorgeschichtsfunktion, die nur für das Intervall $x = 0$ bis $x = 2$ bekannt zu sein braucht.

---

*) Sie läßt sich aber entscheiden, wenn die Hypothese des § 16 angenommen wird, oder wenn sich die dort gefundenen Entwicklungen nachträglich verifizieren lassen (Zusatz bei der Korrektur).

**) l. c. S. 22.

***) Linc. Rend. (5) 5, 1896, p. 177, p. 289 (im folgenden L. R. zitiert). Tor. Atti. 31, 1896, p. 231, 286, 389, 429 (im folgenden A. T. zitiert). Ann. di mat. (2), 25, 1897, p. 139.

In dieser Form sind unsere Überlegungen nicht völlig streng. Einwandfrei dagegen ist die folgende Darstellung: Unter $\sigma = \underset{\substack{x=0 \\ x=\infty \\ t=t_1 \cdots t=t_2}}{\mathsf{M}} |y|$ werde die maximale Abweichung der Vorgeschichtskurve von der Abszissenachse in der Zeit t_1 bis t_2 für alle Abszissen x (oder auch nur für die im Gebiete I bis IV) verstanden. Zu jedem σ kann man Vorgeschichtskurven konstruieren und hat dann für t von t_1 bis t_2

$$\lim_{\sigma=0} \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[K - 4m \int_0^2 (2 - x^2)\, y\, dx) \right] \right\} = 0,$$

unabhängig von t und unabhängig von der speziellen Wahl der benutzten Vorgeschichtskurven.

Dieser Satz, der sich unmittelbar aus (16), (29) und der auf S. 16 nachgewiesenen Endlichkeit der Funktion E ergibt, läßt erkennen, daß die Gültigkeit der Gleichung (79) nicht auf die Fälle beschränkt ist, in denen die Geschwindigkeit unendlich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. *Um sie anzuwenden, brauchen wir nur zu verlangen, daß das Integral*

$$\int_{t-x}^{t} v(\vartheta)\, d\vartheta$$

für alle in Betracht kommenden t, und für alle x (oder wenigstens für solche, bei denen die Vorgeschichtskurve in I—IV *verläuft) einen sehr kleinen Wert besitzt.* Hierdurch sind aber gelegentliche große Geschwindigkeiten nicht ausgeschlossen.

Die hier eingeführten Annahmen dürfen nicht mit den der quasistationären Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen verwechselt werden. Dort dürfen die Geschwindigkeiten endlich sein und die Beschleunigungen müssen in gewisser Weise unendlich klein sein; hier dürfen die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen endlich sein und nur das Integral der Geschwindigkeit muß unendlich klein sein.

In der Gleichung (79) bezeichnet y eine stets sehr kleine Funktion. In der weiteren Untersuchung dieser Gleichung werden wir aber auf ihre Entstehung keine Rücksicht mehr nehmen und unter $y(x)$ irgend eine Funktion verstehen, die durchaus endlich sein kann. Will man einer solchen Vorgeschichtskurve $y(x)$ eine physikalische Bedeutung beilegen, so steht es immer frei, zu ihr eine Schar von Kurven $\varepsilon \cdot y(x)$ zu konstruieren, wo dann wieder die den Kurven dieser Schar entsprechenden Kräfte, jede dividiert durch ε, mit abnehmendem ε gegen die rechte Seite von (79) konvergieren. Daher wird es kein Mißverständnis veranlassen, wenn wir uns $y(x)$ als endliche Funktion gegeben denken.

Eine ähnliche Formel gilt für den Kraftanstieg. Nach (78) und (32) (S. 32) ist $a = \frac{16}{3}$, nach (33)

$$b = -\int_0^2 E\,dy = -E_{x=2}y_{x=2} + \int_0^2 y\,dE$$

$$= -E_{x=2}y_{x=2} + \int_0^2 \frac{dE}{dx}\,y\,dx,$$

und nach (78)

$$= 8y_2 - 8\int_0^2 x\,y\,dx,$$

wenn y_2 zur Abkürzung für $y_{x=2}$ gesetzt wird, so daß (34) ergibt:

$$\frac{K'}{8m} = \frac{2}{3}v + y_2 - \int_0^2 x\,y\,dx. \tag{80}$$

Es ist jetzt nötig, auf der Bahn des Elektrons einen festen Punkt als Koordinatenursprung für die Lage des Mittelpunktes zu wählen und einen bestimmten Zeitpunkt als Anfangspunkt der Zeitbestimmung. Wenn wir mit $\varphi(t)$ die Entfernung des Elektronenmittelpunktes vom Anfangspunkte des Ortes zur Zeit t in der Vorzugsrichtung bezeichnen, so ist

$$y(x) = \varphi(t) - \varphi(t-x), \tag{81}$$

und setzen wir dies in (79) ein, so folgt:

$$\frac{K(t)}{4m} = \int_0^2 (2-x^2)\,[\varphi(t) - \varphi(t-x)]\,dx$$

oder:

$$\frac{K(t)}{4m} = \frac{4}{3}\varphi(t) - \int_0^2 (2-x^2)\,\varphi(t-x)\,dx,$$

oder wenn

$$\frac{3K(t)}{16m} = F(t) \tag{82}$$

gesetzt wird,

$$F(t) = \varphi(t) - \int_0^2 \frac{3}{4}(2-x^2)\,\varphi(t-x)\,dx. \tag{83}$$

Eine andere Gestalt dieser Gleichung ergibt sich, wenn man

$$t - x = \vartheta \tag{84}$$

setzt; man erhält dann

$$F(t) = \varphi(t) - \int_{t-2}^{t} \frac{3}{4}\,[2-(t-\vartheta)^2]\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{85}$$

Ebenso folgt aus (80), (81), (82), (84)

$$(86)\qquad F'(t) = v(t) - \frac{3}{2}\,\varphi(t) - \frac{3}{2}\,\varphi(t-2) + \int_0^2 \frac{3}{2}\, x\,\varphi(t-x)\,dx$$

oder auch

$$(87)\qquad F'(t) = v(t) - \frac{3}{2}\,\varphi(t) - \frac{3}{2}\,\varphi(t-x) + \int_{t-2}^{t} \frac{3}{2}\,(t-\vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Natürlich erhält man (86) und (87) auch direkt durch Differentiation aus (83) und (85).

Wir schließen mit der Grundgleichung, die im Falle der Flächenladung gilt. Diese wird aus (74) gewonnen und lautet

$$(88)\qquad \frac{K}{m} = \Phi\{v(t)\} - \Phi\{v(t-2)\}.$$

§ 10.

Kräftefreie Bewegungen und gedämpfte Schwingungen.

Die Gleichung der kräftefreien Bewegung wird unter der Annahme von oberflächlicher Ladung besonders einfach. Sie lautet nach (88)

$$(89)\qquad v(t) = v(t-2).$$

In Worten: *In unserer angenäherten Theorie ist die Bewegung eines gleichmäßig oberflächlich geladenen Elektrons dann und nur dann kräftefrei, wenn die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit die Periode 2 besitzt.*

Mit dem Falle der Flächenladung brauchen wir uns also nicht weiter zu beschäftigen.

Unter der Voraussetzung gleichförmiger Volumenladung gilt für kräftefreie Bewegungen nach (83) und (85)

$$(90)\qquad \varphi(t) = \int_0^2 \frac{3}{4}\,(2-x^2)\,\varphi(t-x)\,dx$$

$$= \int_{t-2}^{t} \frac{3}{4}\,[2-(t-\vartheta)^2]\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen superponieren sich. Ihre einfachsten Lösungen sind $\varphi(t) = 1$ und $\varphi(t) = t$. In der Tat ist

$$(91)\qquad \int_0^2 \frac{3}{4}\,(2-x^2)\,dx = 1,$$

und wegen

$$\int_0^2 \frac{3}{4}(2-x^2)\,x\,dx = 0 \tag{92}$$

ist

$$\int_0^2 \frac{3}{4}(2-x)^2(t-x)\,dx = t.$$

Die aus diesen beiden zusammengesetzte Lösung $C_1 + C_2 t$ stellt die wohlbekannte Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit dar.

Um zu weiteren Lösungen zu gelangen, setzen wir

$$\varphi = \Re(e^{pt}) \quad \text{oder} \quad \varphi = \Im(e^{pt}) \tag{93}$$

wo p eine noch zu bestimmende komplexe Konstante, $\Re$ den Realteil und $\Im$ den Imaginärteil bezeichnet. (93) in (90) eingesetzt ergibt für p die Gleichung

$$e^{2p}\left(\frac{2}{3}p^3 - p^2 + 1\right) - \left(p^2 + 2p + 1\right) = 0. \tag{94}$$

Diese Gleichung wurde zuerst von G. Herglotz*) aufgestellt und behandelt. In seiner Arbeit, auf die wir hier verweisen müssen, ist gezeigt, daß die Gleichung (94) unendlich viele Wurzeln hat**), von denen keine einen positiven reellen Teil besitzt.***) Wir sind also zu einer Schar unendlich vieler gedämpfter Eigenschwingungen gelangt.

§ 11.

Integralgleichungen mit einer variabeln Grenze.

Diese partikulären Lösungen würden zur allgemeinen Lösung führen, wenn gezeigt wäre, daß sich jede Funktion nach ihnen entwickeln läßt. Dieser Nachweis steht zur Zeit noch aus. Zu einer allgemeinen Lösung indes führt die Theorie der Integralgleichungen. Die zu ihr leitenden Entwickelungen sind aber nicht nur bei der speziellen Gleichung der Elektronenmechanik möglich, sondern gelten für eine ganze Klasse von Integralgleichungen, so daß es zweckmäßig scheint, die Frage gleich in der angemessenen Allgemeinheit zu behandeln.

---

*) Gött. Nachrichten 1903, Heft 6: die erste der Gleichungen 11a, Gleichung 12 (man setze, um zu unserem Maßsystem zu gelangen, a und $\mathfrak{B} = 1$), Gleichung 14B (man setze $\varepsilon = 0$).

**) Abschnitt V.

***) Abschnitt V. Dort heißt es, daß keine Wurzel einen negativen reellen Teil besitzt. Das liegt daran, daß die von uns benutzte Größe p das entgegengesetzte Zeichen hat als λ_0 bei Herglotz, siehe nämlich seine Gleichung (12).

Die Gleichung (85) besitzt die Form

$$F(t) = \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{95}$$

wo γ eine positive Konstante, $N(t, \vartheta)$ eine gegebene Funktion der Variabeln t und ϑ — den *Kern* nach D. Hilbert —, $F(t)$ ebenfalls eine gegebene und $\varphi(t)$ die zu suchende Funktion bezeichnet. Man erhält nämlich hieraus die Gleichung (85), sobald man setzt

$$\begin{cases} \gamma = 2, \\ N(t, \vartheta) = \frac{3}{4}\,[2 - (t - \vartheta)^2]. \end{cases} \tag{96}$$

Als Vorfrage behandeln wir in diesem Paragraphen die Gleichung

$$F(t) = \varphi(t) - \int_{t_0}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{97}$$

wo t_0 eine Konstante bezeichnet und $t > t_0$ sein soll.

Diese Gleichung wurde von V. Volterra eingehend untersucht, dessen Arbeiten die folgenden Ausführungen dieses Paragraphen entnommen sind.

In

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

formen wir das zweite Glied der rechten Seite um, indem wir $\varphi(\vartheta)$ ersetzen durch

$$F(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} N(\vartheta, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

und erhalten

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} N(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0}^{t} N(t, \vartheta)\, d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} N(\vartheta, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

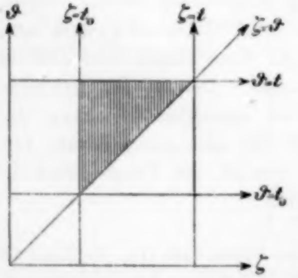


Fig. 10.

Die im dritten Gliede der rechten Seite vorkommende Integration läßt sich geometrisch als eine Integration über einen Flächeninhalt deuten, wie das durch die Figur 10 veranschaulicht wird. Die Figur, in der das schraffierte Gebiet den Integrationsraum bezeichnet, gibt leicht Aufschluß darüber, in welcher Weise die Integrationsfolge vertauscht werden kann. Indem man diese Operation ausführt, erhält man:

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} N(t,\vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0}^{t} \varphi(\zeta)\, d\zeta \int_{\zeta}^{t} N(t,\vartheta)\, N(\vartheta,\zeta)\, d\vartheta,$$

oder, wenn man im letzten Gliede ϑ für ζ und ζ für ϑ schreibt:

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} N(t,\vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0}^{t} N_2(t,\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

wo

$$N_2(t,\vartheta) = \int_{\vartheta}^{t} N(t,\zeta)\, N(\zeta,\vartheta)\, d\zeta$$

gesetzt ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu der Gleichung:

$$(98) \qquad \varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n} N_\nu(t,\vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0}^{t} N_{n+1}(t,\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

wenn die $N_\nu(t,\vartheta)$ durch die Rekursionsformeln:

$$(99) \qquad \begin{cases} N_1(t,\vartheta) = N(t,\vartheta), \\ N_\nu(t,\vartheta) = \int_{\vartheta}^{t} N_{\nu-1}(t,\zeta)\, N_1(\zeta,\vartheta)\, d\zeta \end{cases}$$

definiert sind.*)

Eine andere Gestalt dieser Rekursionsformeln ist:

$$(100) \qquad \begin{cases} N_1(t,\vartheta) = N(t,\vartheta), \\ N_\nu(t,\vartheta) = \int_{\vartheta}^{t} N_1(t,\zeta)\, N_{\nu-1}(\zeta,\vartheta)\, d\zeta, \end{cases}$$

ja man hat allgemein

$$(101) \qquad N_\nu(t,\vartheta) = \int_{\vartheta}^{t} N_{\nu-j}(t,\zeta)\, N_j(\zeta,\vartheta)\, d\zeta \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq \nu - 1.$$

Die Richtigkeit dieser letzten Gleichung, die für $\nu = 2$ sofort einleuchtet, läßt sich für größere ν leicht mittels des Prinzipes der vollständigen Induktion erweisen, womit dann auch durch Spezialisierung (100) gewonnen wird.**)

Sei G das Maximum von $|N(t,\vartheta)|$ für t und ϑ im Intervalle von t_0 bis zu einer Zahl $T > t_0$. Dann folgt aus (99) für t und ϑ in demselben Intervall:

$$(102) \qquad N_\nu(t,\vartheta) < G \cdot \frac{[G\cdot(t-\vartheta)]^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.\ ^{***)}$$

*) V. Volterra, Linc. Rend. p. 177; Att. Tor. I. Note Gl. 3.

**) L. R. p. 177; A. T. Gl. 7.

***) L. R. p. 177; A. T. Gl. 5.

Daher muß im Intervalle t_0 bis T die Reihe $\sum_1^\infty N_\nu(t, \vartheta)$ gleichmäßig konvergieren. Wir setzen also: *)

(103) $$\underline{N}(t, \vartheta) = \sum_1^\infty N_\nu(t, \vartheta)$$

und erhalten aus (98)

(104) $$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Volterra hat einen etwas anderen Weg eingeschlagen:

Aus (99), (100) und (103) folgt:

(105) $$\int_{\vartheta}^{t} \underline{N}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta = \int_{\vartheta}^{t} N_1(t, \zeta)\, \underline{N}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta = \underline{N}(t, \vartheta) - N_1(t, \vartheta). \text{**)}$$

Ist nun φ eine der Gleichung (97) genügende Funktion, so ist

$$\int_{t_0}^{z} \underline{N}(z, t)\, [\varphi(t) - F(t)]\, dt = \int_{t_0}^{z} \underline{N}(z, t)\, dt \int_{t_0}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \int_{t_0}^{z} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \int_{\vartheta}^{z} \underline{N}(z, t)\, N(t, \vartheta)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{z} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\, [\underline{N}(z, \vartheta) - N(z, \vartheta)],$$

also

$$\int_{t_0}^{z} F(t)\, \underline{N}(z, t)\, dt = \int_{t_0}^{z} N(z, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

oder nach (97)

$$= -F(z) + \varphi(z),$$

und somit

(104) $$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta. \text{***)}$$

Also nur die durch (104) gegebene Funktion $\varphi(t)$ kann (97) genügen. Daß aber die durch (104) definierte Funktion $\varphi(t)$ (97) wirklich befriedigt, folgt durch eine ganz entsprechende Rechnung. Aus (104) ergibt sich nämlich:

---

*) L. R. p. 178; A. T. Gl. 7.

**) L. R. p. 178.

***) L. R. p. 180.

$$\int_{t_0}^{z} [\varphi(t) - F(t)]\, N(z,t)\, dt = \int_{t_0}^{z} N(z,t)\, dt \int_{t_0}^{t} F(\vartheta)\, \underline{N}(t,\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \int_{t_0}^{z} F(\vartheta)\, d\vartheta \int_{\vartheta}^{z} N(z,t)\, \underline{N}(t,\vartheta)\, dt,$$

oder nach (105)

$$= \int_{t_0}^{z} F(\vartheta)\, d\vartheta\, [\underline{N}(z,\vartheta) - N(z,\vartheta)],$$

also

$$\int_{t_0}^{z} \varphi(t)\, N(z,t)\, dt = \int_{t_0}^{z} F(\vartheta)\, d\vartheta\, \underline{N}(z,\vartheta)$$

oder nach (104)

$$= \varphi(z) - F(z),$$

d. h. (97) ist befriedigt.

Wir sehen also, daß es eine und nur eine Lösung gibt, die (97) genügt, und daß diese durch (104) gegeben wird. Insbesondere folgt, daß die Lösung der homogenen Gleichung

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} N(t,\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

identisch verschwindet.*)

§ 12.

Integralgleichungen mit zwei variabeln Grenzen konstanter Differenz; $\varphi = 0$ für $t < t_0$. (Bewegungen aus der Ruhe heraus.)

Wir wenden uns jetzt der Gleichung

$$(95) \qquad F(t) = \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t,\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

zu, wo γ eine positive Konstante bedeutet. Dabei soll F für $t > t_0$, φ für $t < t_0$ gegeben sein, und φ für $t > t_0$ gesucht werden. Der einfachste Fall, *daß* $\varphi = 0$ *für* $t < t_0$ *ist*, läßt sich auf das im vorigen Paragraphen behandelte Problem zurückführen. Setzen wir nämlich:

$$(106) \qquad \begin{cases} N_1(t,\vartheta) = N(t,\vartheta) & \text{für} \quad t-\gamma < \vartheta < t, \\ N_1(t,\vartheta) = 0 & \text{für} \quad \vartheta < t-\gamma \ \text{und}\ \vartheta > t, \end{cases}$$

so schreibt sich (95) für $t > t_0$:

$$(107) \qquad F(t) = \varphi(t) - \int_{t_0}^{t} N_1(t,\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta.$$

---

*) L. R. p. 178 f. (Gl. 3).

Denn für t im Intervalle t_0 bis $t_0 + \gamma$ unterscheidet sich (107) nicht von (95), weil $\varphi(\vartheta)$ für $t < t_0$ verschwindet, und für $t > t_0 + \gamma$ deshalb nicht, weil $N_1(t, \vartheta)$ für $\vartheta < t - \gamma$ verschwindet.

Wenn also noch

(99a) $$N_\nu(t, \vartheta) = \int_\vartheta^t N_{\nu-1}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta \quad \text{oder}$$

(100a) $$N_\nu(t, \vartheta) = \int_\vartheta^t N_1(t, \zeta)\, N_{\nu-1}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta,$$

(103a) $$\underline{N}(t, \vartheta) = \sum_1^\infty {}^\nu N_\nu(t, \vartheta)$$

gesetzt wird, so lautet die unter der Bedingung: $\varphi(t) = 0$ für $t < t_0$ geltende Lösung von (95) wegen (107) und (104)

(104a) $$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^t \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Es ist zu beachten, daß die in (99a), (100a), (103a), (104a) vorkommenden Größen verschieden von denen in (99), (100), (103), (104) sind.

Diese Betrachtungen sind unmittelbar auf ein Elektron anwendbar, das seit unendlich langer Zeit geruht hat und nun plötzlich durch einen Kraftverlauf aus dieser Ruhe heraus bewegt wird. Bezeichnet man den Zeitpunkt, in dem die Ruhe gestört wird, mit t_0, so wird die Entfernung φ aus der Ruhelage durch die Gleichungen (82), (96), (106), (99a), (100a), (103a), (104a) gegeben.

§ 13.

Integralgleichungen mit zwei variabeln Grenzen konstanter Differenz; φ für $t < t_0$ vorgeschrieben. (Bewegung des Elektrons bei bekannter Anfangsvorgeschichte.)

Wir suchen wiederum eine Funktion φ, die für $t > t_0$ der Gleichung

(95) $$F(t) = \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^t N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

genügt, wenn gegeben ist

1) $F(t)$ im Intervalle $t = t_0$ bis $t = \infty$,

2) $\varphi(t)$ im Intervalle $t_0 - \gamma$ bis t_0.

Gehen wir aus von der Gleichung

t

$$\varphi(t) - F(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} N_1(t,\vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t_0}^{t} N_1(t,\vartheta)\,F(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t_0}^{t} N_1(t,\vartheta)\,[\varphi(\vartheta)-F(\vartheta)]\,d\vartheta, \tag{108}$$

die wegen (106) mit (95) identisch ist. In dieser Gleichung kann das dritte Glied der rechten Seite umgeformt werden, indem die Gleichung (108) selbst darauf angewandt wird. Wir wollen zeigen, daß man durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu der Formel

$$\varphi(t) - F(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\,\varphi(\vartheta) \sum_{1}^{n} N^{(\nu)}(t,\vartheta) + \int_{t_0}^{t} d\vartheta\,F(\vartheta) \sum_{1}^{n} N_\nu(t,\vartheta) + \int_{t_0}^{t} d\vartheta\,[\varphi(\vartheta)-F(\vartheta)]\,N_n(t,\vartheta) \tag{109}$$

gelangt, wenn

$$N^{(1)}(t,\vartheta) = N_1(t,\vartheta) \quad \text{und} \tag{110}$$

$$N^{(\nu)}(t,\vartheta) = \int_{t_0}^{t} N_{\nu-1}(t,\zeta)\,N_1(\zeta,\vartheta)\,d\zeta \tag{111}$$

gesetzt wird.

Für $n = 1$ ist dieser Satz in (108) enthalten. Nehmen wir ihn für ein beliebiges n als bewiesen an, so können wir das dritte Glied auf der rechten Seite mittels (108) umformen und erhalten dafür:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} N_n(t,\vartheta)\,d\vartheta \left\{\int_{t_0-\gamma}^{t_0} N_1(\vartheta,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right\} \\
&+ \int_{t_0}^{t} N_n(t,\vartheta)\,d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} N_1(\vartheta,\zeta)\,F(\zeta)\,d\zeta \\
&+ \int_{t_0}^{t} N_n(t,\vartheta)\,d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} N_1(\vartheta,\zeta)\,[\varphi(\zeta)-F(\zeta)]\,d\zeta \\
&= \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \varphi(\zeta)\,d\zeta \int_{t_0}^{t} N_n(t,\vartheta)\,N_1(\vartheta,\zeta)\,d\vartheta \\
&+ \int_{t_0}^{t} F(\varphi)\,d\zeta \int_{\zeta}^{t} N_n(t,\vartheta)\,N_1(\vartheta,\zeta)\,d\vartheta \\
&+ \int_{t_0}^{t} [\varphi(\zeta)-F(\zeta)]\,d\zeta \int_{\zeta}^{t} N_n(t,\vartheta)\,N_1(\vartheta,\zeta)\,d\vartheta,
\end{aligned}$$

oder nach (111) unter Vertauschung der Buchstaben ϑ und ζ

$$= \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\, N^{(\nu+1)}(t, \vartheta)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(\vartheta)\, d\vartheta\, N_{n+1}(t, \vartheta)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [\varphi(\vartheta) - F(\vartheta)]\, d\vartheta\, N_{n+1}(t, \vartheta).$$

(109) nimmt also die Gestalt an:

$$\varphi(t) - F(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta) \sum_{1}^{n+1} N^{(\nu)}(t, \vartheta) + \int_{t_0}^{t} d\vartheta\, F(\vartheta) \sum_{1}^{n+1} N_\nu(t, \vartheta)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [\varphi(\vartheta) - F(\vartheta)]\, d\vartheta\, N_{n+1}(t, \vartheta)$$

und ist durch das Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir uns noch etwas mit den Iterationen $N^{(\nu)}(t, \vartheta)$ beschäftigen. Diese hängen außer von ihren Argumenten t und ϑ noch von dem Parameter t_0 ab. Insofern die Abhängigkeit von t_0 noch besonders betont werden muß, schreiben wir auch $N^{(\nu)}(t, \vartheta | t_0)$. Die Definitionsformeln (111) haben den Übelstand, daß sie noch eine zweite Reihe von Funktionen, die $N_\nu(t, \vartheta)$, benutzen. Wir können aber auch reine Rekursionsformeln für die $N^{(\nu)}(t, \vartheta)$ aufstellen. Man erhält nämlich aus (110) und (111)

$$\int_{t_0}^{z} dt\, N^{(1)}(z, t)\, N^{(\nu)}(t, \vartheta) = \int_{t_0}^{z} dt\, N^{(1)}(z, t) \int_{t_0}^{t} N_{\nu-1}(t, \zeta)\, N^{(1)}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta$$

$$= \int_{t_0}^{z} N^{(1)}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta \int_{\zeta}^{z} N_1(z, t)\, N_{\nu-1}(t, \zeta)\, dt,$$

oder nach (100a) (S. 72)

$$= \int_{t_0}^{z} N^{(1)}(\zeta, \vartheta)\, N_\nu(z, \zeta)\, d\zeta$$

oder nach (110) und (111)

$$= N^{(\nu+1)}(z, \vartheta).$$

Wir können also die $N^{(\nu)}(t, \vartheta)$ auch durch die folgenden Rekursionsformeln definieren:

$$(112) \qquad \begin{cases} N^{(1)}(t, \vartheta) = N_1(t, \vartheta), \\ N^{(\nu)}(t, \vartheta) = \int_{t_0}^{t} N^{(1)}(t, \zeta)\, N^{(\nu-1)}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta. \end{cases}$$

(111) und (112) lassen erkennen, daß $\vartheta > t_0 - \gamma$ sein muß, wenn die $N^{(2)}(t, \vartheta)$, $N^{(3)}(t, \vartheta)$, $\cdots$, $N^{(\nu)}(t, \vartheta)$ von Null verschieden sein sollen. Bezeichnet G das Maximum von $|N^{(1)}(t, \vartheta)|$, so folgt aus (102) und (111) oder aus (112)

$$(113) \qquad |N^{(\nu)}(t, \vartheta)| < G \cdot \frac{[G \cdot (t - t_0)]^{\nu - 1}}{(\nu - 1)!}.$$

Die Reihe $\sum_{\nu}^{\infty} N^{(\nu)}(t, \vartheta)$ ist also konvergent, und zwar nach Wahl einer beliebigen Zahl $T > t_0$ gleichmäßig konvergent für ϑ von $t_0 - \gamma$ bis t_0 und für t zwischen ϑ und T.

Setzen wir daher

$$(114) \qquad \sum_{1}^{\infty} N^{(\nu)}(t, \vartheta) = \overline{N}(t, \vartheta)$$

oder, wenn es auf den Parameter t_0 ankommt,

$$\sum_{1}^{\infty} N^{(\nu)}(t, \vartheta | t_0) = \overline{N}(t, \vartheta | t_0),$$

so ergibt sich als Lösung der Integralgleichung (95) aus (109)

$$(115) \qquad \varphi(t) = F(t) + \int_{t_0 - \gamma}^{t_0} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\, \overline{N}(t, \vartheta) + \int_{t_0}^{t} F(\vartheta)\, d\vartheta\, \underline{N}(t, \vartheta).$$

In dieser Lösung ist (104a) (S. 72) mitenthalten.

Es ist noch zu zeigen, daß (115) wirklich eine Lösung von (95) darstellt. Hierzu ist eine Integralformel für die Funktion $\overline{N}(t, \vartheta)$ erforderlich. Aus (112) und (114) ergibt sich

$$(116) \qquad \int_{t_0}^{t} N^{(1)}(t, \zeta)\, \overline{N}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta = \overline{N}(t, \vartheta) - N^{(1)}(t, \vartheta).$$

Weiter ist, falls $\vartheta < t_0$ gewählt wird, nach (99a) und (111) für $\nu \geqq 2$

$$N_\nu(t, \vartheta) - N^{(\nu)}(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^{t_0} N_{\nu - 1}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta,$$

also wegen

$$N_1(t, \vartheta) - N^{(1)}(t, \vartheta) = 0$$

$$(117) \qquad \overline{N}(t, \vartheta) = \underline{N}(t, \vartheta) - \int_{\vartheta}^{t_0} \underline{N}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta.$$

Sei jetzt φ für $t > t_0$ eine der Gleichung (115) genügende Funktion. Dann ist

$$\int_{t_0}^{z} dt\, N_1(z, t)\, \varphi(t) = \int_{t_0}^{z} dt\, N_1(z, t)\, F(t)$$

$$+ \int_{t_0}^{z} dt\, N_1(z, t) \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\, \overline{N}(t, \vartheta)$$

$$+ \int_{t_0}^{z} dt\, N_1(z, t) \int_{t_0}^{t} F(\vartheta)\, d\vartheta\, \underline{N}(t, \vartheta)$$

$$= \int_{t_0}^{z} dt\, F(t)\, N_1(z, t)$$

$$+ \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta) \int_{t_0}^{z} N_1(z, t)\, \overline{N}(t, \vartheta)\, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{z} d\vartheta\, F(\vartheta) \int_{\vartheta}^{z} N_1(z, t)\, \underline{N}(t, \vartheta)\, dt,$$

oder nach (105) und (116)

$$= \int_{t_0}^{z} dt\, F(t)\, N_1(z, t)$$

$$+ \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta) [\overline{N}(z, \vartheta) - N^{(1)}(z, \vartheta)]$$

$$+ \int_{t_0}^{z} d\vartheta\, F(\vartheta) [\underline{N}(z, \vartheta) - N_1(z, \vartheta)]$$

$$= \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta) [\overline{N}(z, \vartheta) - N^{(1)}(z, \vartheta)] + \int_{t_0}^{z} d\vartheta\, F(\vartheta)\, \underline{N}(z, \vartheta),$$

oder wegen (115)

$$= \varphi(z) - F(z) - \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta)\, N_1(z, \vartheta).$$

Also ist

$$\varphi(z) = F(z) + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \varphi(\vartheta)\, N_1(z, \vartheta) + \int_{t_0}^{z} d\vartheta\, \varphi(\vartheta)\, N_1(z, \vartheta)$$

$$= F(z) + \int_{t_0-\gamma}^{z} d\vartheta\, \varphi(\vartheta)\, N_1(z, \vartheta) \quad \text{oder wegen (106)}$$

$$= F(z) + \int_{z-\gamma}^{z} d\vartheta\, \varphi(\vartheta)\, N(z, \vartheta),$$

d. h. unsere Funktion φ befriedigt die Gleichung (95).

Es gibt also eine und nur eine Lösung der Integralgleichung

(95)
$$F(t) = \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

und diese ist gegeben durch

(115)
$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \overline{N}(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta,$$

wo gesetzt ist

(103a)
$$\underline{N}(t, \vartheta) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} N_\nu(t, \vartheta),$$

(114)
$$\overline{N}(t, \vartheta) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} N^{(\nu)}(t, \vartheta),$$

(106) u. (112) $N_1(t, \vartheta)$ *und* $N^{(1)}(t, \vartheta) = N(t, \vartheta)$ *oder* $= 0$,

je nachdem ϑ *zwischen* t *und* $t - \gamma$ *liegt oder nicht,*

(99a) u. (100a)
$$N_\nu(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^{t} N_{\nu-1}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta = \int_{\vartheta}^{t} N_1(t, \zeta)\, N_{\nu-1}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta,$$

(112)
$$N^{(\nu)}(t, \vartheta) = \int_{t_0}^{t} N^1(t, \zeta)\, N^{(\nu-1)}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta.$$

Von Interesse ist die Betrachtung derjenigen Funktionen, die für $t > t_0$ der homogenen Gleichung

(118)
$$\varphi(t) = \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

genügen.

Jede Funktion $\varphi(t)$, die von $t_0 - \gamma$ bis ∞ definiert ist und von t_0 bis ∞ die Gleichung (118) befriedigt, läßt sich in der Form

(119)
$$\varphi(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \overline{N}(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

darstellen, und umgekehrt wird, wenn $\varphi(t)$ eine beliebige zwischen $t_0 - \gamma$ und t_0 definierte Funktion ist, durch

(119)
$$\varphi(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \overline{N}(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

eine Fortsetzung der ursprünglich gegebenen Funktion $\varphi(t)$ definiert, die von t_0 bis ∞ der Gleichung (118) genügt.

Das läßt vermuten, daß auch $\overline{N}(t, \vartheta_0)$, wo ϑ_0 irgend eine Zahl zwischen $t_0 - \gamma$ und t_0 bedeutet, die Gleichung (118) erfüllt. Wirklich

genügt die für t von t_0 bis ∞ definierte Funktion $\overline{N}(t, \vartheta_0)$ dieser Gleichung, sobald $t > t_0 + \gamma$ ist.

Denn dann ist

$$\int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \overline{N}(\vartheta, \vartheta_0)\, d\vartheta = \int_{t_0}^{t} N^{(1)}(t, \vartheta)\, \overline{N}(\vartheta, \vartheta_0)\, d\vartheta,$$

also nach (116)

$$= \overline{N}(t, \vartheta_0) - N^{(1)}(t, \vartheta_0) = \overline{N}(t, \vartheta_0).$$

Die Funktion $\overline{N}(t, \vartheta_0)$, wo ϑ_0 zwischen $t_0 - \gamma$ und t_0 liegt, ist für $t > t_0$ definiert und genügt für $t > t_0 + \gamma$ der Integralgleichung (118). *Jede von $t = t_0 - \gamma$ bis $t = \infty$ definierte und für $t > t_0$* (118) *genügende Funktion kann aus Funktionen der Schar $\overline{N}(t, \vartheta_0)$ durch Superposition genommen werden.*

Diese Resultate lassen sich unmittelbar auf die Elektronentheorie anwenden. *Ist der Ort φ des Elektrons für die Zeit $t_0 - 2$ bis t_0 und die Kraft für die Zeit t_0 bis ∞ gegeben, so bestimmt sich der Ort φ des Elektrons in der Zeit t_0 bis ∞ aus den Gleichungen* (82), (96) und (115) (S. 65, 68, 75).

§ 14.

Zurückführung des Falles zweier variabeln Grenzen auf den Fall einer variabeln Grenze. (Bewegung bei bekannter Vorgeschichte, zurückgeführt auf den Fall der Bewegung aus der Ruhe heraus.)

Wir geben in diesem Paragraphen eine andere Form für die Lösung der Integralgleichungen mit variabeln Grenzen konstanter Differenz. Indem wir in (115) die Gleichung (117) (S. 75) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta \\
&\quad + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \left[\underline{N}(t, \vartheta) - \int_{\vartheta}^{t_0} \underline{N}(t, \zeta)\, N_1(\zeta, \vartheta)\, d\zeta\right] \\
&= F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{N}(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \\
&\quad - \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\zeta\, \underline{N}(t, \zeta) \int_{t_0-\gamma}^{\zeta} N_1(\zeta, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta \\
&\quad + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} d\vartheta\, \underline{N}(t, \vartheta) \left\{\varphi(\vartheta) - \int_{t_0-\gamma}^{\vartheta} N_1(\vartheta, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta\right\}.
\end{aligned}$$

Ist im Intervalle $t_0 - \gamma$ bis t_0 die Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben, so ist damit auch die Funktion

$$F^*(t) = \varphi(t) - \int_{t_0-\gamma}^{t} N_1(t, \vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta \tag{120}$$

bekannt, und die Lösung von (95) nimmt die Form an

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\,F(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{N}(t, \vartheta)\,F^*(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{121}$$

die den Vorzug besitzt, nur die Funktion $\underline{N}(t, \vartheta)$ zu benutzen.

Diese neue Darstellung läßt sich auch unmittelbar aus den Ergebnissen des § 12 gewinnen. Sei wieder $\varphi(t)$ für das Intervall $t_0 - \gamma$ bis t_0 und $F(t)$ für das Intervall t_0 bis ∞ vorgeschrieben, und sei $\varphi(t)$ für t_0 bis ∞ so zu bestimmen, daß (95) (S. 68 u. 72) befriedigt wird. Wir führen eine Hilfsfunktion $\varphi^*(t)$ ein durch die Festsetzung:

$$\varphi^*(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < t_0 - \gamma,$$
$$\varphi^*(t) = \varphi(t) \quad \text{für} \quad t > t_0 - \gamma$$

und setzen

$$F^*(t) = \varphi^*(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\,\varphi^*(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Dann ist im Intervalle $t_0 - \gamma$ bis t_0

$$F^*(t) = \varphi^*(t) - \int_{t_0-\gamma}^{t} N_1(t, \vartheta)\,\varphi^*(\vartheta)\,d\vartheta$$
$$= \varphi(t) - \int_{t_0-\gamma}^{t} N_1(t, \vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta,$$

also eine bekannte Funktion, und für $t > t_0$ ist

$$F^*(t) = \varphi^*(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\,\varphi^*(\vartheta)\,d\vartheta$$
$$= \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = F(t),$$

also ebenfalls eine bekannte Funktion. Aus (104a) folgt jetzt für $t > t_0$

$$\varphi^*(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\,F^*(\vartheta)\,d\vartheta$$
$$= \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta)\,F(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{N}(t, \vartheta)\,F^*(\vartheta)\,d\vartheta,$$

also auch

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t, \vartheta) F(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{N}(t, \vartheta) F^*(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Hiermit haben wir (120) und (121) wieder gewonnen und haben den Fall zweier variabeln Grenzen auf den Fall einer variabeln Grenze zurückgeführt.

Diese Überlegungen werden anschaulicher, wenn wir sie in der Sprache der Elektronentheorie wiederholen. Wir hatten zunächst die Bewegung bestimmt, die ein Elektron von einem gewissen Zeitpunkte t_0 unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft ausführt, wenn es vor diesem Zeitpunkte dauernd geruht hat. Wir verallgemeinerten sodann das Problem und schrieben die Bewegung für die Zeit $t_0 - \gamma$ bis t_0 willkürlich vor. Um dieses erweiterte Problem auf das vorige zurückzuführen, denken wir uns die gegebene Bewegung durch eine fingierte ersetzt: Wir lassen das fingierte Elektron vor der Zeit $t_0 - \gamma$ an der Stelle ruhen, wo sich das wirkliche zu dieser Zeit befindet, nach dem Zeitpunkte $t_0 - \gamma$ aber seine Bewegung mit der des wirklichen übereinstimmen. Es ist dann möglich, den Kraftverlauf, der die fingierte Bewegung unterhält, zu bestimmen, hieraus mit Benutzung der speziellen Lösung die Bewegung des fingierten Elektrons und damit endlich auch die wirkliche Bewegung zu finden.

Indem wir uns wieder dem allgemeinen Problem zuwenden, bemerken wir, daß die *homogene* Gleichung

(118) $$\varphi(t) = \int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

durch

(122) $$\varphi(t) = \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{N}(t, \vartheta) F^*(\vartheta)\, d\vartheta$$

gelöst wird. Bezeichnet ϑ_0 eine beliebige Konstante, so ist $\underline{N}(t, \vartheta_0)$ im Intervalle ϑ_0 bis ∞ definiert und genügt im Intervalle $\vartheta_0 + \gamma$ bis ∞ der Gleichung (118). Denn für $t > \vartheta_0 + \gamma$ ist

$$\int_{t-\gamma}^{t} N(t, \vartheta)\, \underline{N}(\vartheta, \vartheta_0)\, d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{t} N_1(t, \vartheta)\, \underline{N}(\vartheta, \vartheta_0)\, d\vartheta$$
$$= \underline{N}(t, \vartheta_0) - N_1(t, \vartheta_0) = \underline{N}(t, \vartheta_0).$$

Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Funktion $\underline{N}(t, \vartheta_0)$ ist, wenn $\vartheta_0 < t_0$, für $t > t_0$ definiert und genügt für $t > t_0 + \gamma$ der Integralgleichung (118). *Jede von $t = t_0 - \gamma$ bis $t = \infty$ definierte und für $t > t_0$* (118) *genügende Funktion kann aus Funktionen der Schar $\underline{N}(t, \vartheta_0)$ durch Superposition gewonnen werden.*

§ 15.

Kerne, die nur von der Differenz der Variabeln abhängen. Anwendung auf die Elektronentheorie.

Der in der Elektronentheorie auftretende Kern besitzt nach (96) die Eigenschaft, nur von der Differenz der Variabeln t und ϑ abzuhängen. Bei solchen Kernen läßt sich die Lösung auch in anderer Form geben. Da für jedes c die Gleichung

$$N(t-c,\ \vartheta-c) = N(t,\ \vartheta)$$

gilt, folgt leicht nach dem Prinzipe der vollständigen Induktion

$$N_\nu(t-c,\ \vartheta-c) = N_\nu(t,\ \vartheta)$$

und

$$N^{(\nu)}(t-c,\ \vartheta-c\,|\,t_0-c) = N^{(\nu)}(t,\ \vartheta\,|\,t_0),$$

also auch

$$\underline{N}(t-c,\ \vartheta-c) = \underline{N}(t,\ \vartheta)$$

und

$$\overline{N}(t-c,\ \vartheta-c\,|\,t_0-c) = \overline{N}(t,\ \vartheta\,|\,t_0).$$

Werden daher die Funktionen *einer* Variabeln $N(x,0)$, $N_\nu(x,0)$, $\underline{N}(x,0)$ mit $Q(x)$, $Q_\nu(x)$, $\underline{Q}(x)$ bezeichnet, so ist

$$N(t,\vartheta) = Q(t-\vartheta),\quad N_\nu(t,\vartheta) = Q_\nu(t-\vartheta),\quad \underline{N}(t,\vartheta) = \underline{Q}(t-\vartheta),$$

und wir erhalten aus (99a), (100a) und (103a), wenn man in diesen Formeln $\vartheta = 0$ setzt und statt t lieber x schreibt,

$$Q_\nu(x) = \int_0^x Q_{\nu-1}(x-\xi)\, Q_1(\xi)\, d\xi \tag{123}$$

$$= \int_0^x Q_1(x-\xi)\, Q_{\nu-1}(\xi)\, d\xi,$$

$$\underline{Q}(x) = \sum_1^\infty Q_\nu(x). \tag{124}$$

Die Integralgleichung (95) (S. 68) schreibt sich aber

$$F(t) = \varphi(t) - \int_{t-\gamma}^t Q(t-\vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta,$$

oder wenn $t-\vartheta = x$ gesetzt wird,

$$F(t) = \varphi(t) - \int_0^\gamma Q(x)\,\varphi(t-x)\,dx. \tag{125}$$

Für den Fall, daß $\varphi(t)$ von $t_0 - \gamma$ bis t_0 und $F(t)$ von t_0 bis ∞ gegeben ist, wird die Lösung von (125) durch das folgende Formelsystem gegeben:

$$(126)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q_1(x) = Q(x) \text{ oder } = 0, \text{ je nachdem } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } \gamma \text{ liegt} \\ & \qquad\qquad \text{oder nicht,} \\ & Q_\nu(x) = \int_0^x Q_{\nu-1}(x-\zeta)\, Q_1(\zeta)\, d\zeta = \int_0^x Q_1(x-\zeta)\, Q_{\nu-1}(\zeta)\, d\zeta \\ & \underline{Q}\,(x) = \sum_1^\infty Q_\nu(x) \\ & F^*(z) = \varphi(z) - \int_{t_0-\gamma}^{z} Q\,(z-\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta; \\ & \quad \varphi(t) = F(t) + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \underline{Q}(t-z) F^*(z)\, dz \\ & \qquad\qquad + \int_{t_0}^{t} \underline{Q}\,(t-z)\; F\,(z)\, dz. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt auch die allgemeine Lösung des Problems der Elektronentheorie. Wählen wir unsere Zeitrechnung so, daß $t_0 - \gamma = 0$ wird, so erhalten wir den Satz:

Wenn die Lage φ des Elektrons für die Zeit 0 bis 2 gegeben ist, und die Kraft $K(t)$ für die Zeit 2 bis ∞, so ist die Lage des Elektrons zu einer beliebigen Zeit $t > 2$ durch das Formelsystem gegeben:

$$(127)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q_1(x) = \frac{3}{4}\,(2 - x^2) \text{ oder } = 0, \text{ je nachdem } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } 2 \text{ liegt} \\ & \qquad\qquad \text{oder nicht,} \\ & Q_\nu(x) = \int_0^x Q_{\nu-1}(x-\zeta)\, Q_1(\zeta)\, d\zeta = \int_0^x Q_1(x-\zeta)\, Q_{\nu-1}(\zeta)\, d\zeta \\ & \underline{Q}\,(x) = \sum_1^\infty Q_\nu(x) \\ & \frac{3\,K(t)}{16\,m} = F(t) \\ & F^*(z) = \varphi(z) - \int_0^z \frac{3}{4}\,(2 - x^2)\, \varphi(z-x)\, dx; \quad 0 \leqq z \leqq 2 \\ & \quad \varphi(t) = F(t) + \int_0^2 \underline{Q}\,(t-z) F^*(z)\, dz + \int_2^t \underline{Q}\,(t-z)\; F(z)\, dz. \end{aligned} \right.$$

Als allgemeinste kräftefreie Bewegung ergibt sich

$$\varphi(t) = \int_0^2 \underline{Q}(t-z)\, F^*(z)\, dz. \tag{128}$$

Da $\underline{Q}(t)$ selbst für $t > 0$ eine Bewegung definiert, die für $t > 2$ kräftefrei verläuft, so ist der Satz gewonnen: *Es gibt eine fundamentale Bewegung, die von $t = 0$ an definiert ist und für $t > 2$ kräftefrei verläuft. Stellt man sie als Kurve dar, verschiebt sie horizontal nach rechts um nicht mehr als 2, und superponiert die verschiedenen so entstehenden Kurven, so kann man dadurch jede Kurve einer Bewegung erhalten, die von 2 an definiert ist und von 4 bis ∞ kräftefrei verläuft.* Die Funktion $\underline{Q}(t)$ ist bei $t = 2$ unstetig, weil dort $Q_1(t)$ unstetig, $Q_2(t), \cdots, Q_\nu(t)$ dagegen stetig sind. Weitere Unstetigkeitsstellen besitzt $\underline{Q}(t)$ nicht. Durch diese Betrachtungen ist unser Problem auf die Diskussion der Funktion $\underline{Q}(t)$ reduziert, die jedoch große Schwierigkeiten bietet. Insbesondere wäre Aufschluß über das Verhalten von $\frac{d\underline{Q}}{dt}$ im Unendlichen erwünscht. Wir wollen uns begnügen, eine Ungleichung für die Funktion $\underline{Q}(t)$ abzuleiten.

Gehen wir von dem Falle aus, daß ein Elektron sich von der Zeit 0 an mit der Geschwindigkeit 1 bewegt. Diese Bewegung ist also von 0 an definiert und von 2 bis ∞ nach (91) kräftefrei. Die Funktion $F^*(z)$ in (127) wird, da hier $\varphi(t) = t$ ist,

$$\begin{aligned} F^*(z) &= z - \int_0^z \frac{3}{4}(2 - x^2)(z - x)\, dx \\ &= z - \frac{3}{4} z^3 + \frac{1}{16} z^4 = \frac{1}{16} z(z+4)(z-2)^2. \end{aligned}$$

Diese Funktion stellt die mit $\frac{3}{16} m$ multiplizierte Kraft dar, die zur Zeit z nötig ist, um einem Elektron zur Zeit 0 plötzlich die Geschwindigkeit 1 zu erteilen und es dauernd auf dieser Geschwindigkeit zu erhalten.*) Hiernach wird (128)

$$t = \frac{1}{16} \int_0^2 \underline{Q}(t-z)\, z(z+4)(2-z)^2\, dz, \tag{129}$$

und durch Differentiation folgt

$$1 = \frac{1}{16} \int_0^2 \underline{Q}'(t-z)\, z(z+4)(2-z)^2\, dz. \tag{136}$$

*) Vgl. P. Hertz, Phys. Zeitschr. 5, 1904, S. 112, Gl. 17 und 18. Dissertation S. 73, Formel 172 und 173. A. Sommerfeld, Gött. Nachrichten III, S. 209.

Da im Intervalle 0 bis 2 die Funktion $\frac{1}{16} z(z+4)(2-z)^2 < 3$ ist, so folgt hieraus, wenn $\underset{\substack{z=0\\z=2}}{\mathsf{M}} | Q(t-z) |$ das Maximum von $Q(t-z)$ zwischen t und $t-2$ bezeichnet,

$$(131)\qquad \begin{cases} \underset{\substack{z=0\\z=2}}{\mathsf{M}} | Q(t-z) | > \frac{1}{6} t \\ \underset{\substack{z=0\\z=2}}{\mathsf{M}} | Q'(t-z) | > \frac{1}{6} . \end{cases}$$

Die Funktion $Q(t)$ wächst also mit wachsendem t über alle Grenzen, und ihre Ableitung nähert sich mit wachsendem t nicht der Null.

§ 16.

Entwicklung nach Eigenschwingungen.*)

Die folgenden Ausführungen erheben keinen Anspruch auf Strenge. Die Voraussetzung, auf die sie sich gründen, ist bis jetzt nicht bewiesen, und für ihr Zutreffen kann keine Bürgschaft übernommen werden. Da sie aber bisweilen für wahrscheinlich erklärt worden ist, so wird es gestattet sein, die aus ihr fließenden Folgerungen abzuleiten.

Als partikuläre Lösungen von

$$(132)\qquad \varphi(t) = \int_0^\chi Q(x)\,\varphi(t-x)\,dx$$

findet man

$$(133)\qquad \varphi = \Re(e^{p_i t}) \quad \text{oder} \quad \varphi = \Im(e^{p_i t}),$$

unter $\Re$ und $\Im$ die Zeichen für den Realteil und Imaginärteil und unter p_i die komplexen Nullstellen der Funktion

$$(134)\qquad P(p) = 1 - \int_0^\chi Q(x)\,e^{-px}\,dx$$

verstanden.

Besitzt $P(p)$ mehrfache Nullstellen, so kommen noch Lösungen te^{pt}, t^2e^{pt} usw. in Betracht. So verschwindet z. B. im Falle der Elektronentheorie P bei $p=0$ nach (92) (S. 67) doppelt. Wir wollen uns indes zunächst auf den Fall beschränken, daß P nur einfache Nullstellen besitzt.

*) Dieser Paragraph ist ein Zusatz bei der Korrektur (April 1907). Mit den nachstehenden Ausführungen vgl. man: A. L. Cauchy, Mémoire sur l'application du calcul des résidus etc. Paris 1827. De Bures frères.

Eine Lösung von (132) ist auch $\Re\sum C_i e^{p_i t}$, wenn die C_i komplexe Konstanten und die p_i die Nullstellen von P bezeichnen. Wir wollen nun aber auch umgekehrt voraussetzen, *daß sich jede von* 0 *bis* γ *definierte Funktion in diesem Intervalle in der Form* $\Re\sum C_i e^{p_i t}$ *darstellen läßt. Da sich* (132) *nur auf eine Weise fortsetzen läßt, folgt dann, daß diese Entwicklung auch noch für größere Argumente gilt, solange die Funktion der Gleichung* (132) *genügt.*

Weil $\underline{Q}(t)$ eine Lösung von (132) darstellt, muß es nach unserer Voraussetzung eine Reihe von Koeffizienten c_i geben, durch die sich diese Funktion entwickeln läßt, so daß man für positive t hat:

$$\underline{Q}(t) = \Re\sum c_i e^{p_i t}.$$

Als Entwicklungskoeffizienten einer beliebigen Lösung $\varphi(t)$ von (132), deren Werte im Intervalle 0 bis γ vorgeschrieben sind, findet man daher nach (126) und (120) (S. 79)

$$C_i = c_i \int_0^\gamma e^{-p_i \vartheta} F^*(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= c_i \int_0^\gamma e^{-p_i \vartheta}\, d\vartheta \left\{ \varphi(\vartheta) - \int_0^\vartheta \varphi(\vartheta - x)\, Q(x) dx \right\}.$$

Durch Betrachtung der speziellen Lösung $e^{p_i t}$, ergibt sich daraus

$$1 = c_i \int_0^\gamma e^{-p_i \vartheta}\, d\vartheta \left\{ e^{p_i \vartheta} - \int_0^\vartheta Q(x) e^{p_i(\vartheta - x)} dx \right\}$$

$$= c_i \int_0^\gamma d\vartheta \left\{ 1 - \int_0^\vartheta Q(x)\, e^{-p_i x}\, dx \right\},$$

oder wegen $P(p_i) = 0$

$$= c_i \int_0^\gamma d\vartheta \int_\vartheta^\gamma Q(x)\, e^{-p_i x}\, dx$$

$$= c_i \int_0^\gamma dx\, Q(x)\, e^{-p_i x} \int_0^x d\vartheta$$

$$= c_i \int_0^\gamma x\, dx\, Q(x) e^{-p_i x}$$

$$= c_i P'(p_i).$$

Es ist also

$$c_i = \frac{1}{P'(p_i)}$$

und

$$Q(t) = \Re \sum \frac{e^{p_i t}}{P'(p_i)} = \Re \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{e^{pt}}{P(p)}\, dp, \tag{135}$$

wenn R die Integration in der komplexen Ebene über einen Kreis mit unendlich großem Radius andeutet.*)

Als allgemeine Lösung von (132) bei vorgeschriebenen Werten von φ für das Intervall 0 bis γ hat man also**)

$$\varphi(t) = \Re \sum \frac{e^{p_i t}}{P'(p_i)} \int_0^\gamma e^{-p_i \vartheta} F^*(\vartheta)\, d\vartheta - \Re \frac{1}{2\pi i} \int_0^\gamma \int_R \frac{e^{p(t-\vartheta)}}{P(p)} F^*(\vartheta)\, d\vartheta\, dp.$$

Hamburg, den 26. Dezember 1906.

---

*) Im Falle der Elektronentheorie kommt zu dieser Reihe, wie man durch ganz analoge Betrachtungen findet, außer einer Konstanten noch das Glied

$$\frac{-2}{\int_0^\gamma Q(x) x^2\, dx}\, t = \frac{5}{2}\, t$$

hinzu.

**) Eine ganz ähnliche Lösung für den Fall, daß von der Zeit $-\infty$ an die Kraft vorgeschrieben ist, hat mir Herr G. Herglotz brieflich mitgeteilt.

Berichtigung und Druckfehlerverzeichnis.

Herr J. Weiss aus Freiburg i. Br. macht mich gütigst darauf aufmerksam, daß ich auf Seite 25, Zeile 2 von unten das Integral längs $M'A'$ vergessen habe. Dieses besitzt aber nach (4), (6), (8) und (9) den *positiven* Wert $\frac{8}{5x}$, so daß der auf Seite 27 stehende gesperrt gedruckte Satz richtig bleibt. Hier kann man statt $\frac{4}{5}m$ sogar $\frac{8}{5}m$ schreiben, während es in den drei letzten Zeilen der vorigen Seite $\frac{16}{5x}m$ heißen muß.

S. 31, Zeile 2 der Anm. lies: nie statt wie.

S. 51, Zeile 9 v. o. lies: $\mathfrak{B}$ statt $\mathfrak{L}$.

S. 61, Zeile 13 v. o. lies: Vorgang statt Vorzug.

S. 66, Zeile 4 v. o. lies: $-\frac{3}{2}\varphi(t-2)$ statt $-\frac{3}{2}\varphi(t-x)$.

S. 67, Zeile 4 v. o. lies: $\int_0^2 \frac{3}{4}(2-x^2)(t-x)\, dx = t$.

Über die Integralgleichungen der Elektronentheorie.

Von

G. Herglotz in Göttingen.

Bei zwei Spezialfällen der Dynamik des mit gleichförmiger Volumladung ausgestatteten, kugelförmigen Elektrons, nämlich: a) der rein translatorischen, geradlinigen Bewegung mit unendlich kleiner Geschwindigkeit und b) der reinen Rotationsbewegung um eine unveränderliche Achse mit beliebiger Geschwindigkeit, geben die Sommerfeldschen Kraftausdrücke für den Zusammenhang zwischen Kraft und Elongation lineare Integralgleichungen der Form:

$$\text{(I)} \qquad f(t) = \varphi(t) - \int_0^1 \varphi(t-s)\,K(s)\,ds$$

und

$$\text{(II)} \qquad f(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(t-s)\,K(s)\,ds.$$

In beiden Gleichungen ist im ersten Falle:

a) $\qquad K(s) = 3 - 6s^2, \qquad 0 \leqq s \leqq 1,$ *)

und im zweiten Falle:

b) $\qquad K(s) = 5 - 30s^2 + 30s^4, \qquad 0 \leqq s \leqq 1$ **)

zu setzen.

Die von mir früher auf anderem Wege hergeleiteten und untersuchten Eigenschwingungen des Elektrons***) erscheinen hier als Lösungen der homogenen Integralgleichung I.

Mit der allgemeinen Lösung beider Integralgleichungen hat sich zuerst P. Hertz*) beschäftigt, und sie auf ein Verfahren sukzessiver Approximation gegründet — im wesentlichen die „Neumannsche Reihenentwicklung" —, auf welcher bei noch allgemeineren Integralgleichungen obiger Art

*) P. Hertz, Bewegung eines Elektrons. Math. Ann., dieser Bd., S. 1—86.
**) A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie. Gött. Nachr. 1904, S. 363—439.
***) G. Herglotz, Zur Elektronentheorie. Gött. Nachr. 1903, S. 357—382.

insbesondere auch V. Volterra basierte. Indessen sind hier noch einige Punkte unerledigt geblieben, so insbesondere der Nachweis, daß die erwähnten Eigenschwingungen die Gesamtheit der kräftefreien Bewegungen erschöpfen, und in Verbindung damit die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen. Dieser Umstand gab Veranlassung zu den folgenden Zeilen, welche zuerst die Lösung der Integralgleichungen (I) und (II) in einer andern — im wesentlichen auf dem Fourierschen Integraltheorem beruhenden — Form geben, und dann mit deren Hilfe die genannten Punkte untersuchen. In methodischer Hinsicht ähnliche, auf Cauchy (Oeuvres tome VII, série 2, pag. 393—430) zurückgehende Entwicklungen findet man insbesondere bei E. Picard, Traité d'analyse, II. 1. éd. p. 167 ff. 2. éd. p. 197 ff. und H. Poincaré, Propagation de la chaleur p. 181 ff.

I. Die lösenden Kerne $\mathfrak{K}(t)$ und $Q(t)$.

Die für das Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ gegebene, reelle Funktion $K(s)$ werde von beschränkter Schwankung vorausgesetzt und zur Erzielung einheitlicher Schreibweise auch noch außerhalb dieses Intervalles durch:

$$K(s) = 0 \quad \text{für} \quad s < 0 \quad \text{oder} \quad s > 1 \tag{1}$$

definiert, wonach in Gleichung (II) t alle positiven Werte durchlaufend gedacht werde, während es in Gleichung (I) aller reellen Werte überhaupt fähig ist. Bekanntlich hängt nun die Lösung der beiden Gleichungen bei beliebigem $f(t)$ ab von derjenigen der ihnen zugehörigen Resolventen:

$$K(t) = \varphi(t) - \int_0^1 \varphi(t-s)K(s)\,ds, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{I'}$$

$$K(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(t-s)K(s)\,ds, \qquad 0 < t < +\infty \tag{II'}$$

Diese zu bewerkstelligen, betrachte man das Integral:

$$X(x) = \int_0^1 K(s)e^{xsi}\,ds, \tag{2}$$

welches eine ganze transzendente Funktion der komplexen Variablen x darstellt, für die, unter M eine feste positive Zahl verstanden, die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |X| &< M\left|\frac{1}{x}\right| \quad \text{in der oberen Halbebene,} \\ |X| &< M\left|\frac{e^{xi}}{x}\right| \quad \text{in der unteren Halbebene} \end{aligned} \tag{3}$$

gelten, wie man durch Darstellung von $K(s)$ als Differenz zweier positiver

nie zu- oder nie abnehmender Funktionen, Trennung des Reellen vom Imaginären und Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes leicht beweist.*) Aus ihnen wiederum folgt**), daß die Gleichung:

$$(4) \qquad X(x) = 1$$

unendlich viele, paarweise symmetrisch zur imaginären x-Achse gelegene Wurzeln $\alpha_h (h = 1, 2, 3, \cdots)$ besitzt, von denen nur eine endliche Anzahl oberhalb einer beliebig vorgegebenen, zur reellen x-Achse parallelen Geraden liegen können, also insbesondere nur endlich viele der oberen Halbebene angehören und nur endlich viele reell sind. Doch mag der Fall reeller ebenso wie der mehrfacher Wurzeln vorläufig ausgeschlossen und einer nachträglichen Erörterung am Schlusse vorbehalten bleiben. Den Wurzeln α_h entsprechen die Lösungen:

$$(5) \qquad \varphi_h(t) = e^{-\alpha_h t i}, \qquad h = 1, 2, 3, \cdots$$

der homogenen Gleichung (I).

Dies vorausgeschickt, kann durch:

$$(6) \qquad \mathfrak{K}(t) = K(t) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^2}{1 - X} e^{-xti} dx$$

die reelle Funktion $\mathfrak{K}(t)$ für alle reellen Werte von t definiert werden. Dieselbe hat, weil das Integral gleichmäßig nach t konvergiert, die Eigenschaft, daß

$$(7) \qquad \mathfrak{K}(t) - K(t) \text{ stetig für alle } t$$

ist, und nach dem bekannten Verhalten derartiger trigonometrischer Integrale, daß

$$(7\text{a}) \qquad \lim \mathfrak{K}(t) = 0 \quad \text{für} \quad \lim t = \pm\infty.$$

---

*) Sind a und b ($> a$) die Grenzen des Integrals, so sind die rechten Seiten der Ungleichungen (3) bezw.: $M \left|\frac{e^{axi}}{x}\right|$ und $M \left|\frac{e^{bxi}}{x}\right|$. Ist ferner: $K(s) = K_1(s) - K_2(s)$, worin $K_1(s)$, $K_2(s)$ stets positiv sind, so ergibt sich auf die angegebene Art:

$$M = 4K_1(b-0) + 4K_2(b-0),$$

wenn $K_1(s)$, $K_2(s)$ nie abnehmen, dagegen:

$$M = 4K_1(a+0) + 4K_2(a+0),$$

wenn $K_1(s)$, $K_2(s)$ nie zunehmen. Anderer Beweis bei Poincaré l. c.

**) Es nimmt $X(x)$ in der Tat jeden beliebigen Wert C unendlich oft an, denn andernfalls wäre $X - C = \gamma(x)e^{g(x)}$, wo $\gamma(x)$ ein Polynom, $g(x)$ eine ganze transzendente Funktion bedeutet. Für letztere müßte, weil nach (3) $|X| < e^{|x|}$, $|x| > R_0$ ist, sein: $\Re g(x) < |x| + h$, also nach einem Hadamardschen Satz $g(x) = \alpha x + \beta$, wo noch wegen (3) $\alpha = i$ sein müßte. Die Form $X = C + \gamma(x)e^{ix+\beta}$ ist aber mit (3) unverträglich.

Genauer geben das asymptotische Verhalten die späteren Gleichungen (9) und (9a).

Schreibt man nun in (6) $t-s$ statt t, multipliziert beiderseits mit $K(s)$ und integriert nach s von 0 bis 1, so folgt:

$$\int_0^1 \mathfrak{K}(t-s)\,K(s)\,ds = \int_0^1 K(s)\,K(t-s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 K(s)\,ds \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^2}{1-X}\,e^{-x(t-s)i}\,dx.$$

Das einfache Integral rechts ist nun eine stetige Funktion von t mit beschränkter Schwankung*), die außerhalb des Intervalls $0 < t < 2$ verschwindet, sie gestattet somit (C. Jordan, Cours d'analyse II, 2 éd. p. 233) die Darstellung durch das Fouriersche Integral, für welche man ohne weiteres findet:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{-xti}\,dx.$$

In dem Doppelintegral rechts aber kann, weil das Integral nach x gleichmäßig nach s konvergiert, die Integrationsfolge umgekehrt werden**), wodurch es übergeht in:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^3}{1-X}\,e^{-xti}\,dx.$$

Beides zusammengenommen ergibt nach (6): $\mathfrak{K}(t) - K(t)$, so daß sich obige Gleichung schreiben läßt:

$$K(t) = \mathfrak{K}(t) - \int_0^1 \mathfrak{K}(t-s)\,K(s)\,ds. \tag{8}$$

Es ist also in $\mathfrak{K}(t)$ eine Lösung der Resolvente (I'), *d. h. ein lösender Kern der Integralgleichung* (I) *gefunden.*

---

*) Ist allgemein $h(s)$ endlich, integrabel, und $g(s)$ von beschränkter Schwankung, so ist $f(t) = \int_0^1 h(s)\,g(t-s)\,ds$ ebenfalls von beschränkter Schwankung, denn es ist $f(t)$ monoton, wenn $h(s)$ positiv und $g(s)$ monoton ist. Die Stetigkeit von $f(t)$ folgt wegen der Endlichkeit von $h(s)$ aus dem Satz, daß für integrables $g(s)$:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^1 |g(t+\delta-s) - g(t-s)|\,ds = 0$$

ist (vgl. H. Lebesgue, Series trigonometriques, p. 15. Der Satz gilt auch für das hier zugrundegelegte Riemannsche Integral).

**) Bei den iterierten eigentlichen Integralen kann hier und im folgenden die Integrationsfolge stets vertauscht werden, weil jedesmal das zugehörige Doppelintegral existiert (vgl. C. Jordan, Cours d'analyse I, p. 42ff.).

Für die Integralgleichung (II) verhilft zum gleichen Ziel eine Transformation des Ausdruckes von $\mathfrak{K}(t)$ für negative t. Diese zu bewerkstelligen, integriere man die Funktion $\frac{X^2}{1-X}e^{-xti}$ längs des geschlossenen Weges, der von dem Stücke $-R \leqq x \leqq +R$ der reellen Achse und dem der oberen Halbebene angehörigen Halbkreise $x = Re^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gebildet ist und, R bereits genügend groß gedacht, alle der oberen Halbebene angehörigen Wurzeln α_h einschließt.

Nach dem Residuensatz folgt sofort:

$$\int_{-R}^{+R} \frac{X^2}{1-X} e^{-xti} dx + \int_0^\pi \frac{X^2}{1-X} e^{-xti} d(Re^{i\varphi}) = -i \sum_h{}' \frac{e^{-\alpha_h ti}}{X'(\alpha_h)},$$

wo im zweiten Integrale $x = Re^{i\varphi}$ zu setzen ist, und der dem Summenzeichen beigefügte obere Akzent andeuten soll, daß dieselbe bloß über die der oberen Halbebene angehörigen Wurzeln α_h zu erstrecken ist. Läßt man hier R über alle Grenzen wachsen, so konvergiert für $t < 0$ das erste Integral nach $\mathfrak{K}(t)$, für das zweite aber hat man nach (3) bei genügend großem R:

$$\left|\int_0^\pi \frac{X^2}{1-X} e^{-xti} d(Re^{i\varphi})\right| < \int_0^\pi \left|\frac{X^2}{1-X}\right| e^{Rt\sin\varphi} R\,d\varphi < \frac{M^2}{R\left(1-\frac{M}{R}\right)} \int_0^\pi e^{Rt\sin\varphi}\,d\varphi,$$

so daß dieses für $t < 0$ mit $\frac{1}{R}$ nach Null konvergiert, und so das gewünschte Resultat folgt:

$$\mathfrak{K}(t) = -i \sum_h{}' \frac{e^{-\alpha_h ti}}{X'(\alpha_h)}, \qquad t < 0. \tag{9}$$

Bildet man jetzt die neue reelle Funktion:

$$Q(t) = \mathfrak{K}(t) + i \sum_h{}' \frac{e^{-\alpha_h ti}}{X'(\alpha_h)}, \tag{10}$$

so wird für diese unmittelbar sein:

$$Q(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0, \tag{11}$$

und nach (7) und (7a) folgen, daß

$$Q(t) - K(t) \text{ stetig für alle } t, \tag{11a}$$

und daß

$$Q(t) \sim \sum_h{}' \frac{e^{-\alpha_h ti}}{X'(\alpha_h)} \quad \text{für} \quad \lim t = +\infty \tag{11b}$$

ist, also $Q(t)$ mit t im allgemeinen exponentiell über alle Grenzen wächst.

Da nun $Q(t) - \mathfrak{K}(t)$ nach (10) eine Lösung der homogenen Integralgleichung (I) darstellt, so wird für $Q(t)$ genau die gleiche Relation (8) gelten wie für $\mathfrak{K}(t)$, sich aber wegen (11) schreiben:

$$K(t) = Q(t) - \int_0^t Q(t-s) K(s) ds. \tag{12}$$

Es ist also in $Q(t)$ eine Lösung der Resolvente (II'), *d. h. ein lösender Kern der Integralgleichung* (II) *gefunden.*

Mittels desselben ergibt sich nun in bekannter Weise die Lösung von (II) zu:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t f(t-s) Q(s) ds, \tag{II''}$$

indem man vermöge (12) zeigt, daß aus (II) wie aus (II'') folgt:

$$\int_0^t \varphi(t-s) K(s) ds = \int_0^t f(t-s) Q(s) ds,$$

also eine Gleichung aus der andern sich ableiten läßt, unter alleiniger Voraussetzung der Endlichkeit und Integrabilität von $f(t)$ und $\varphi(t)$.

Sei ferner in Gleichung (I) $\varphi(t)$ für $-1 < t < 0$ und $f(t)$ für $t > 0$ gegeben, dagegen $\varphi(t)$ für $t > 0$ gesucht, so läßt sie sich in der Form schreiben:

$$f(t) + \int_t^1 \varphi(t-s) K(s) ds = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(t-s) K(s) ds,$$

wo nun die linke Seite für $t > 0$ bekannt ist, und daher durch (II) und (II'') nach kurzer Ausrechnung folgt:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t f(t-s) Q(s) ds + \int_0^1 \varphi(-s) G(t,s) ds. \tag{I''}$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} G(t,s) &= K(t+s) + \int_0^t K(t+s-r) Q(r) dr \qquad t>0,\ 0<s<1 \\ &= Q(t+s) - \int_t^{t+1} K(t+s-r) Q(r) dr, \end{aligned} \tag{13}$$

welche Ausdrücke zu erkennen geben, daß $f(t) = K(t+s)$ und $\varphi(t) = G(t,s)$ durch (II) und (II'') miteinander zusammenhängen.

Nebenbei mögen noch die beiden Lösungen von (I):

$$(\mathrm{I}''') \qquad \varphi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\, \mathfrak{K}(s)\, ds,$$

$$(\mathrm{I}'''') \qquad \varphi(t) = f(t) + \int_{0}^{\infty} f(t-s)\, Q(s)\, ds$$

erwähnt sein, bei denen $f(t)$ beidemal leicht ersichtlichen Bedingungen im Unendlichen unterliegt, und die sich durch ähnliche, $\varphi(t)$ aufzuerlegende Bedingungen beide eindeutig charakterisieren lassen.

Aus Gleichung (12) und (10) folgt nach Anmerkung *) Seite 90, daß $Q(t)$ und $\mathfrak{K}(t)$ beide von beschränkter Schwankung sind.

II. Entwicklungen nach den Funktionen $\varphi_h(t)$.

Um zu diesen zu gelangen, wird vor allem der asymptotische Ausdruck von $X(x)$ für die untere Halbebene nötig, der nunmehr abgeleitet werden möge, wobei über $K(t)$ noch die besondere Annahme:

$$(14) \qquad K(1-0) = a + 0$$

gemacht werden soll. Wird dann $0 < \sigma < 1$ gedacht, so ist zunächst identisch:

$$(15) \qquad X = a\,\frac{e^{xi}}{xi}\,(1+\varrho),$$

wenn ϱ durch

$$(16) \qquad a\,\frac{e^{xi}}{xi}\,\varrho = \int_0^\sigma K(s)\, e^{xsi}\, ds + \int_\sigma^1 (K(s)-a)\, e^{xsi}\, ds - a\,\frac{e^{\sigma xi}}{xi}$$

definiert wird. Sei nunmehr $x = p - iq$, $q > 0$, so gilt nach Anmerkung*) Seite 89:

$$\left|\int_0^\sigma K(s)\, e^{xsi}\, ds\right| < N \left|\frac{e^{\sigma xi}}{x}\right|,$$

also, wenn noch

$$(17) \qquad \lambda = \left|\frac{xe^{-xi}}{a}\int_\sigma^1 (K(s)-a)\, e^{xsi}\, ds\right|$$

gesetzt wird:

$$(18) \qquad |\varrho| < \left(1 + \frac{N}{|a|}\right) e^{-(1-\sigma)q} + \lambda.$$

Ist weiter der über $K(s)$ gemachten Voraussetzung gemäß:

$$K(s) = K_1(s) - K_2(s),$$

wo K_1, K_2 positiv, nie abnehmend sind, so wird, wenn man von der speziellen Darstellung

$$K(s) - a = (K_2(1-0) - K_2(s)) - (K_1(1-0) - K_1(s))$$

als Differenz zweier positiver, nie zunehmender Funktionen Gebrauch macht, wieder nach Anmerkung *) Seite 89,

$$(19)\qquad \lambda < \frac{4}{|a|}(K_1(1-0)-K_1(\sigma)) + \frac{4}{|a|}(K_2(1-0)-K_2(\sigma)).$$

Indem man somit zuerst $1-\sigma$ genügend klein, dann q genügend groß wählt, erhält man zu vorgegebenem ε ein q_0 derart, daß:

$$(15a)\qquad |\varrho| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x = p - iq, \qquad q \geqq q_0.$$

Durch (15) und (15a) ist der gesuchte asymptotische Ausdruck†) von $X(x)$ für die untere Halbebene gegeben.

Aus ihm folgt noch leicht für die Wurzeln α_k das asymptotische Verhalten:

$$(20)\qquad \alpha_k \sim 2n\pi - i \lg \frac{2n\pi i}{a},$$

wenn n, alle ganzzahligen positiven und negativen Werte annehmend, über alle Grenzen wächst.

Als erste Anwendung desselben und zugleich als Vorbereitung für das weitere mag vorab ein zu (9) analoger Ausdruck von $\mathfrak{K}(t)$ für $t > 0$ hergestellt werden. Zu diesem Zwecke werde die Funktion $\frac{X}{1-X} e^{-xti}$ längs des der untern Halbebene angehörigen Rechteckes mit den Ecken

$$(21)\qquad \begin{array}{lll} x_1 = -2n\pi(1+i), & x_2 = 2n\pi(1-i), & \\ x_3 = 2n\pi, & x_4 = -2n\pi, & n \text{ positiv ganz,} \end{array}$$

integriert, was nach dem Residuensatz ergibt:

$$(22)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-2n\pi}^{+2n\pi} \frac{X}{1-X} e^{-xti}\,dx = i\sum_k \frac{e^{-\alpha_k ti}}{X'(\alpha_k)} - R_n,$$

$$(22a)\qquad \begin{aligned} R_n &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{X}{1-X} e^{-xti}\,dx + \int_{x_3}^{x_2} \frac{X}{1-X} e^{-xti}\,dx + \int_{x_1}^{x_4} \frac{X}{1-X} e^{-xti}\,dx \\ &= J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle innerhalb des Rechteckes gelegenen Wurzeln α_k zu erstrecken ist. Um in dieser Gleichung jetzt zur Grenze für $n = \infty$

†) Sind die Grenzen des Integrals a und b ($> a$), so lautet die linke Seite von (15):

$$K(b-0)\frac{e^{axi}}{xi}(1+\varrho).$$

Ein anderer Beweis des asymptotischen Ausdruckes für das engere Gebiet $x = Re^{i\varphi}$, $\pi + \eta < \varphi < 2\pi - \eta$, $\eta > 0$ bei H. Poincaré l. c.

überzugehen, gilt es, das asymptotische Verhalten von R_n, also von J_1, J_2, J_3 aufzusuchen.

Setzt man im Integrale J_1: $x = 2n\pi(z - i)$, so wird es:

$$J_1 = 2n\pi e^{-2n\pi t} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-2n\pi t z i}}{1 - \frac{1}{X}} \, dz$$

und da nach (15) und (15a):

$$\frac{1}{X} = \frac{2n\pi(1+iz)}{a(1+\varrho)} e^{-2n\pi(1+iz)}$$

für alle $-1 \leqq z \leqq +1$ mit $\frac{1}{n}$ gleichmäßig nach Null geht, so wird der asymptotische Wert von J_1:

$$(\alpha) \qquad J_1 \sim 2 \frac{\sin 2n\pi t}{t} e^{-2n\pi t}.$$

Das Integral J_2 werde, unter k eine feste, positive Zahl $< \frac{1}{M}$ verstanden, in die Summe von zwei andern zerlegt:

$$J_2 = \int_{2n\pi - i\lg 2n\pi k}^{2n\pi - i 2n\pi} \frac{X}{1-X} e^{-xti} dx + \int_{2n\pi}^{2n\pi - i\lg 2n\pi k} \frac{X}{1-X} e^{-xti} dx = J_2' + J_2''.$$

Durch die Substitution: $x = 2n\pi - i \lg 2n\pi z$ geht nun das erste Integral unter Benutzung von (15) über in:

$$J_2' = i \frac{e^{-2n\pi t i}}{(2n\pi)^t} \int_k^{\frac{e^{2n\pi}}{2n\pi}} \frac{1+\sigma}{z - \frac{i}{a}} \frac{dz}{z^t},$$

wo gesetzt ist:

$$\frac{X}{X-1} = \frac{z}{z - \frac{i}{a}}(1+\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{a(1+\varrho)} \frac{\frac{\lg 2n\pi z}{2n\pi z} - \frac{i\varrho}{z}}{1 - \frac{\lg 2n\pi z}{2n\pi a(1+\varrho) z} - \frac{i}{a(1+\varrho)z}}.$$

Bei Heranziehung von (15a) erkennt man, daß bei genügend großem n_0 sicher

$$|\sigma| < \frac{1}{\vartheta |a(1+\varrho)|} \left| \frac{\lg 2n\pi z}{2n\pi z} - \frac{i\varrho}{z} \right| \quad \text{für } n \geqq n_0,\ z \geqq k$$

ist, unter ϑ einen festen, echten Bruch verstanden, und damit wieder nach (15a), daß σ für alle $z \geqq k$ mit $\frac{1}{n}$ gleichmäßig nach Null geht, daher der asymptotische Wert von J_2' wird:

$$(\beta) \qquad J_2' \sim i\,\frac{e^{-2n\pi t i}}{(2n\pi)^t}\int\limits_k^\infty \frac{1}{z-\frac{i}{a}}\,\frac{dz}{z^t}.$$

Wird weiter in J_2'' gesetzt: $x = 2n\pi - iz$, so ist für dieses Integral nach (3):

$$\left|\frac{X}{1-X}\,e^{-xti}\right| < \frac{M}{1-Mk}\,\frac{e^{(1-t)z}}{2n\pi}$$

und daher:

$$(\gamma) \qquad |J_2''| < \frac{1}{2n\pi}\,\frac{M}{1-Mk}\int\limits_0^{\lg 2n\pi k} e^{(1-t)z}\,dz.$$

Da schließlich J_3 konjugiert komplex zu J_2 ist, so ist sein Verhalten durch das von J_2 mitgegeben.

Alles zusammengefaßt ergibt, daß:

$$(23) \qquad \lim_{n=\infty} R_n = 0, \qquad t > 0$$

ist, und zwar gleichmäßig für jedes endliche Intervall von t, das die Punkte $t = 0$ und $t = 1$ nicht enthält.

Den Grenzwert der linken Seite von Gleichung (22) für $n = \infty$ zu finden, bemerke man, daß nach dem Fourierschen Theorem:

$$(24) \qquad \overline{K}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} X e^{-xti}\,dx$$

ist, wenn wie im folgenden allgemein bei reellen Funktionen ein über dieselbe gesetzter Strich andeutet, daß an den gewöhnlichen Diskontinuitätspunkten das arithmetische Mittel aus dem rechts- und linksseitigen Limes der Funktionswerte zu nehmen ist. Nach (6) wird hiermit:

$$(25) \qquad \overline{\mathfrak{K}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{X}{1-X}\,e^{-xti}\,dx,$$

so daß Gleichung (22) für $n = \infty$ übergeht in:

$$(9\text{a}) \qquad \overline{\mathfrak{K}}(t) = i\sum\nolimits_{,}^{k} \frac{e^{-\alpha_k t i}}{X'(\alpha_k)}, \quad t > 0,$$

wo der der Summe beigesetzte untere Akzent anzeigen soll, daß dieselbe bloß über die der untern Halbebene angehörigen Wurzeln α_k zu erstrecken ist. Nach (10) folgt hiermit:

$$(10\text{a}) \qquad \overline{Q}(t) = i\sum_1^{\infty}{}^{k}\,\frac{e^{-\alpha_k t i}}{X'(\alpha_k)}, \qquad t > 0.$$

Diese spezielle Entwicklung vorausgeschickt, sei jetzt $f(t)$ eine für $0 \leqq t \leqq 1$ beliebig gegebene, reelle Funktion von beschränkter Schwankung, und werde der neue Ausdruck:

$$\frac{\int_0^1 f(s) e^{xsi}\, ds}{1-X}\, e^{-xti}$$

ebenfalls längs des Rechteckes mit den Ecken (21) integriert, so ergibt sich nach dem Residuensatz an Stelle von (23):

$$(26) \qquad i \sum_k \frac{\varphi_k(t)}{X'(\alpha_k)} \int_0^1 f(s)\, e^{\alpha_k s i}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-2n\pi}^{+2n\pi} \frac{\int_0^1 f(s) e^{xsi}\, ds}{1-X}\, e^{-xti}\, dx + S_n,$$

wo die Summe über alle innerhalb des Rechteckes gelegenen Wurzeln α_k zu erstrecken ist, und S_n aus dem früheren R_n dadurch hervorgeht, daß man in jedem der dortigen Teilintegrale J_1, J_2, J_3 dem Integranden noch den Faktor $\frac{1}{X}\int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds$ beifügt. Nun ist aber analog zu (3) in der untern Halbebene

$$\left| \int_0^1 f(s) e^{xsi}\, ds \right| < N \left| \frac{e^{xi}}{x} \right|,$$

also nach (15)

$$\left| \frac{1}{X} \int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds \right| < \frac{N}{|a(1+\varrho)|},$$

und es bleibt daher nach (15a) dieser Faktor für die Integrale J_1 und J_2', absolut genommen, unterhalb einer von n und x unabhängigen Schranke, wonach aus den gefundenen Ausdrücken dieser Integrale leicht zu erkennen ist, daß auch die ihnen entsprechenden Bestandteile von S_n mit $\frac{1}{n}$ nach Null gehen. Von dem J_2'' entsprechenden Integrale von S_n aber folgt wie früher direkt, daß es absolut genommen kleiner als

$$\frac{1}{2n\pi}\, \frac{N}{1-Mk} \int_0^{\lg 2n\pi k} e^{(1-t)z}\, dz$$

ist, also ebenfalls mit $\frac{1}{n}$ nach Null geht. Hiernach ist also wieder

$$(27) \qquad \lim_{n=\infty} S_n = 0, \qquad t > 0,$$

und zwar gleichmäßig für jedes endliche Intervall von t, das die Punkte $t=0$ und $t=1$ nicht enthält.

Den Grenzwert des Integrals in (26) für $n=\infty$ zu finden, bemerke man, daß nach dem Fourierschen Theorem erstens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-xti} \int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds = \begin{cases} \bar{f}(t), & 0<t<1 \\ 0\;, & 1<t \end{cases}$$

ist, daß zweitens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-xti}\, X \int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds = \int_0^1 f(s)\, K(t-s)\, ds$$

ist, weil die Funktion von t rechts nach Anmerkung *) Seite 90 die Darstellung durch das Fouriersche Integral gestattet und diese gerade den Ausdruck links liefert, und daß drittens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-xti}\, \frac{X^2}{1-X} \int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 ds\, f(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^2}{1-X}\, e^{-x(t-s)i}\, dx$$

ist, weil das Integral nach x gleichmäßig für alle $0 \leqq s \leqq 1$ konvergiert.

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt mit Rücksicht auf (8):

$$(28)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^1 f(s)\, e^{xsi}\, ds}{1-X}\, e^{-xti}\, dx = \begin{cases} \bar{f}(t) + \int_0^1 f(s)\, \mathfrak{K}(t-s)\, ds, & 0<t<1 \\ \int_0^1 f(s)\, \mathfrak{K}(t-s)\, ds, & 1<t, \end{cases}$$

und somit geht Gleichung (26) für $n=\infty$ über in:

$$(29)\quad i \sum_h{}' \frac{\varphi_h(t)}{X'(\alpha_h)} \int_0^1 f(s)\, e^{\alpha_h si}\, ds = \begin{cases} \bar{f}(t) + \int_0^1 f(s)\, \mathfrak{K}(t-s)\, ds, & 0<t<1 \\ \int_0^1 f(s)\, \mathfrak{K}(t-s)\, ds, & 1<t \end{cases}$$

oder nach (10):

$$(30)\quad i \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_h(t)}{X'(\alpha_h)} \int_0^1 f(s)\, e^{\alpha_h si}\, ds = \begin{cases} \bar{f}(t) + \int_0^t f(s)\, Q(t-s)\, ds, & 0<t<1 \\ \int_0^1 f(s)\, Q(t-s)\, ds, & 1<t. \end{cases}$$

Sei jetzt $\varphi(t)$ eine für $0 \leqq t \leqq 1$ beliebig gegebene reelle Funktion von beschränkter Schwankung, so setze man in (30):

$$f(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(s) K(t-s)\, ds, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

was nach Anmerkung *) Seite 90 in der Tat eine Funktion der vorausgesetzten Art ist, also auf Grund von (II) und (II″), wegen der Stetigkeit des Integrals:

$$\bar{f}(t) + \int_0^t f(s)\, Q(t-s)\, ds = \bar{\varphi}(t),$$

und man erhält sofort die gesuchte *Entwicklung der willkürlichen Funktion* $\varphi(t)$:

$$(31) \qquad \bar{\varphi}(t) = i \sum_1^\infty \frac{\varphi_h(t)}{X'(\alpha_h)} \int_0^1 ds\, \varphi(s)\, e^{\alpha_h s i} \int_{1-s}^1 K(r)\, e^{\alpha_h r i}\, dr, \quad 0 < t < 1.$$

Diese konvergiert nach obigem auch noch für alle $t > 1$ und stellt für diese die stetige Funktion:

$$\int_0^1 f(s)\, Q(t-s)\, ds = \int_0^1 \varphi(s)\, G(t-1,\ 1-s)\, ds$$

dar, also, wie aus (I″) leicht zu erkennen, jene Lösung der homogenen Integralgleichung (I), welche für $0 < t < 1$ mit $\varphi(t)$ zusammenfällt.

Man ersieht ferner, daß die Form der Koeffizienten der Entwicklung (31) mit den ohne weiteres zu verifizierenden Integraleigenschaften der $\varphi_k(t)$:

$$(32) \qquad \int_0^1 dt\, \varphi_k(t)\, e^{\alpha_h t i} \int_{1-t}^1 K(s)\, e^{\alpha_h s i}\, ds = \begin{cases} 0, & h \neq k \\ \frac{1}{i} X'(\alpha_h), & h = k \end{cases}$$

eng zusammenhängt.

III. Entwicklungen nach den Funktionen $f_h(t)$.

Den Funktionen $\varphi_h(t)$ entsprechen durch die Integralgleichung (II) die neuen Funktionen

$$(33) \qquad f_h(t) = e^{-\alpha_h t i} \int_t^1 K(s)\, e^{\alpha_h s i}\, ds, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

für welche aus (32) durch Vertauschung von h mit k und t mit $1-t$ die Integraleigenschaften:

$$(34)\qquad \int_0^1 f_h(t)\, e^{\alpha_k t i}\, dt = \begin{cases} 0, & h \neq k \\ \frac{1}{i} X'(\alpha_k), & h = k \end{cases}$$

folgen, was zur Vermutung führt, daß auch nach ihnen sich willkürliche Funktionen entwickeln lassen. Dies zu bestätigen, seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei für $0 \leqq t \leqq 1$ beliebig gegebene reelle Funktionen von beschränkter Schwankung, und man integriere den Ausdruck:

$$(35)\qquad F(x) = \frac{e^{-x t i}}{1 - X} \int_0^t f(s)\, e^{x s i}\, ds \int_t^1 g(s)\, e^{x s i}\, ds$$

längs des geschlossenen Weges, der gebildet ist von dem Halbkreise $x = 2n\pi e^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ und den drei Seiten $(x_4 x_1)$, $(x_1 x_2)$, $(x_2 x_3)$ des Rechteckes mit den Ecken (21). Der Residuensatz ergibt sofort:

$$(36)\qquad \begin{aligned} i \sum_k \frac{e^{-\alpha_k t i}}{X'(\alpha_k)} \int_0^t f(s) e^{\alpha_k s i} ds \int_t^1 g(s) e^{\alpha_k s i} ds = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(2n\pi e^{i\varphi})\, d2n\pi e^{i\varphi} + \int_{x_2}^{x_1} F(x)\, dx + \int_{x_3}^{x_2} F(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_4} F(x)\, dx \\ = J_0 \quad + \quad J_1 \quad + \quad J_2 \quad + \quad J_3, \end{aligned}$$

wo die Summe über alle innerhalb des Integrationsweges gelegenen Wurzeln zu erstrecken ist, und es gilt wieder in dieser Gleichung zur Grenze für $n = \infty$ überzugehen.

Nach Anmerkung *) Seite 89 ist in der oberen Halbebene für $r = 2n\pi e^{i\varphi}$:

$$\left| \int_0^t f(s)\, e^{x s i}\, ds \right| < \frac{M_1}{2n\pi}, \quad \left| \int_t^1 g(s)\, e^{x s i}\, ds \right| < \frac{M_2}{2n\pi} |e^{x t i}|,$$

also:

$$|J_0| < \frac{M_1 M_2}{4n\pi - 2M}$$

und

$$(a)\qquad \lim_{n=\infty} J_0 = 0.$$

Mit den Integralen J_1, J_2, J_3 kann jetzt ebenso wie Seite 95 und 96 mit den gleichbezeichneten Integralen verfahren werden. Bei J_1, J_2' zunächst benütze man den Umstand, daß den dortigen Integranden einfach der Faktor

$$\frac{1}{X} \int_0^t f(s)\, e^{x s i}\, ds \int_t^1 g(s)\, e^{x s i}\, ds$$

beizufügen ist, um die entsprechenden Integrale hier zu erhalten.

Nun ist aber nach Anmerkung †) Seite 94:

$$\int_0^t f(s)\, e^{xsi} ds = f(t-0)\,\frac{e^{xti}}{xi}\,(1+\varrho_1), \quad \int_t^1 g(s) e^{xsi} ds = g(1-0)\,\frac{e^{xt}}{xi}\,(1+\varrho_2)$$

$$|\varrho_1| < \varepsilon, \quad |\varrho_2| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x = p - iq, \quad q > q_0,$$

also unter Hinzunahme von (15) und (15a)

$$\frac{1}{X}\int_0^t f(s)\, e^{xsi} ds \int_t^1 g(s)\, e^{xsi} ds = \frac{1}{a}\, g(1-0) f(t-0)\,\frac{e^{xti}}{xi}\,(1+\delta),$$

$$|\delta| < \eta \quad \text{für} \quad x = p - qi, \quad q > q',$$

und sonach unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} J_1 = \frac{1}{2a\pi}\, g(1-0) f(t-0) \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{1+iz} = \frac{1}{4a}\, g(1-0) f(t-0),$$

$$\lim_{n=\infty} J_2' = \frac{1}{2a\pi}\, g(1-0)\, f(t-0) \lim_{m=\infty} \int_k^{\frac{e^m}{m}} \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{a}\right)(m - i \lg mz)}$$

$$= \frac{\pi + i \lg 4}{8a\pi}\, g(1-0) f(t-0)^{*)}.$$

---

*) Geht M mit m so nach Unendlich, daß gleichwohl $\lim \frac{\lg M}{m} = 0$ wird, so ist, weil

$$\left| \int_k^M \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{a}\right)(m - i \lg mz)} \right| < \frac{1}{m} \int_k^M \frac{dz}{z} = \frac{\lg M - \lg k}{m},$$

der Grenzwert dieses Integrals Null, also:

$$\lim_{m=\infty} \int_k^{\frac{e^m}{m}} \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{a}\right)(m - i \lg mz)} = \lim_{m=\infty} \int_M^{\frac{e^m}{m}} \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{a}\right)(m - i \lg mz)}$$

$$= \lim_{m=\infty} \int_M^{\frac{e^m}{m}} \frac{d \lg z}{m - i \lg mz} \quad \text{oder, } x = \frac{\lg mz}{m} \text{ gesetzt:} \quad = \int_0^1 \frac{dx}{1 - ix}.$$

Für J_2'' aber folgt, weil nach Anmerkung *) Seite 89:

$$\left|\int_0^t f(t)e^{xsi}ds\right| < \frac{M_1}{2n\pi}e^{qt}, \quad \left|\int_t^1 g(s)e^{xsi}ds\right| < \frac{M_2}{2n\pi}e^{q} \text{ für } x=2n\pi-iq,\ q>0$$

ist,

$$|J_2''| < \frac{1}{2n\pi}\frac{M_1M_2}{1-Mk}\int_0^{\lg 2n\pi k} e^q dq = \frac{M_1M_2}{1-Mk}\frac{2n\pi k-1}{(2n\pi k)^2},$$

d. h.:

$$\lim_{n=\infty} J_2'' = 0,$$

also:

(b) $$\lim_{n=\infty} J_2 = \frac{\pi+i\lg 4}{8a\pi}g(1-0)f(t-0)$$

und analog:

(c) $$\lim_{n=\infty} J_3 = \frac{\pi-i\lg 4}{8a\pi}g(1-0)f(t-0).$$

Es geht hiernach Gleichung (36) für $n=\infty$ über in:

$$(37)\quad \frac{1}{2a}g(1-0)f(t-0) = i\sum_1^\infty \frac{e^{-\alpha_k ti}}{X'(\alpha_k)}\int_0^t f(s)e^{\alpha_k si}ds\int_t^1 g(s)e^{\alpha_k si}ds,\ 0<t<1.^{*)}$$

Setzt man nun in dieser Gleichung einmal $K(s)$ für $g(s)$, ein andermal $K(s)$ für $f(s)$ und gleichzeitig $f(s)$ für $g(s)$, so folgen die beiden neuen Gleichungen:

$$\frac{1}{2}f(t-0) = i\sum_1^\infty \frac{e^{-\alpha_k ti}}{X'(\alpha_k)}\int_t^1 K(s)e^{\alpha_k si}ds\int_0^t f(s)e^{\alpha_k si}ds, \qquad 0<t<1,$$

$$\frac{1}{2a}f(1-0)K(t-0) = i\sum_1^\infty \frac{e^{-\alpha_k ti}}{X'(\alpha_k)}\int_0^t K(s)e^{\alpha_k si}ds\int_t^1 f(s)e^{\alpha_k si}ds, \qquad 0<t<1,$$

und wenn weiter in Gleichung (3a) die Funktion f für alle Argumentwerte kleiner als t gleich Null angenommen wird, so geht diese über in:

$$\frac{1}{2}f(t+0) = i\sum_1^\infty \frac{e^{-\alpha_k ti}}{X'(\alpha_k)}\int_t^1 f(s)e^{\alpha_k si}ds, \qquad 0<t<1.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen, nachdem noch zuvor die zweite

*) Der Beweis dieser Gleichung ist zunächst unter der stillschweigenden Annahme $g(1-0)\neq 0$, $f(t-0)\neq 0$ geführt, sie gilt aber auch im entgegengesetzten Fall. Denn wäre z. B. $g(1-0)=0$, so setze man in (37) an Stelle von $g(s)$ einmal $g(s)-1$, ein andermal 1 und addiere die beiden Relationen.

beiderseits mit — 1 multipliziert worden ist, folgt endlich die gewünschte *neue Entwicklung:*

$$(38) \quad \bar{f}(t) - \frac{1}{2a} f(1-0)\, K(t-0) = i \sum_1^\infty{}_h \frac{f_h(t)}{X'(\alpha_h)} \int_0^1 f(s) e^{\alpha_h s i} ds, \qquad 0<t<1.$$

Noch mögen hier die aus dem vorhergehenden unmittelbar abzuleitenden speziellen Entwicklungen zusammengestellt werden:

$$i \sum_1^\infty{}_h \frac{\varphi_h(t)}{X'(\alpha_h)} = \bar{Q}(t), \quad t>0; \qquad i \sum_1^\infty{}_h \frac{f_h(t)}{X'(\alpha_h)} = \frac{1}{2} K(t+0), \quad 0<t<1,$$

$$(39) \quad \begin{cases} i \sum_1^\infty{}_h \dfrac{\varphi_h(t)\, \varphi_h(s)}{X'(\alpha_h)} = \bar{Q}(t+s), & t>0,\ s>0, \\[2ex] i \sum_1^\infty{}_h \dfrac{f_h(t)\, f_h(s)}{X'(\alpha_h)} = \bar{K}(t+s), & 0<t<1,\ 0<s<1, \\[2ex] i \sum_1^\infty{}_h \dfrac{\varphi_h(t)\, f_h(s)}{X'(\alpha_h)} = \bar{G}(t,s), & t>0,\ 0<s<1, \end{cases}$$

und bemerkt sein, daß sich auf dem gleichen Wege wie oben weitere zu (37) analoge Relationen herstellen lassen, wie z. B.:

$$(40) \quad \begin{aligned} i \sum_1^\infty{}_h \frac{e^{-\alpha_h t i}}{X'(\alpha_h)} \int_0^t f(s) e^{i\alpha_h s} ds \int_0^t g(s) e^{i\alpha_h s} ds = \\ = \int_0^t g(t-s) \left(f(s) + \int_0^s f(r)\, Q(s-r)\, dr \right) ds \\ = \int_0^t f(t-s) \left(g(s) + \int_0^s g(r)\, Q(s-r)\, dr \right) ds. \end{aligned}$$

IV. Schlußbemerkungen.

Der beiseite gelassene Fall, daß eine, notwendig endliche, Anzahl reeller Wurzeln α_h auftritt, läßt sich dadurch unter das frühere mit einbegreifen, daß man bei dem in der Definitionsgleichung (6) von $\mathfrak{K}(t)$ auftretenden Integral den längs der reellen x-Achse hinlaufenden Integrationsweg den reellen Wurzeln α_h in kleinen der oberen Halbebene angehörigen Halbkreisen ausweichen läßt, und ebenso bei den analogen späterhin auftretenden Integralen verfährt. Rechnet man dann noch die reellen Wurzeln α_h der untern Halbebene zu, so bleiben alle Schlüsse und Resultate ungeändert, ausgenommen Gleichung (7a) und (11b). An Stelle von (7a) ergibt sich vielmehr aus den auch jetzt noch geltenden Gleichungen (9) und (9a) gemäß der eben gemachten zweiten Festsetzung:

$$\lim \mathfrak{R}(t) = 0 \quad \text{für} \quad t = -\infty,$$

$$\mathfrak{R}(t) \sim i \sum_k \frac{e^{-\alpha_k s i}}{X'(\alpha_k)} \quad \text{für} \quad t = +\infty,$$

wo die Summe über die reellen Wurzeln α_k zu erstrecken ist; eben diese Summe ist dann in der Gleichung (11b) noch rechts hinzuzufügen. Es existiert in diesem Falle daher überhaupt kein lösender Kern von (I), welcher die Bedingung (7a) erfüllte. Entweder hat also die Resolvente (I′) eine einzige im Unendlichen verschwindende Lösung und die homogene Gleichung (I) keine im Unendlichen endlich bleibende Lösung, oder die Resolvente (I′) hat keine im Unendlichen verschwindende Lösung und die homogene Gleichung (I) wenigstens eine im Unendlichen endlich bleibende Lösung.

Der ebenfalls beiseite gelassene Fall mehrfacher Wurzeln α_k aber erledigt sich einfach dadurch, daß man bei den verschiedenen Residuenbildungen in entsprechender Weise zu verfahren hat, wonach z. B. bei einer Doppelwurzel α_k in (9), (9a) und (10a) statt

$$\frac{i e^{-\alpha_k t i}}{X'(\alpha_k)} \quad \text{zu setzen ist:} \quad \frac{2 t e^{-\alpha_k t i}}{X''(\alpha_k)}.$$

Bei den beiden eingangs genannten Problemen der Elektronentheorie nun tritt beidemal die reelle Doppelwurzel $\alpha_1 = 0$ und sonst keine reelle oder der obern Halbebene angehörige Wurzel α_k auf, so daß bei ihnen asymptotisch sein wird:

$$Q(t) \sim \frac{2}{X''(0)}\, t \quad \text{für} \quad t = +\infty$$

oder im besondern

$$\text{(a)} \quad Q(t) \sim 10t, \qquad \text{(b)} \quad Q(t) \sim 42t.$$

Ist also $\varphi(t)$ für $-1 < t < 0$ beliebig gegeben und für $t > 0$: $f(t) = 0$, so wird nach (I″) asymptotisch sein:

$$\varphi(t) \sim \frac{2}{X''(0)} \int_0^1 \varphi(-s)\, ds \int_s^1 K(r)(t+s-r)\, dr \quad \text{für} \quad t = +\infty,$$

daher $\varphi(t)$ sich einer linearen Funktion unbegrenzt nähern.

Im besondern ist wieder

$$\text{(a)} \quad \varphi(t) \sim 5\int_0^1 \varphi(-s)(2s-3s^2+s^4)\,ds + 10t\int_0^1 \varphi(-s)(1-3s+2s^3)\,ds,$$

$$\text{(b)} \quad \varphi(t) \sim 21\int_0^1 \varphi(-s)(2s-5s^2+5s^4-2s^6)\,ds + 42t\int_0^1 \varphi(-s)(1-5s+10s^3-6s^5)\,ds.$$

Hervorgehoben möge noch der Grenzfall werden, daß statt der Integralgleichung (I) eine Funktionalgleichung:

$$f(t) = \varphi(t) - \sum_1^n K_k \varphi(t - s_k), \qquad 0 < s_k < 1$$

vorliegt, auf den sich die frühern Betrachtungen in passender Weise übertragen lassen. Der besondere Fall:

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(t-1)$$

führt dabei auf bekannte Untersuchungen über die Fouriersche Reihe (vgl. E. Picard l. c.) und über Summenformeln (vgl. L. Kronecker: Bestimmte Integrale, und E. Lindelöf: Calcul des résidus) zurück. Gerade diese Gleichung ist es, auf welche die unendlich kleinen Schwingungen eines mit gleichförmiger Oberflächenladung ausgestatteten, kugelförmigen Elektrons führen (vgl. P. Hertz, l. c.).

Die früheren Betrachtungen sind übrigens noch auf den Fall anwendbar, daß in (I) und (II) an Stelle von $K(s)$ eine Funktion $K(t, s)$ tritt, welche ein Polynom in t mit beliebigen, von s allein abhängigen Koeffizienten ist, nur wird dabei noch die Lösung einer linearen Differentialgleichung, deren Ordnung mit dem Grad von $K(t, s)$ in t übereinstimmt, erforderlich.

Um endlich von dem in Art. I gegebenen Ausdruck für $Q(t)$ zu der von P. Hertz (l. c.) benutzten Reihenentwicklung zu gelangen, denke man der Übersichtlichkeit halber $\lambda \cdot K(s)$ statt $K(s)$ in (I) und (II) gesetzt, wonach die Wurzeln α_h statt durch (4) durch:

$$X(x) = \frac{1}{\lambda}$$

bestimmt sind, und bemerke, daß sich $Q(t)$ — jetzt $Q(t, \lambda)$ — nach (10) auch definieren läßt durch:

$$Q(t, \lambda) = \lambda K(t) + \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^2}{1 - \lambda X} e^{-xti} dx,$$

wofern bloß in dem längs der reellen x-Achse hinlaufenden Integrationsweg das Stück: $-R \leqq x \leqq +R$ durch den Halbkreis: $x = Re^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ ersetzt wird, und R größer als der größte absolute Betrag der der oberen Halbebene angehörigen Wurzeln α_h gedacht wird. Durch Entwicklung nach Potenzen von λ folgt:

$$Q(t, \lambda) = \lambda K(t) + \frac{1}{2\pi}\sum_2^n \lambda^h \int_{-\infty}^{+\infty} X^h e^{-xti} dx + R_n,$$

$$R_n = \frac{\lambda^{n+1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X^{n+1}}{1 - X} e^{-xti} dx.$$

Wird nun λ irgend ein fester Wert beigelegt, so kann mit Rücksicht

darauf, daß in dem Restintegral durchweg $|X| < \frac{M}{R}$ ist, R so groß gewählt werden, daß

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

ist, und daher

$$Q(t, \lambda) = \lambda K(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{2}^{\infty} \lambda^k \int_{-\infty}^{+\infty} X^k e^{-xti} dx$$

folgt, wo nun nachträglich wieder die Integrale einfach längs der reellen x-Achse genommen werden können, welche Entwicklung mit der oben erwähnten identisch ist. Es ist also $Q(t, \lambda)$ eine ganze transzendente Funktion von λ, übereinstimmend mit der aus dem früheren einleuchtenden Tatsache, daß die homogene Gleichung (II) keine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt.

Letzterer Umstand läßt sich oft mit Vorteil dazu benutzen, $Q(t)$ in einfachere Gestalt zu setzen. Stellt man nämlich neben (II) die analoge Integralgleichung:

$$f(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(t-s) K^*(s) ds,$$

wo

$$K^*(s) = 0 \quad \text{für} \quad t > T,$$

$$K^*(s) = K(s) \quad \text{für} \quad t < t_0 < T$$

ist, und sei $Q^*(t)$ der zu $Q(t)$ analoge, aber mit

$$X^*(x) = \int_0^T K^*(s) e^{xsi} ds$$

gebildete Ausdruck, so wird bei beliebigem $f(t)$ offenbar

$$\int_0^t f(t-s) (Q(s) - Q^*(s)) ds$$

für $0 < t < t_0$ der homogenen Integralgleichung (II) genügen, also nach (II″) in diesem Intervall identisch Null sein müssen, woraus wegen der Willkürlichkeit von $f(t)$ folgt:

$$Q(t) = Q^*(t) \quad \text{für} \quad 0 < t < t_0.$$

Indem man bei passender Wahl von $K^*(s)$ nun $T = \infty$ werden läßt, kann man unter Umständen für $Q^*(t)$ einen einfacheren Ausdruck erzielen. Insbesondere kann es eintreten, daß sich hierbei die α_k^* längs einer ganzen Linie häufen, und man so aus (10a) für $Q^*(t)$ einen neuen Integralausdruck an Stelle der Reihenentwicklung erhält. Ein Fall dieser Art soll an anderer Stelle bei Gelegenheit einer Aufgabe der Elektrizitätslehre betrachtet werden.

Göttingen, Oktober 1907.

Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.

Von

E. Zermelo in Göttingen.

Obwohl ich meinen im Jahre 1904 veröffentlichten „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann"*) gegenüber den verschiedenen im § 2 ausführlich zu besprechenden Einwendungen noch heute vollkommen aufrecht erhalte, dürfte doch der hier folgende neue Beweis desselben Theorems nicht ohne Interesse sein, da er einerseits keine speziellen Lehrsätze der Mengentheorie voraussetzt, andererseits aber den rein formalen Charakter der Wohlordnung, die mit räumlich-zeitlicher Anordnung gar nichts zu tun hat, deutlicher als der erste Beweis hervortreten läßt.

§ 1.

Der neue Beweis.

Die Voraussetzungen und Schlußformen, deren ich mich bei dem Beweise des nachstehenden Theorems bediene, lassen sich auf die folgenden Postulate zurückführen.

I. Alle diejenigen Elemente einer Menge M, denen eine für jedes einzelne Element wohldefinierte Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt, bilden die Elemente einer zweiten Menge $M_{\mathfrak{E}}$, einer „Untermenge" von M.

Jeder Untermenge M_1 von M entspricht somit eine „komplementäre Untermenge" $M - M_1$, welche alle in M_1 nicht vorkommenden Elemente von M umfaßt und sich für $M_1 = M$ auf die (leere) „Nullmenge" reduziert.

II. Alle Untermengen einer Menge M, d. h. alle diejenigen Mengen M_1, deren Elemente gleichzeitig Elemente von M sind, bilden die Elemente einer durch M bestimmten Menge $\mathfrak{U}(M)$.

Aus dem Postulat I ergibt sich leicht der Satz

III. Alle diejenigen Elemente, welche den sämtlichen Mengen $A, B, C, \cdots$, den Elementen einer höheren Menge T, gemeinsam sind, bilden die Elemente einer Menge $Q = \mathfrak{D}(T)$, die als der „Durchschnitt"

*) Math. Annalen, Bd. 59, p. 514.

oder als der „gemeinsame Bestandteil" der Mengen $A, B, C, \cdots$ bezeichnet werden soll.

Theorem. *Ist durch irgend ein Gesetz jeder nicht verschwindenden Untermenge einer Menge M eines ihrer Elemente als „ausgezeichnetes Element" zugeordnet, so besitzt die Menge $\mathfrak{U}(M)$ aller Untermengen von M eine und nur eine Untermenge M von der Beschaffenheit, daß jeder beliebigen Untermenge P von M immer ein und nur ein Element P_0 von M entspricht, welches P als Untermenge und ein Element von P als ausgezeichnetes Element enthält. Die Menge M wird durch M wohlgeordnet.*

Beweis. Ist A irgend eine nicht verschwindende Untermenge von M, also Element von $\mathfrak{U}(M)$ und $a = \varphi(A)$ ihr ausgezeichnetes Element, so sei $A' = A - \{a\}$ diejenige Teilmenge von A, welche durch Unterdrückung des ausgezeichneten Elementes entsteht. Nun besitzt die Menge $\mathfrak{U}(M)$ aller Untermengen von M folgende drei Eigenschaften:

1) sie enthält das Element M,

2) sie enthält mit jedem ihrer Elemente A auch das zugehörige A',

3) sie enthält mit jeder ihrer Untermengen $\mathsf{A} = \{A, B, C, \cdots\}$ auch den zugehörigen Durchschnitt $Q = \mathfrak{D}(\mathsf{A})$ als Element.

Wird jetzt eine solche Untermenge Θ von $\mathfrak{U}(M)$, welcher diese drei Eigenschaften ebenfalls zukommen, als eine „Θ-*Kette*" bezeichnet, so ergibt sich unmittelbar, daß der Durchschnitt mehrerer Θ-Ketten immer selbst eine Θ-Kette darstellt, und der Durchschnitt M aller existierenden Θ-Ketten, welche ja gemäß I und II die Elemente einer wohldefinierten Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(M)$ bilden, ist somit die kleinste mögliche Θ-Kette; so daß keine echte Teilmenge von M eine Θ-Kette mehr sein kann.

Es sei nun A ein solches Element von M, daß in bezug auf A alle übrigen Elemente X von M in zwei Klassen zerfallen: 1) in Elemente U_A, welche Teilmengen von A sind, und 2) Elemente V_A, welche, wie z. B. M selbst, die Menge A als Teil umfassen. Dann ist, wie wir zeigen wollen, jedes U_A immer von der Beschaffenheit W_A, nämlich eine Untermenge von $A' = A - \{\varphi(A)\}$. In der Tat ist jedes V'_A, da es kein U_A sein kann und doch Element von M sein muß, entweder A selbst oder ein V_A, und jeder Durchschnitt mehrerer V_A wieder ein V_A oder A. Andererseits ist A' sowie jedes W'_A wieder ein W_A, und ebenso jeder Durchschnitt mehrerer W_A sowie der Durchschnitt einiger W_A und einiger V_A oder A wieder ein W_A. Somit bilden die W_A mit den V_A und A zusammen schon eine Θ-Kette, sie erschöpfen also die kleinste Θ-Kette M, und jedes U_A ist wirklich ein W_A, d. h. Untermenge von A'. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß auch A' dieselbe Eigenschaft hat wie A, d. h. daß alle anderen Elemente von M entweder Teile von A' sind oder A' als Teil enthalten. Ist endlich Q der Durchschnitt mehrerer $A, B, C, \cdots$ von der soeben für A voraus-

gesetzten Beschaffenheit und X irgend ein anderes Element von M, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder enthält X eine der Mengen $A, B, C, \cdots$ und damit auch Q als Teil, oder X ist in allen $A, B, C, \cdots$ und damit auch in Q als Untermenge enthalten, d. h. auch Q besitzt die genannte Eigenschaft von A. Da endlich M sämtliche Elemente von M als Untermengen umschließt und daher selbst ein A darstellt, so bilden die wie A beschaffenen Elemente von M wieder eine Θ-Kette, nämlich M selbst, und für zwei beliebige Elemente A und B von M gilt die Alternative, daß entweder B Untermenge von A' oder A Untermenge von B' sein muß.

Jetzt sei P eine beliebige Untermenge von M, und P_0 der Durchschnitt aller solchen Elemente von M, welche P als Untermenge enthalten, und zu denen jedenfalls das Element M gehört. Dann ist auch P_0 Element von M, und das ausgezeichnete Element p_0 von P_0 muß ein Element von P sein, weil sonst auch $P_0' = P_0 - \{p_0\}$ alle Elemente von P enthielte und doch nur ein Teil von P_0 wäre. Jedes andere, P als Untermenge enthaltende Element P_1 von M muß dann P_0 als Teil umfassen, d. h. P_0 ist nach dem soeben Bewiesenen eine Untermenge von P_1', und das ausgezeichnete Element p_1 von P_1 kann, da es in P_1' und somit auch in P_0 nicht vorkommt, kein Element von P sein. Es gibt also in der Tat nur ein einziges Element P_0 von M, welches P als Untermenge und ein Element von P als ausgezeichnetes Element enthält.

Wählt man hier für P eine Menge der Form $\{a\}$, wo a irgend ein Element von M ist, so ergibt sich im besonderen, daß jedem Elemente a von M ein einziges Element A von M entspricht, in welchem a ausgezeichnetes Element ist, und welches mit $\mathfrak{R}(a)$ bezeichnet werden möge. Sind a, b irgend zwei verschiedene Elemente von M, so ist entweder $\mathfrak{R}(a)$ oder $\mathfrak{R}(b)$ das der Menge $P = \{a, b\}$ entsprechende Element P_0 von M, d. h. entweder enthält $\mathfrak{R}(a)$ das Element b oder $\mathfrak{R}(b)$ das Element a, aber niemals tritt beides gleichzeitig ein. Sind endlich a, b, c irgend drei Elemente von M, und ist etwa b Element von $\mathfrak{R}(a)$ und c Element von $\mathfrak{R}(b)$, so kann nur $\mathfrak{R}(a)$ das der Menge $P = \{a, b, c\}$ entsprechende Element P_0 sein, d. h. es ist auch c Element von $\mathfrak{R}(a)$. Schreibt man also $a \prec b$ für den Fall, wo b Element von $\mathfrak{R}(a)$ und $a \neq b$ ist, und sagt dann, das Element a „gehe dem Element b voran", so ergibt sich die Trichotomie:

$$a \prec b, \quad a = b, \quad b \prec a$$

für irgend zwei Elemente a, b, und aus

$$a \prec b \quad \text{und} \quad b \prec c$$

folgt immer $a \prec c$.

Die Menge M wird also vermittels der Menge M „einfach geordnet" und zwar im Cantorschen Sinne „wohlgeordnet"; denn jeder Untermenge P von M entspricht ein „erstes Element", nämlich das ausgezeichnete

Element p_0 von $P_0 = \mathfrak{R}(p_0)$, welches allen übrigen Elementen p von P „vorangeht", weil alle diese p Elemente von P_0 sind.

Ist umgekehrt die Menge M auf irgend eine Weise wohlgeordnet, so entspricht jedem Elemente a von M eine bestimmte Untermenge $\mathfrak{R}(a)$ von M, welche außer a alle „auf a folgenden" Elemente enthält und als der zu a gehörende „Rest" bezeichnet werden möge. Unterdrückt man in einem solchen Reste $\mathfrak{R}(a)$ das „erste Element" a, so verbleibt der „Rest" des „nächstfolgenden" Elementes a'. Ebenso ist der gemeinsame Bestandteil oder „Durchschnitt" mehrerer Reste immer wieder ein Rest, und schließlich ist die ganze Menge M der Rest $\mathfrak{R}(e)$ ihres ersten Elementes. Somit stellt die Gesamtheit aller Reste in dem oben angegebenen Sinne eine Θ-Kette dar, in welcher das erste Element jedes Restes als „ausgezeichnetes Element" figuriert. Besäße nun $\mathfrak{U}(M)$ außer M eine zweite Untermenge M_1 von der im Theorem geforderten Beschaffenheit, so bestimmte auch M_1 eine Wohlordnung von M mit denselben ausgezeichneten Elementen und müßte daher als Θ-Kette den Durchschnitt M aller Θ-Ketten als Bestandteil enthalten. Bedeutet dann z_0 das ausgezeichnete Element eines Elementes Z von $\mathsf{M}_1 - \mathsf{M}$, so wäre z_0 ausgezeichnetes Element in zwei Elementen von M_1, außer in Z nämlich noch in dem durch M bestimmten $\mathfrak{R}(z_0)$, und dies widerspräche der vorausgesetzten Beschaffenheit von M_1. In Wirklichkeit ist also die Wohlordnung M durch die Wahl der ausgezeichneten Elemente eindeutig bestimmt, und der behauptete Satz ist in allen seinen Teilen bewiesen.

Um nun unser Theorem auf beliebige Mengen anzuwenden, bedürfen wir nur noch der Voraussetzung, daß *die gleichzeitige Auswahl der ausgezeichneten Elemente für eine beliebige Menge von Mengen prinzipiell immer möglich ist*, oder präziser, daß immer dieselben Folgerungen gelten, als ob diese Auswahl möglich wäre. In dieser Formulierung erscheint das zugrunde liegende Prinzip freilich immer noch etwas subjektiv gefärbt und Mißdeutungen ausgesetzt. Da man aber, wie ich an anderer Stelle ausführlicher darlegen werde, vermittels der elementaren und unentbehrlichen mengentheoretischen Prinzipien eine beliebige Menge T' von Mengen $A', B', C', \cdots$ immer durch eine Menge T unter sich elementenfremder Mengen $A, B, C, \cdots$ ersetzen kann, die den Mengen $A', B', C', \cdots$ bezüglich äquivalent sind, so läßt sich das allgemeine „Prinzip der Auswahl" auf das folgende Axiom zurückführen, dessen rein objektiver Charakter unmittelbar einleuchtet.

IV. Axiom. *Eine Menge S, welche in eine Menge getrennter Teile $A, B, C, \cdots$ zerfällt, deren jeder mindestens ein Element enthält, besitzt mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem der betrachteten Teile $A, B, C, \cdots$ genau ein Element gemein hat.*

Unter Anwendung dieses Axioms ergibt sich somit wie in meiner Note von 1904 der allgemeine Satz, *daß jede Menge einer Wohlordnung fähig ist.*

Die unserem neuen Beweise zugrunde liegende Definition der Wohlordnung, wie sie bereits bei der Formulierung des „Theorems" in Erscheinung trat, hat den Vorzug, ausschließlich auf den Elementarbegriffen der Mengenlehre zu beruhen, während bei der üblichen Darstellung, wie die Erfahrung lehrt, Unkundige nur allzu geneigt sind, hinter der unvermittelt auftretenden Cantorschen Beziehung $a \prec b$ irgend einen mystischen Inhalt zu suchen. Unsere Definition möge hier nochmals ausdrücklich formuliert werden, wie folgt:

Definition. *Eine Menge M heißt „wohlgeordnet", wenn jedem ihrer Elemente a eine Untermenge $\mathfrak{R}(a)$ von M als „Rest" eindeutig entspricht, und wenn jede nicht verschwindende Untermenge P von M ein und nur ein „erstes Element" d. h. ein solches Element p_0 enthält, dessen Rest $\mathfrak{R}(p_0)$ die Menge P als Untermenge umfaßt.*

§ 2.

Diskussion der Einwände gegen den früheren Beweis.

Seit 1904 sind gegen meinen damaligen „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", eine Reihe von Einwendungen gemacht und Kritiken veröffentlicht worden, die bei dieser Gelegenheit einmal im Zusammenhange zur Sprache kommen mögen.

a. Einwände gegen das Auswahlprinzip.

An erster Stelle stehen hier diejenigen Einwände, welche sich gegen das oben formulierte „Auswahlpostulat" richten und somit meine beiden Beweise in gleicher Weise treffen. Ihnen kann ich insofern eine relative Berechtigung einräumen, als ich dieses Postulat, wie ich am Ende meiner Note ausdrücklich hervorhob*), eben nicht *beweisen* und daher niemand apodiktisch zu seiner Anerkennung zwingen kann. Indem also die Herren E. Borel**) und G. Peano***) in ihren Kritiken den Mangel eines Beweises konstatierten, haben sie sich lediglich auf meinen eigenen Standpunkt gestellt. Sie hätten mich sogar zu Dank verpflichtet, wenn sie

*) Math. Annalen, Bd. 59, p. 516. „Dieses logische Prinzip läßt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen —".

**) Math. Annalen, Bd. 60, p. 194; vergl. aber auch Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue „Cinq lettres sur la théorie des ensembles", Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 33, p. 261.

***) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 145 ff.

die von mir behauptete Unbeweisbarkeit, d. h. die logische Unabhängigkeit dieses Postulates von den übrigen, nun ihrerseits bewiesen und damit meine Überzeugung bestätigt hätten.

Nun ist *Unbeweisbarkeit* auch in der Mathematik bekanntlich keineswegs gleichbedeutend mit *Ungültigkeit*, da doch eben nicht alles bewiesen werden kann, sondern jeder Beweis wieder unbewiesene Prinzipien voraussetzt. Um also ein solches Grundprinzip zu verwerfen, hätte man seine Ungültigkeit in besonderen Fällen oder widersprechende Konsequenzen feststellen müssen; aber hierzu hat keiner meiner Gegner einen Versuch gemacht.

Auch dem „Formulaire"*) des Herrn Peano, welcher die gesamte Mathematik auf „Syllogismen" (im aristotelisch-scholastischen Sinne) zurückführen soll**), liegen eine ganze Anzahl unbeweisbarer Prinzipien zugrunde, und eines darunter, welches dem „Auswahlprinzip" für eine einzige Menge äquivalent ist und dann syllogistisch auf eine beliebige endliche Anzahl von Mengen ausgedehnt werden kann***). Aber das allgemeine Axiom, das ich mir nach dem Vorgange anderer Forscher in diesem neuen Falle auf beliebige Mengen anzuwenden erlaubte, findet sich eben nicht unter den Peanoschen Prinzipien, und Herr Peano versichert selbst, daß er es auch nicht aus ihnen herleiten könne. Er begnügt sich damit, dies festzustellen, und das Prinzip ist für ihn erledigt. Der Gedanke, daß möglicherweise sein Formulaire gerade in diesem Punkte unvollständig sein könnte, liegt doch nahe, und da es in der Mathematik keine unfehlbaren Autoritäten gibt, so haben wir auch mit dieser Möglichkeit zu rechnen und sie nicht ohne objektive Prüfung von der Hand zu weisen.

Zunächst, wie gelangt denn Herr Peano zu seinen eigenen Grundprinzipien und wie rechtfertigt er ihre Aufnahme in den Formulaire, da er sie doch gleichfalls nicht beweisen kann? Offenbar durch Analyse der historisch als gültig anerkannten Schlußweisen und durch den Hinweis auf die anschauliche Evidenz der Prinzipien und auf das wissenschaftliche Bedürfnis — alles Gesichtspunkte, die sich für das bestrittene Prinzip ebenso-

*) „Formulaire de Mathématiques publié par la Revue de Mathématiques" Tome II, Turin 1897.

**) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 147.

***) ibid. p. 145—147. Übrigens gelingt dieser Beweis nur durch „vollständige Induktion", ist also nur bindend, wenn man die endlichen Zahlen in Peanoscher Weise durch ihren Ordnungstypus definiert. Legt man dagegen die Dedekindsche Definition der endlichen Menge als einer solchen, welche keinem ihrer Teile äquivalent ist, zugrunde, so ist ein Beweis auch für endliche Mengen unmöglich, da die Zurückführung der beiden Definitionen aufeinander, wie wir unten (Beispiel 4) zeigen werden, wieder das Auswahlprinzip erfordert. In diesem Sinne ist also Poincarés Bemerkung (Revue de Métaphysique et de Morale 14, p. 313) gerechtfertigt.

gut geltend machen lassen. Daß dieses Axiom, ohne gerade schulmäßig formuliert zu sein, auf den verschiedensten mathematischen Gebieten, besonders aber in der Mengenlehre von R. Dedekind, G. Cantor, F. Bernstein, A. Schoenflies, J. König u. a. mit Erfolg sehr häufig angewendet worden ist, ist eine unbestreitbare Tatsache, welche durch die frühere gelegentliche Opposition einiger logischen Puristen nur bestätigt wird. Eine so weitgehende Anwendung eines Prinzips ist nur erklärlich durch seine *Evidenz*, welche mit Beweisbarkeit natürlich nicht verwechselt werden darf. Mag diese Evidenz auch bis zu einem gewissen Grade subjektiv sein, so ist sie doch jedenfalls eine notwendige Quelle mathematischer Prinzipien, wenn auch kein Gegenstand mathematischer Beweise, und die Behauptung Peanos*), daß sie mit Mathematik nichts zu tun habe, wird offenbaren Tatsachen nicht gerecht. Was sich aber objektiv entscheiden läßt, die Frage nach dem *wissenschaftlichen Bedürfnis*, möchte ich hier in der Weise der Beurteilung unterbreiten, daß ich eine Reihe von elementaren und grundlegenden Sätzen und Problemen vorlege, welche meines Erachtens ohne das Auswahlprinzip überhaupt nicht erledigt werden könnten.

1) Wenn eine Menge in getrennte Teile $A, B, C, \cdots$ zerfällt, so ist die Menge dieser Teile einer Untermenge von M äquivalent, oder anders ausgedrückt: die Menge der Summanden ist immer von kleinerer oder der gleichen Mächtigkeit wie die Summe.

Zum Beweise muß man sich jedem dieser Teile eines seiner Elemente zugeordnet denken.**)

2) Die Summen äquivalenter Mengen sind wieder äquivalent, vorausgesetzt, daß alle Summanden unter sich elementenfremd sind, ein Satz, auf dem der ganze Kalkül mit Mächtigkeiten beruht.

---

*) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 147.

**) Daß hier ein besonderes Schlußprinzip zugrunde liegt, wurde anläßlich eines Bernsteinschen Beweises wohl zuerst von Herrn Beppo Levi ausgesprochen (Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 1902, p. 863). Nach Herrn F. Bernstein (Math. Annalen Bd. 60, p. 193) soll allerdings in allen ähnlichen Fällen, z. B. auch in meinem Beweise, die „Hypothese" der möglichen Auswahl „entbehrlich" sein, wenn man den von ihm eingeführten Begriff der „vielwertigen Äquivalenz" benutzt. Zwei Mengen M, N sollen (Gött. Nachr. Math. Phys. 1904, Heft 6) „vielwertig äquivalent" heißen, wenn für sie statt einer einzigen eine ganze Menge A von ein-eindeutigen Abbildungen $\varphi, \chi, \psi, \cdots$ gegeben ist, „unter denen keine ausgezeichnet ist". Hier wird also ein reiner Beziehungsbegriff wie „ausgezeichnet" ohne ergänzende Bestimmung oder Erklärung wie ein absolutes Merkmal verwendet, und die versuchte Unterscheidung von der gewöhnlichen Äquivalenz ist logisch nicht durchführbar. In den betrachteten Beispielen handelt es sich aber auch gar nicht um die „Multiplizität", d. h. um die *Mächtigkeit* der Abbildungsmenge A, sondern lediglich um die Frage, ob *mindestens eine* solche Abbildung φ existiert, eine Frage, die hier durch keine Definition umgangen sondern nur durch ein Axiom entschieden werden kann.

Hier ist es erforderlich, ein System von Abbildungen zu betrachten, welche *gleichzeitig* je zwei äquivalente Summanden aufeinander beziehen; man hat also aus den sämtlichen möglichen Abbildungen, welche zu je zwei äquivalenten Summanden gehören, jedesmal eine einzige auszuwählen.

3) Das Produkt mehrerer Mächtigkeiten kann nur verschwinden, wenn ein Faktor verschwindet, d. h. die Cantorsche „Verbindungsmenge" mehrerer Mengen $A, B, C, \cdots$, deren jede mindestens ein Element enthält, muß gleichfalls mindestens ein Element enthalten. Da aber jedes solche Element eine Menge ist, welche mit jeder der Mengen $A, B, C, \cdots$ gerade ein Element gemein hat, so ist der Satz nur ein anderer Ausdruck des Auswahlpostulates für elementenfremde Mengen (IV. Axiom § 1 fin.).

4) Eine Menge, welche keinem ihrer Teile äquivalent ist, läßt sich immer so ordnen, daß jede Untermenge sowohl ein erstes, als auch ein letztes Element besitzt.

Diesen Satz, auf dem die Theorie der *endlichen* Mengen beruht, beweist man am einfachsten mittelst meines Wohlordnungstheorems. Herr R. Dedekind bewies den logisch gleichwertigen Satz, daß eine Menge, welche keinem Abschnitte seiner „Zahlenreihe" äquivalent ist, einen der ganzen Zahlenreihe äquivalenten Bestandteil enthalten muß*), durch simultane Abbildung eines Systems äquivalenter Mengenpaare, also wie hier in 2) gleichfalls mit Hilfe des Auswahlprinzipes.**) Weitere Beweise sind mir nicht bekannt.

5) Eine abzählbare Menge von endlichen oder abzählbaren Mengen besitzt immer eine abzählbare Summe.

Auf diesem Satz beruht die Theorie der abzählbaren Mengen und der „zweiten Zahlenklasse"; er läßt sich aber nur beweisen, indem man die sämtlichen betrachteten endlichen oder abzählbaren Mengen *gleichzeitig* nach dem Normaltypus ordnet.

6) Gibt es eine „Basis aller reellen Zahlen", d. h. ein System von reellen Zahlen, zwischen welchen keine linearen Relationen mit einer endlichen Anzahl ganzzahliger Koeffizienten bestehen, und aus welchen sich alle übrigen linear mit endlichvielen ganzzahligen Koeffizienten zusammensetzen lassen?

7) Gibt es unstetige Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)?$$

Diese beiden letzten Fragen sind von Herrn G. Hamel***) auf

*) „Was sind und was sollen die Zahlen?" Nr. 159.

**) Diese vielfach übersehene Tatsache wird auch von Herrn G. Hessenberg im Vorworte seiner „Grundbegriffe der Mengenlehre" (Göttingen 1906) ausdrücklich anerkannt.

***) Math. Annalen, Bd. 60, p. 459.

Grund der möglichen Wohlordnung des Kontinuums in bejahendem Sinne entschieden worden.

Die Cantorsche Theorie der Mächtigkeiten bedarf also jedenfalls unseres Postulates, ebenso die Dedekindsche Theorie der endlichen Mengen, welche die Grundlage der Arithmetik bildet. Die Tatsache, daß man in der Funktionentheorie seine Anwendung gewöhnlich umgehen kann, erklärt sich einfach durch den Umstand, daß man es dort in der Regel mit „abgeschlossenen“ Mengen zu tun hat, bei welchen die eindeutige Definition ausgezeichneter Elemente keine Schwierigkeit bietet. Wo dies nicht der Fall ist, also namentlich in der Theorie der durchweg unstetigen Funktionen, wird das Prinzip oft unentbehrlich, wie unser letztes Beispiel zeigt.

Solange nun die hier vorgelegten relativ einfachen Probleme den Hilfsmitteln Peanos unzugänglich bleiben, und solange andererseits das Auswahlprinzip nicht positiv widerlegt werden kann, wird man die Vertreter der produktiven Wissenschaft nicht hindern dürfen, sich dieser „Hypothese“, wie man es meinetwegen nennen möge, fernerhin zu bedienen und ihre Konsequenzen im weitesten Umfange zu entwickeln, zumal ja doch nur auf diesem Wege etwaige Widersprüche eines Standpunktes aufgedeckt werden könnten. Dabei genügt es, diejenigen Theoreme, welche das Axiom notwendig erfordern, von denen zu trennen, bei welchen es entbehrt werden kann, um auch die gesamte Peanosche Mathematik als einen besonderen Zweig, als eine gewissermaßen künstlich verstümmelte Wissenschaft mit zu umfassen. Fundamentale Tatsachen oder Probleme einfach aus der Wissenschaft zu weisen, weil sie sich mit gewissen vorgeschriebenen Prinzipien nicht erledigen lassen, wäre ebenso, als wollte man in der Geometrie den weiteren Ausbau der Parallelentheorie verbieten, weil das betreffende Axiom als unbeweisbar nachgewiesen ist. In der Tat müssen die Prinzipien aus der Wissenschaft, nicht die Wissenschaft aus ein für allemal feststehenden Prinzipien beurteilt werden. Die Geometrie hat existiert vor den Euklidischen „Elementen“, ebenso die Arithmetik und Mengenlehre vor dem Peanoschen „Formulaire“, und beide werden noch jeden solchen Versuch einer schulmäßigen Systematisierung unzweifelhaft überleben.

Freilich hätte Herr Peano noch ein einfaches Mittel, die in Frage stehenden Sätze wie noch viele andere aus seinen eigenen Prinzipien zu beweisen. Er brauchte nur von der neuerdings viel erörterten „Russellschen Antinomie“ Gebrauch zu machen, da sich aus widersprechenden Prämissen bekanntlich alles beweisen läßt. In der Tat schließen die Prinzipien des Formulaire, welche zwischen „Menge“ und „Klasse“ keinen Unterschied machen, diesen Widerspruch nicht aus. Dagegen sind, wie ich demnächst an anderer Stelle zeigen werde, die Vertreter der Mengenlehre als einer

rein mathematischen Disziplin, welche nicht auf die Grundbegriffe der traditionellen Logik beschränkt ist, durchaus in der Lage, durch geeignete Spezialisierung ihrer Axiome alle bisher bekannten „Antinomieen" zu vermeiden. Während also der Bereich der Peanoschen Prinzipien, wie wir eben zeigten, zu eng ist, um die Wissenschaft in ihrer vollen Schönheit zu entwickeln, ist er andererseits zu weit, um sie von inneren Widersprüchen frei zu halten; und solange die Antinomieen dieses Systems nicht beseitigt sind, wird man in ihm wohl kaum die endgültige Grundlegung der mathematischen Wissenschaft suchen dürfen.

b. Einwand der nicht-prädikativen Definition.

Den hier vertretenen Standpunkt einer in letzter Linie auf Intuition beruhenden produktiven Wissenschaft hat neuerdings auch Herr H. Poincaré der Peanoschen „Logistik" gegenüber in einer Reihe von Aufsätzen*) geltend gemacht, in denen er auch dem Auswahlprinzip, das er für ein unbeweisbares, aber unentbehrliches Axiom ansieht, durchaus gerecht wird.**) Dabei ist er aber, weil seine Gegner sich vorzugsweise der Mengenlehre bedienten, im Angriff soweit gegangen, die ganze Cantorsche Theorie, diese ursprüngliche Schöpfung genialer Intuition und spezifisch mathematischen Denkens, mit der von ihm bekämpften Logistik zu identifizieren und ihr ohne Rücksicht auf ihre positiven Leistungen lediglich auf Grund der noch ungeklärten „Antinomieen" jede Existenzberechtigung abzusprechen.***) Kam es ihm nur darauf an, in den Grundlagen der Arithmetik „synthetische Urteile a priori" nachzuweisen, zu denen er zunächst das „Prinzip der vollständigen Induktion" glaubte rechnen zu dürfen, so hätte es den mengentheoretischen Beweisen dieses Prinzips gegenüber genügt, den Grundsätzen, auf denen diese Beweise beruhen, einen synthetischen Charakter zuzuschreiben, und auch die Vertreter der Mengenlehre hätten dies gelten lassen können, da die Unterscheidung von „synthetisch" und „analytisch" dann eine rein philosophische wäre und die Mathematik als solche nicht berührte. Statt dessen hat er es unternommen, mathematische Beweise mit den Waffen der formalen Logik zu bekämpfen, und sich damit auf ein Feld begeben, auf dem seine logistischen Gegner ihm überlegen sind.

Um die Auffassung Poincarés zu verdeutlichen, ist es wohl am

---

*) „Les mathématiques et la logique", Revue de Métaphysique et de Morale t. 13; t. 14, p. 17, p. 294, p. 866.

**) ibid. 14, p. 311—313: „C'est donc un jugement synthétique a priori sans lequel la théorie cardinale serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis."

***) ibid. 14, p. 316: „Il n'y a pas d'infini actuel; les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction."

einfachsten, ein Beispiel zu wählen, daß dem im § 1 dieses Artikels vorausgeschickten Beweise entnommen ist. Dort habe ich eine besondere Klasse von Mengen definiert, die ich als „Θ-Ketten“ bezeichnete, und habe dann nachgewiesen, daß der gemeinsame Bestandteil M aller dieser Θ-Ketten selbst eine Θ-Kette darstellt. Dieses Verfahren ist derjenigen „Ketten“-Theorie nachgebildet, auf welche R. Dedekind*) seine Theorie der endlichen Zahlen gründet, und ist auch sonst in der Mengenlehre gebräuchlich. Nach Herrn Poincaré**) soll aber eine Definition nur dann „prädikativ“ und logisch allein zulässig sein, wenn sie alle solchen Gegenstände *ausschließt*, welche von dem definierten Begriffe „abhängig“ sind, d. h. durch ihn irgendwie bestimmt werden können. Demnach hätte in dem hier angeführten Beispiele die Menge M, welche selbst erst durch die Gesamtheit der Θ-Ketten bestimmt ist, von der Definition dieser Ketten ausgeschlossen werden müssen, und meine Definition, welche M selbst als Θ-Kette rechnet, wäre „nicht-prädikativ“ und enthielte einen circulus vitiosus. In zwei ganz analogen Fällen, deren letzterer sich auf die „γ-Mengen“ meines Beweises von 1904 bezieht, wird dies ausdrücklich als Kritik meines Beweisverfahrens ausgeführt.***)

Nun ist aber einerseits diese logische Form eines Beweises keineswegs auf die Mengenlehre beschränkt, sondern findet sich genau so in der Analysis überall, wo das Maximum oder Minimum einer vorher definierten „abgeschlossenen“ Zahlenmenge Z zu weiteren Folgerungen benutzt wird. Dies geschieht z. B. in dem bekannten Cauchyschen Beweise für den „Fundamentalsatz der Algebra“, ohne daß es bisher jemand eingefallen wäre, etwas Unlogisches darin zu erblicken. Andererseits enthält gerade die als „prädikativ“ bezeichnete Form der Definition etwas Zirkelhaftes; denn ohne den Begriff schon zu haben, kann man noch gar nicht wissen, welche Gegenstände sich durch ihn einmal bestimmen lassen und deswegen auszuschließen wären. In Wahrheit muß natürlich die Frage, ob ein beliebig vorgelegter Gegenstand unter eine Definition fällt, unabhängig von dem erst zu definierenden Begriffe durch ein *objektives* Kriterium entscheidbar sein. Ist aber ein solches Kriterium einmal gegeben, wie dies in den meinen Beweisen entlehnten Beispielen tatsächlich überall der Fall ist, so hindert nichts, daß einige der Gegenstände, welche unter die Definition fallen, zu demselben Begriffe noch in einer besonderen Beziehung stehen und dadurch — als Minimum oder als gemeinsamer Bestandteil — vor den übrigen ausgezeichnet oder bestimmt werden können. Durch eine

---

*) „Was sind und was sollen die Zahlen?“ § 4.

**) Rev. d. Mét. e. d. Mor. 14, p. 307.

***) ibid. p. 314 und 315.

solche „Bestimmung“ wird ein Gegenstand ja nicht erst geschaffen, sondern jeder Gegenstand kann auf sehr verschiedene Weisen bestimmt werden, und diese verschiedenen Bestimmungen liefern nicht identische, sondern nur „äquivalente“ Begriffe, d. h. solche von gleichem „Umfange“. In der Tat scheint, worauf besonders Herr G. Peano*) in diesem Zusammenhange hinweist, die Existenz äquivalenter Begriffe dasjenige zu sein, was Herr Poincaré in seiner Kritik übersehen hat. Eine Definition darf sich sehr wohl auf Begriffe stützen, welche dem zu definierenden äquivalent sind; ja in jeder Definition sind Definierendes und Definiertes äquivalente Begriffe, und die strenge Befolgung der Poincaréschen Forderung würde jede Definition und damit jede Wissenschaft unmöglich machen.

c. Einwände, gegründet auf die Menge W.

Die bisher erörterten Kritiken, welche sich gegen die Prinzipien und Beweismethoden der Mengenlehre überhaupt richten, haben naturgemäß bei denjenigen Mathematikern wenig Anklang gefunden, welche wie die Herren J. König, Ph. Jourdain und F. Bernstein auf diesem Gebiete selbst bereits produktiv tätig gewesen sind und sich dabei von der Unentbehrlichkeit der genannten Hilfsmittel überzeugen konnten. Dagegen scheint bei einigen derselben die neuerdings wieder so vielfach erörterte „Burali-Fortische Antinomie“, welche sich auf die „Menge W aller Cantorschen Ordnungszahlen“ bezieht, einen allzu weitgehenden Skeptizismus gegenüber der Theorie der Wohlordnung hinterlassen zu haben. Und doch hätte schon die elementare Form, welche Herr B. Russell**) den

*) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 152. Es handelt sich hier um einen neuen Beweis des Schröder-Bernsteinschen Theorems über die Äquivalenz der Mengen, den ich im Januar 1906 Herrn Poincaré brieflich mitgeteilt hatte. Diesen Beweis hatte der letztere im Maihefte der Revue de Métaphysique et de Morale (14, p. 314—315) inhaltlich richtig wiedergegeben und zum Gegenstande einer Kritik gemacht, auf die sich die angeführte Stelle Peanos (zum Teil wörtlich zitierend) bezieht. Herr Peano knüpft aber, ohne diesen Tatbestand zu erwähnen, seine Ausführung an eine vorhergehende Reproduktion seines eigenen, mit dem meinigen wesentlich übereinstimmenden, nur in Begriffsschrift gefaßten Beweises, dessen erste Mitteilung (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XXI, adunanza 8 Apr. 1906) Herrn Poincaré bei der Abfassung seines Artikels offenbar noch nicht vorgelegen hatte. Warum vermeidet Herr Peano hier, wo er mit mir übereinstimmt, die Nennung meines Namens, um unmittelbar darauf seine Bekämpfung des Auswahlprinzipes so ausdrücklich an meine Adresse zu richten? Es dürfte doch einleuchten, daß nicht die mathematischen Prinzipien, welche Gemeingut sind, sondern lediglich die auf sie gegründeten Beweise Eigentum des einzelnen Mathematikers sein können. Übrigens hatte ich am Schluß meiner Note ausdrücklich bemerkt, daß ich die Heranziehung des Auswahlprinzipes zur Bildung einer „γ-Belegung“ einem Vorschlage des Herrn Erhard Schmidt (jetzt in Bonn) verdanke.

**) „The Principles of Mathematics“, vol. I (Cambridge 1903), p. 366—368. Indessen

mengentheoretischen Antinomieen gegeben hat, sie überzeugen können, daß die Lösung dieser Schwierigkeiten nicht in der Preisgabe der Wohlordnung, sondern lediglich in einer geeigneten Einschränkung des Mengenbegriffes zu suchen ist. Im Hinblick auf solche Bedenken hatte ich bereits in meinem Beweise von 1904 nicht nur alle irgendwie zweifelhaften Begriffe, sondern sogar die Verwendung der „Ordnungszahlen" überhaupt vermieden und mich sichtlich auf solche Prinzipien und Hilfsmittel beschränkt, welche für sich allein bisher noch zu keinen „Antinomieen" Anlaß gegeben haben. Wenn nun trotzdem einige Kritiker diese ominöse „Menge W" gegen meinen Beweis ins Feld geführt haben, so mußten sie dieselbe erst künstlich hinein interpretieren, und alle aus dem widerspruchsvollen Charakter dieser „Menge" geschöpften Argumente wenden sich gegen ihre Urheber zurück. In meinem neuen Beweise bin ich nun vollends bis zuletzt sogar ohne das Hilfsmittel der Rangordnung ausgekommen und habe damit, wie ich hoffe, jede Möglichkeit zur Einführung von W definitiv abgeschnitten.

Diesem W-Standpunkte scheint Herr J. König wenigstens nicht fern zu stehen. Denn obwohl er sich noch in seinem Heidelberger Vortrage*) selbst auf das Auswahlprinzip stützte, die wesentlichste Voraussetzung meines Theorems also anerkennt, hat er auch in seinen späteren Publikationen**) die Frage nach der möglichen Wohlordnung des Kontinuums

hatte ich selbst diese Antinomie unabhängig von Russell gefunden und sie schon vor 1903 u. a. Herrn Prof. Hilbert mitgeteilt.

*) Bericht des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg, 1904, p. 144: Zum Kontinuum-Problem.

**) Math. Annalen Bd. 60, p. 177, Bd. 61, p. 156. Über die „Antinomie Richard", die Herr König in dem letzten Artikel hier heranzuziehen versucht, vergl. G. Peano, Riv. d. Mat. VIII, Nr. 5, p. 148—157, sowie namentlich G. Hessenberg, „Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIII („Die Paradoxie der endlichen Bezeichnung"), wo der vorliegende Fehlschluß m. Er. treffend aufgedeckt wird. Der Begriff „endlich definierbar" ist kein absoluter sondern ein Relativbegriff und bezieht sich immer auf die gewählte „Sprache" oder „Bezeichnungsweise". Der Schluß, daß alle endlich definierbaren Gegenstände abzählbar sein müssen, gilt aber nur, wenn für alle ein und dasselbe Zeichensystem verwendet werden soll, und die Frage, ob ein einzelnes Individuum überhaupt einer endlichen Bezeichnung fähig ist oder nicht, ist an und für sich gegenstandslos, da man jedem Dinge nötigenfalls willkürlich eine beliebige Bezeichnung zuordnen kann. Übrigens hat die Wohlordnung des Kontinuums mit dieser Antinomie im Grunde nicht viel mehr zu tun wie jeder andere Satz, den man unter Benutzung eines Widerspruches gleich gut beweisen und widerlegen kann. In der Tat hat auch Herr F. Bernstein mit Hilfe der endlichen Definierbarkeit einmal beweisen wollen (Deutsche Math.-Vereinigung 1905, p. 447), daß das Kontinuum der zweiten Zahlenklasse, also einer wohlgeordneten Menge, äquivalent sein müsse; er ist sonach von demselben Begriffe ausgehend zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt wie Herr König. Die versprochene Ausführung dieses „Beweises" ist allerdings niemals erschienen.

ohne Rücksicht auf meine bereits erschienene Note als ein ungelöstes Problem behandelt, hat es aber bisher unterlassen, seinen Bedenken gegen irgend einen bestimmten Schritt meines Beweises öffentlichen Ausdruck zu geben.

Herr Ph. Jourdain*) behauptet zwar, den Satz von der Wohlordnung schon vor mir, und zwar einfacher und vollständiger, bewiesen zu haben, gibt ihm aber mit Rücksicht auf W eine Auslegung, nach welcher, wie er a. a. O. S. 469 ausdrücklich bemerkt, nicht einmal das Kontinuum ein Aleph zu sein brauchte. Nach ihm sollen nur „konsistente" Mengen, d. h. solche, welche keinen Bestandteil ähnlich W enthalten, Ordnungstypen und Kardinalzahlen besitzen, und gerade in dieser Zulassung „inkonsistenter" Mengen erblickt er die größere „Vollständigkeit" seines Resultates. Da nun aber „Ordnungstypen" und „Kardinalzahlen" in der Cantorschen Theorie nichts anderes sind als bequeme *Ausdrucksmittel*, um die Mengen in bezug auf Ähnlichkeit oder Äquivalenz ihrer Teile miteinander zu vergleichen, so kann ich der Aussage, einer wohlgeordneten Menge komme kein Ordnungstypus oder keine Kardinalzahl zu, keinen verständlichen Sinn abgewinnen, und dieser Versuch, unter Beibehaltung von W die Antinomie zu lösen, scheint mir nur auf ein Spiel mit Worten hinauszukommen. Willkürlich kann man freilich, etwa von der zweiten oder dritten Zahlenklasse an, alle höheren Ordnungstypen ignorieren, nicht mehr als solche anerkennen und erhält dann ein W vom Typus ω bezw. Ω, welches unter den gemachten Annahmen, und soweit man von seinem „Ordnungstypus" absieht, gewiß widerspruchsfrei ist. Nur bleibt es so *völlig unbestimmt* und vor allem ist es eben nicht *dasjenige* W, um das es sich in der Antinomie handelt, nämlich eine Menge von der Beschaffenheit, daß jeder beliebigen wohlgeordneten Menge ein Element von W als Ordnungstypus entspricht. Ein ähnliches Bedenken scheint auch Herrn Jourdain nachträglich gekommen zu sein und ihn, wenn auch nicht zum Verzicht auf sein W, so doch zur Einführung einer *zweiten* gleichfalls wohlgeordneten Menge $\mathfrak{W}$ veranlaßt zu haben, welche als „absolut un-

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 465. In den von ihm zitierten früheren Arbeiten (Phil. Mag. 1904, p. 61, p. 294; 1905, p. 42), auf die er seine Prioritätsansprüche stützt, ist dagegen von einer möglichen Wohlordnung überhaupt nicht die Rede. Vielmehr beschränkt sich in dem ersten dieser Artikel sein „Beweis, daß jede Kardinalzahl ein Aleph ist", lediglich auf einen Versuch, die Möglichkeit von Mächtigkeiten größer als alle Alephs durch den Hinweis auf die „Burali-Fortische Antinomie" auszuschließen. Hier wird also *ohne Beweis* vorausgesetzt, daß eine Menge, deren Kardinalzahl selbst kein Aleph ist, einen der Gesamtheit aller Alephs ähnlichen Bestandteil enthalten müßte; und der bloße Hinweis auf die Methoden und Resultate von Cantor und Hardy, welche sich auf die beiden ersten Mächtigkeiten beziehen, kann diesen Beweis doch unmöglich ersetzen.

endlich" wie das weiter unten zu besprechende Bernsteinsche W keiner „Fortsetzung" mehr fähig sein soll.

Was nun endlich den *Beweis* betrifft, den Herr Jourdain in der genannten Annalen-Note*) dem meinigen als den „einfacheren" gegenübergestellt, so ist das von ihm vorgeschlagene Verfahren zur Wohlordnung einer beliebigen Menge M das folgende. Man nehme ein beliebiges Element als erstes, dann noch eines usw., nach einer beliebigen endlichen oder unendlichen Anzahl von Elementen ein beliebiges Element des Restes als nächstfolgendes und fahre so fort, bis die ganze Menge erschöpft ist. Diese Idee einer sukzessiven Konstruktion ist nicht neu, sie wurde mir vor längerer Zeit einmal von Herrn F. Bernstein mündlich mitgeteilt und geht wahrscheinlich auf Herrn G. Cantor zurück, der aber offenbar Bedenken trug, sie als *Beweis* anzuerkennen. Dieselbe Konstruktion empfiehlt auch Herr E. Borel**), um sie ohne weitere Begründung sofort zu verwerfen und damit, wie er meint, das Auswahlprinzip ad absurdum zu führen. Das ist ihm aber keineswegs gelungen; denn nicht die unendlich wiederholte *Auswahl* ist es, welche diesem „Beweise" entgegensteht, sondern einfach die Tatsache, daß er nicht zum Ziele führt. Läßt man nämlich das oben erwähnte Peanosche Prinzip, welches die Auswahl aus einer einzigen Menge gestattet, einmal gelten, so gibt es keine Grenze mehr für seine wiederholte Anwendung. Aber was *beweist* denn diese ganze Betrachtung? Offenbar nicht mehr, als daß jede wohlgeordnete echte Teilmenge M' von M durch Hinzufügung eines willkürlichen Elementes m' aus dem Reste noch erweitert werden kann; oder vielmehr dies ist die *Voraussetzung*, die — im strikten Gegensatz zur Bernstein-Schoenfliesschen Auffassung — dem ganzen Verfahren zugrunde liegt. Läßt sich nun beweisen, daß unter den wohlgeordneten Bestandteilen von M ein *größter* L *existiert*, so wie z. B. bei mir die Existenz einer größten γ-Menge L_γ *bewiesen* wird, so muß $L = M$ sein und M ist wohlgeordnet. Genau so will auch Herr Jourdain schließen; nur fehlt ihm dazu als wesentliche Prämisse der Nachweis für die Existenz von L. Diese setzt er vielmehr *unbewiesen* voraus, indem er annimmt, daß sein Verfahren, sofern es die Menge M nicht erschöpft, in einer wohlgeordneten Teilmenge ähnlich $\mathfrak{W}$ seinen Abschluß finden müßte. Die „Einfachheit" dieses Beweises geht also so weit, daß er sich auf einen einzigen Schluß reduziert; allerdings einen Fehlschluß.***)

*) l. c. p. 468. **) Math. Annalen Bd. 60, p. 194.

***) An derselben Unbestimmtheit wie das Cantor-Jordainsche Verfahren leidet Hardys angebliche und u. a. auch von Herrn Schoenflies (l. c. p. 183) ausdrücklich anerkannte „Konstruktion einer Teilmenge des Kontinuums von der zweiten Mächtigkeit" (Quart. Journ. of Math. 1903, p. 87). Er gibt eine Regel, aus einer

Während Herr **Jourdain**, wie wir sahen, der „inkonsistenten" Menge W immerhin noch zweifelnd gegenübersteht, macht sie Herr F. **Bernstein***) bereits zum Gegenstande einer dogmatischen Theorie. Da der widerspruchsvolle Charakter dieser „Menge aller Ordnungszahlen" bekanntlich zutage tritt, wenn man ihr ein weiteres Element e hinzufügt, welches auf alle Elemente von W folgt, so glaubt Herr **Bernstein** alle Schwierigkeiten beseitigen zu können, indem er eine solche Anhängung eines neuen Elementes als der Definition von W widersprechend für unzulässig erklärt. Die Menge W soll nur die Ordnungstypen aller „fortsetzbaren" wohlgeordneten Mengen oder aller „Abschnitte wohlgeordneter Mengen" umfassen, W selbst aber „nicht fortsetzbar" sein. Von diesem Standpunkte aus kritisiert er dann in meinem Beweise von 1904 den Übergang 7 V von der wohlgeordneten Menge L zu (L, m_1'), weil doch L möglicherweise der Menge W ähnlich sein könnte,**) und konstruiert mit Hilfe von W eine Menge Z, welche keiner Wohlordnung fähig sein soll.

Freilich ist dies verlorne Liebesmüh. Denn wenn die Menge W einmal existiert, so ist sie, wie Herr **Bernstein** ausdrücklich zugibt, auch wohlgeordnet mit einem bestimmten Ordnungstypus β, und jede andere wohlgeordnete Menge ist entweder W selbst ähnlich oder einem Abschnitte von W. Nach der ein für alle Mal feststehenden **Cantor**schen Definition für das Größer und Kleiner der Ordnungszahlen wäre somit β größer als jede andere Ordnungszahl α, und in der nach der Größe geordneten Menge (W, β) rangierte β *hinter* allen Elementen von W, d. h. W wäre tatsächlich „fortsetzbar", entgegen seiner Definition und trotz aller Verbote. Gegen diese unerwünschte Folgerung weiß Herr **Bernstein** nichts weiter einzuwenden als***) „daß der Widerspruch nur daraus entsteht, daß β als

---

bereits konstruierten abzählbaren und wohlgeordneten Teilmenge A ein neues Element des Kontinuums abzuleiten, welches von allen vorhergehenden verschieden ist. Da aber diese Regel *nicht eindeutig* ist, sondern von der in weiten Grenzen willkürlichen Darstellung durch „Fundamentalreihen" abhängt, so besitzt sein Verfahren keinen Vorzug vor dem sehr viel einfacheren Cantorschen „Diagonalverfahren", welches nur eine Umordnung nach dem ω-Typus erfordert, und liefert eben so wenig wie dieses eine *bestimmte* Teilmenge von der zweiten Mächtigkeit; sondern bestenfalls einen neuen Beweis der Tatsache, daß die Mächtigkeit des Kontinuums $\geqq \aleph_1$ ist.

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 187.

**) Herr Bernstein verwirft damit nicht nur einen „Teil", wie er sagt, sondern den gesamten Inhalt des Jourdainschen Beweises, obwohl sein eigenes W dem Jourdainschen $\mathfrak{W}$ genau entspricht. Bei Jourdain kann L, eben weil es fortsetzbar ist, mit $\mathfrak{W}$ nicht ähnlich sein, während Bernstein umgekehrt aus der Ähnlichkeit mit W auf die Nicht-Fortsetzbarkeit schließt. Auch hier werden also aus übereinstimmenden Annahmen entgegengesetzte Folgerungen gezogen.

***) a. a. O. p. 189. Nur habe ich e durch β ersetzt und einige Worte durch den Druck hervorgehoben.

auf alle Elemente von W folgend *angenommen* wird. Wenn nur die Vereinigungsmenge $(W;\, \beta)$ gebildet wird, ohne daß zwischen β und den Elementen von W eine *Ordnungsbeziehung festgesetzt* wird, so führt das zu keinem Widerspruch." Als ob es nur auf das *Wort* „Ordnungsbeziehung" oder die *Schreibweise* $\alpha \prec \beta$ ankäme, und als ob durch Vermeidung eines *Wortes* eine objektive mathematische *Tatsache* beseitigt werden könnte! Die Mathematik wäre keine internationale Wissenschaft, wenn ihre Sätze nicht einen von der Sprache, in der wir sie ausdrücken, unabhängigen objektiven Inhalt besäßen. Bei der Prüfung eines Widerspruches handelt es sich ja gar nicht darum, ob eine bedenkliche Folgerung *wirklich vollzogen* und offiziell *anerkannt*, sondern lediglich, ob sie überhaupt formell *möglich* ist; und diese Möglichkeit allein deswegen zu verneinen, *weil* sie zu einem Widerspruche führt, wäre offenbar eine petitio principii oder ein circulus vitiosus. In der Tat kommt aber das eingeschlagene Verfahren zur Rechtfertigung von W darauf hinaus, den in seiner Definition liegenden Widerspruch nicht zu lösen, sondern zu *ignorieren*. Wenn eine Annahme A nach den allgemeinen Prinzipien zu zwei entgegengesetzten Folgerungen B und B' Anlaß gibt, so ist A als unhaltbar aufzugeben. In dem hier vorliegenden Falle soll es aber erlaubt sein, sich für die eine dieser Folgerungen B zu entscheiden und die andere B', weil sie dann mit B im Widerspruch stände, durch ein Ausnahmegesetz zu verbieten oder durch Namensänderung zu verschleiern. Da dieses Verfahren ersichtlich auf jede beliebige Hypothese A anwendbar wäre, so gäbe es überhaupt keinen Widerspruch; man könnte alles behaupten, aber nichts beweisen, da mit der Möglichkeit eines Widerspruches auch die eines Beweises beseitigt wäre, und eine mathematische Wissenschaft könnte nicht existieren.*)

Daß es tatsächlich immer möglich ist, einer *beliebigen* wohlgeordneten Menge M ein weiteres Element u als letztes hinzuzufügen, läßt sich übrigens aus den allgemeinen Prinzipien der Mengenlehre elementar *beweisen*, wenn man nur eine rein formale Definition der Wohlordnung, wie die hier am Schlusse des § 1 gegebene, zugrunde legt. Ist nämlich die Wohlordnung von M gegeben durch das System der „Reste" $\mathfrak{R}(x)$, welche zu den Elementen x von M gehören, so genügt es, jedem dieser Reste (unabhängig von

---

*) Über die verschiedenen Versuche zur „Rettung von W" vergl. auch G. Hessenberg „Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV („Ultrafinite Paradoxieen"), wo es am Schlusse von § 98 heißt: „Die Menge W selbst ist übrigens gegen alle Ehrenrettungen im höchsten Grade undankbar. So bemühen sich im 60ten Bande der Mathematischen Annalen gleichzeitig Bernstein und Jourdain um ihre Widerspruchslosigkeit, wobei der erste auf Grund der Eigenschaften von W beweist, daß es Mengen gibt, die nicht wohlgeordnet werden können, während dem zweiten der Beweis des Gegenteils gelingt."

seiner Anordnung) durch einfache Vereinigung mit der Menge $\{u\}$ das neue Element hinzuzufügen, um dann zusammen mit der Menge $\{u\}$ ein neues Restesystem zu erhalten, welches die verlangte Wohlordnung von $M_1 = M + \{u\}$ leistet. In der Tat ist dann sehr einfach einzusehen, daß jede Untermenge von M_1 wieder ein „erstes Element" in dem a. a. O. definierten Sinne besitzt und daß alle Elemente von M dem Elemente u „vorangehen". Mit diesem Beweise, den ich in meiner Note von 1904 nur wegen seiner trivialen Einfachheit als unnötig weggelassen hatte, ist nach dem Obigen gleichzeitig auch die Nichtexistenz von W gesichert, und alle aus W gezogenen Folgerungen werden hinfällig. Da nun andererseits „Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge" gewiß ein logisch zulässiger *Begriff* ist, so folgt weiter, was allerdings viel einfacher schon aus der „Russellschen Antinomie" hervorgeht, daß nicht jeder beliebige Begriffsumfang als Menge behandelt werden darf und daß somit die übliche Mengendefinition zu weit ist. Beschränkt man sich aber in der Mengenlehre auf gewisse feststehende Prinzipien wie die unserem Beweise zugrunde liegenden, einfache Mengen zu bilden und aus gegebenen neue abzuleiten, so lassen sich alle solchen Widersprüche vermeiden.

d. Einwand der speziellen Erzeugungsprinzipien und der Menge Z.

Ebenfalls gegen den letzten Schritt 7 V meines Beweises richtet sich vom Standpunkte desselben W-Glaubens aus die Kritik des Herrn A. Schoenflies*) und wird somit durch die voraufgehenden Erörterungen mit der Bernsteinschen gleichzeitig erledigt. Der betreffende Artikel enthält aber noch weitere Irrtümer und Mißverständnisse, die hier nicht unerwähnt bleiben können.

Zunächst unterscheidet Herr Schoenflies in der Theorie der wohlgeordneten Mengen „einen allgemeinen und einen speziellen Teil" und behauptet, daß *nur* die Theoreme des „allgemeinen Teiles" auf der bekannten Cantorschen *Definition* der Wohlordnung**), die übrigen aber auf „Erzeugungsprinzipien" beruhen. In Wahrheit müssen vielmehr *alle* Theoreme über einen Begriff aus seiner Definition zu beweisen sein, anderenfalls wären sie überhaupt nicht bewiesen. Stehen für einen Begriff zwei Definitionen zur Verfügung, so hat man sich bestimmt für die eine zu entscheiden oder die Äquivalenz der beiden nachzuweisen; jedes Schwanken zwischen zwei Definitionen oder die Ergänzung der einen durch die andere ist logisch völlig unzulässig. — Herr Schoenflies fährt dann fort:

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 181.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 49, p. 207.

„Will man auf dieser allgemeinen Grundlage den fraglichen Satz beweisen, so hat man zu zeigen, daß eine unendliche Reihe von Mengen M_ι, deren Mächtigkeiten abnehmen, nicht existieren kann; jede Reihe der Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2 > \mathfrak{m}_3 > \cdots$ müßte nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen. Dies ist die notwendige *und hinreichende* Bedingung des Satzes." Notwendig aber *nicht* hinreichend, und eben deshalb zu einem Beweise des Theorems nicht zu verwenden. Das angeführte Kriterium bezieht sich lediglich auf die Wohlordnung der nach ihrer Größe geordneten *Mächtigkeiten* und gar nicht auf die Wohlordnung der *Mengen* selbst, um die es sich in meinem Theorem handelt. Sind alle Mächtigkeiten Alephs, so sind sie allerdings auch nach ihrer Größe wohlgeordnet, aber umgekehrt kann man *nicht* schließen, während der Vorschlag des Herrn Schoenflies dies augenscheinlich erfordert. Nicht einmal die *Vergleichbarkeit* beliebiger Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit läßt sich nach dieser Methode beweisen, sie liegt ihr vielmehr schon als Voraussetzung zugrunde. „Diesem Weg folgt der Zermelosche Beweis nicht." Allerdings nicht, weil ein Beweis so eben nicht geführt werden kann. „Er operiert mit Hilfsmitteln, die den speziellen Teil der Theorie der wohlgeordneten Mengen, nämlich ihre Erzeugung betreffen." Ganz im Gegenteil beruht mein Beweis ausschließlich auf der klassischen Cantorschen Definition und hat mit „Erzeugungsprinzipien" in dem angenommenen Sinne als selbständigen Beweisquellen nichts zu schaffen.

„Erzeugungsprinzipien kann man zunächst nur *axiomatisch postulieren* und hat dann ihre Berechtigung nachzuweisen. Auch die Einführung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse und des Fortgangsprinzips von n auf ω war ursprünglich nur mittels eines solchen Axioms möglich. Der Nachweis seiner Zulässigkeit ist durch die von Herrn G. Cantor gegebene ausführliche Theorie dieser Zahlen und ihre ausnahmslose Gesetzmäßigkeit als geführt zu betrachten." Vielmehr definiert G. Cantor*) die Zahlen der zweiten Zahlenklasse als die *Ordnungstypen*, welche einer wohlgeordneten abzählbaren Menge zukommen können, und *beweist* alles übrige aus dieser Definition. Vorausgesetzt wird lediglich die Existenz abzählbarer Mengen oder der Typus ω, durch den sie definiert sind; weiter braucht es keines Axioms. Wäre aber die Existenz solcher Ordnungstypen irgendwie zweifelhaft, so könnte auch der schönste Formalismus nicht helfen. In analoger Weise wird jede höhere Zahlenklasse vermittels der vorhergehenden definiert, *ohne* daß es dazu „einer Neuschöpfung, resp. eines neuen Axioms und des Nachweises seiner Berechtigung bedarf". In meinem Beweise hat nun Herr Schoenflies gleichfalls ein neues „Postulat" entdeckt, „das die Erzeugung

*) Math. Annalen Bd. 49, p. 221.

wohlgeordneter Mengen betrifft. Es besagt nämlich, daß, wenn L irgend eine wohlgeordnete Menge ist, auch (L, m) eine solche ist". In Wahrheit gar kein „Postulat", sondern, wie wir oben sahen, ein *beweisbarer Satz*. „Diese Annahme und insbesondere der Gebrauch, den H. Z. von ihr macht, *schließt* so zu sagen *die sämtlichen möglichen Erzeugungsprinzipien in sich ein*. Sie *enthält aber noch mehr*, und gerade deshalb ist sie unzulässig." Auch hier verhält sich alles genau umgekehrt, als Herr Schoenflies behauptet. Bei G. Cantor dienen die „Erzeugungsprinzipien" *nicht* zur „Herstellung wohlgeordneter Mengen", sondern zur systematischen Auffindung sämtlicher Ordnungstypen einer gegebenen Zahlenklasse. Hier ist die Hinzufügung eines einzelnen Elementes an das Ende einer Menge von gegebenem Ordnungstypus ξ, also die Operation $\xi + 1$, das „erste Erzeugungsprinzip", welches innerhalb einer *jeden* Zahlenklasse neue Ordnungstypen liefert und die *Voraussetzung* aller übrigen Erzeugungsprinzipien bildet. Nur *reicht* es schon in der zweiten Zahlenklasse *nicht aus*, da es, von ω ausgehend, nicht einmal $\omega \cdot 2$ erzeugen könnte, und bedarf daher der Ergänzung durch das „zweite Erzeugungsprinzip", welches sich auf die „Fundamentalreihen" vom Typus ω bezieht. In den höheren Zahlenklassen bedürfte man *außer* diesen beiden noch *weiterer* Prinzipien. Niemals aber führt das „erste Erzeugungsprinzip" $\xi + 1$ aus irgend einer Zahlenklasse hinaus, da die *Mächtigkeit* einer transfiniten Menge, welche durch Definition das unterscheidende Merkmal der verschiedenen Zahlenklassen bildet, durch Hinzufügung eines einzelnen Elementes bekanntlich nicht geändert wird. Dementsprechend wird auch in meinem Beweise die Wohlordnung der Gesamtmenge natürlich *nicht* durch *diese* Operation „hergestellt", sondern, wie ich am Schlusse ausdrücklich bemerkte, durch die „*Verschmelzung* der verschiedenen möglichen γ-Mengen". Nur kann eben jede einzelne γ-Menge nach diesem Prinzip „fortgesetzt" werden, worauf ich dann den Schluß gründe, daß $L_\gamma = M$ sein muß. — Sehr seltsam ist weiter die Behauptung: „*Nirgends* bedarf man sonst einer Annahme, wie sie der Zermelosche Beweis benutzt" — wo doch die ganze Theorie der Ordnungszahlen und Erzeugungsprinzipien auf dieser Operation $\xi + 1$ basiert.

Jetzt kommt aber der Hauptpunkt. „Der Begriff der *Gesamtheit* aller überhaupt möglichen Erzeugungsprinzipien wohlgeordneter Mengen ist meines Erachtens ein *wohldefinierter mengentheoretischer Begriff*, ebenso der Begriff der mit ihnen herstellbaren wohlgeordneten Mengen ... in demselben Sinn ... wie die Gesamtheit der ganzen Zahlen." Damit wird also das Dogma vom W verkündigt. Auf eine Rechtfertigung dieses widerspruchsvollen Begriffes, die Herr F. Bernstein doch wenigstens *versucht* hatte, läßt Herr Schoenflies sich gar nicht erst ein, sein „Erachten" soll uns hier genügen. Die nun folgende Unterscheidung zwischen „herstellbaren"

und „nicht herstellbaren“ wohlgeordneten Mengen ist nicht recht zu verstehen, zumal schon im nächsten Absatze eine „nicht herstellbare“ Menge ohne weiteres auch als „logisch widerspruchsvoll“ bezeichnet wird. „Jedenfalls gelangen wir zu einer ebenfalls *wohldefinierten Gesamtheit* wohlgeordneter Mengen.... Die dadurch bestimmte wohlgeordnete Menge sei Z. Ihrer Definition nach gibt sie die Grenze an, über die wir bei der wirklichen Herstellung einer wohlgeordneten Menge niemals hinauskommen.“ Offenbar soll dieses Z die Gesamtheit der möglichen *Ordnungstypen* solcher Mengen darstellen, aber diese von G. Cantor so sorgfältig getrennten Begriffe einer geordneten „Menge“ und ihres „Ordnungstypus“ werden in dem Schoenfliesschen Artikel überhaupt nicht unterschieden, eine Ungenauigkeit, die, wie wir sogleich sehen werden, auch nicht ohne verhängnisvolle Folgen geblieben ist.

„Nehmen wir zunächst einmal an, daß Z die zweite Zahlenklasse ist, d. h. also, daß alle wohlgeordneten Mengen, die wir ... bilden können, niemals über die zweite Zahlenklasse hinausführen. ... In diesem Falle stellt die Menge (Z, m) einen in sich widerspruchsvollen Begriff dar....“ Hiernach scheint also Herr Schoenflies den Ordnungstypus von (Z, m) für den *ersten* zu halten, welcher nicht mehr der zweiten Zahlenklasse angehört. Nun hat aber Cantor bewiesen, daß *die Gesamtheit der Zahlen der zweiten Zahlenklasse selbst nicht mehr abzählbar* ist, ihr Ordnungstypus also bereits zur nächstfolgenden Zahlenklasse gehört, während man mittelst des „ersten Erzeugungsprinzipes“ $\xi + 1$ immer nur Zahlen derselben Klasse erhält. Sonach wäre also auf Grund der gemachten Annahme nicht erst (Z, m), sondern bereits *Z selbst ein widerspruchsvoller Begriff*. Und in der Tat ist das Schoenfliessche Z genau so wie das Bernsteinsche W, weil es eben seinen eigenen Ordnungstypus nicht als Element enthalten kann, wie wir oben sahen, unter allen Umständen mit inneren Widersprüchen behaftet.

„Auf vorstehender Grundlage“ wird nun eine neue Methode zur Prüfung des fraglichen Satzes vorgeschlagen, welche, wie Herr Schoenflies sich nachzuweisen bemüht, gleichfalls zu *keinem Resultate* führt. Gewiß gibt es immer mancherlei Methoden, ein gegebenes Theorem *nicht* zu beweisen, und namentlich verschwommene und widerspruchsvolle Begriffe dürften zur Vermeidung von Beweisen besonders geeignet sein. Nur kann man wirkliche Beweise durch solche Hilfsmittel natürlich auch nicht widerlegen. Das vorgeschlagene Verfahren besteht aber darin, daß der wohlgeordnete Bestandteil L der betrachteten Menge M mit den oben charakterisierten Mengen W und Z verglichen wird. Dabei ergeben sich dann verschiedene Fälle, welche alle logisch gleich möglich sein sollen, während nur der eine von ihnen den in meinem Beweise gemachten An-

nahmen entspricht. Das kann natürlich nicht wundernehmen, nachdem Herr Schoenflies alle diejenigen Widersprüche, welche zur Ausschließung der übrigen Fälle führen, bereits in seine Voraussetzungen aufgenommen hat.

Wenn also Herr Schoenflies am Schlusse seines Artikels bemerkt: „Meines Erachtens sollte man mit Annahmen, die zu widerspruchsvollen Begriffen oder Resultaten führen, auch in der Mengenlehre ebenso verfahren, wie man es sonst zu tun pflegt“, so kann man gewiß beistimmen. Dieses Verfahren besteht nämlich darin, daß man solche Annahmen ausschließt und aus widerspruchsvollen Begriffen keine Folgerungen ableitet. In meinem Beweise ist dieses Verfahren auch streng eingehalten, nicht aber in der Kritik des Herrn Schoenflies.

e. Zusammenfassung.

Die vorstehende Erörterung der gegen meinen Beweis von 1904 gerichteten Opposition läßt sich wohl am einfachsten in die folgenden Sätze zusammenfassen. Während Herr Poincaré mit seiner formal-logischen Kritik, welche die Existenz der gesamten Mathematik bedrohen würde, bisher noch auf keiner Seite Zustimmung gefunden hat, lassen sich alle übrigen Gegner in zwei Klassen einteilen. Die einen, welche gegen meine Deduktionen durchaus nichts einzuwenden haben, beanstanden die Anwendung eines unbeweisbaren allgemeinen Prinzipes, ohne zu bedenken, daß solche Axiome jeder mathematischen Theorie zugrunde liegen und daß gerade das von mir herangezogene für den Ausbau der Wissenschaft auch sonst nicht entbehrt werden kann. Die anderen Kritiker dagegen, welche sich durch eingehendere Beschäftigung mit der Mengenlehre von dieser Unentbehrlichkeit überzeugen konnten, gründen ihre Einwände auf die „Burali-Fortische Antinomie“, die für meinen Standpunkt tatsächlich *ohne Bedeutung ist*, da die von mir benutzten Prinzipien die Existenz einer Menge *W ausschließen*.

Die verhältnismäßig große Anzahl der gegen meine kleine Note gerichteten Kritiken ist ein Zeugnis dafür, daß dem Satze von der möglichen Wohlordnung beliebiger Mengen offenbar starke Vorurteile im Wege stehen. Die Tatsache aber, daß man in meinem Beweise trotz eingehender Prüfung, für die ich allen Kritikern zu Dank verpflichtet bin, keine *mathematischen Irrtümer* hat nachweisen können, und daß die gegen meine *Prinzipien* erhobenen Einwände einander widersprechen und so sich gewissermaßen gegenseitig aufheben, läßt mich hoffen, daß sich alle diese Widerstände durch genügende Aufklärung mit der Zeit wohl werden überwinden lassen.

Chesières, den 14. Juli 1907.

Die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. Br.

Wenn ich im vorliegenden Aufsatze die Grundlagen der Picard-Vessiotschen Theorie von neuem eingehend behandle, so geschieht dies, weil die folgende Darstellung, wie mir scheint, die dem Gegenstand bisher gewidmeten Untersuchungen mehrfach ergänzt und vervollständigt. Ich beschränke mich in dieser Arbeit darauf, die Existenz der Rationalitätsgruppe, die nach Fixierung eines Rationalitätsbereiches zu einer linearen homogenen Differentialgleichung gehört, nachzuweisen. Das Problem entwickle ich aus dem Gegenstand heraus in durchaus elementarer Weise und benütze hierbei keine Sätze aus Lies Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Den Aufsatz habe ich so abzufassen gesucht, daß er ohne Benützung anderer Abhandlungen verständlich ist.

Der *Rationalitätsbereich* Σ, welcher der Untersuchung zugrunde liegt, sei auf folgende Art definiert: *Er soll alle reellen und imaginären Konstanten umfassen. Er kann hiermit erschöpft sein; enthält er außerdem noch Funktionen einer unabhängigen Variablen x, so soll jede von ihnen ausnahmslos in demselben Bereich S der Ebene eine eindeutige, bis auf isolierte Punkte überall in S reguläre analytische Funktion sein. Dem Begriff des Rationalitätsbereiches entsprechend soll Σ in sich derartig abgeschlossen sein, daß durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division je zweier Funktionen aus Σ (die Division durch Null ist ausgeschlossen), sowie durch Differentiation jeder Funktion aus Σ das System Σ nicht verlassen wird.*

Bei dieser Festlegung des Rationalitätsbereiches Σ kann man wegen des bis auf isolierte Punkte innerhalb S regulären Charakters jeder Funktion von Σ stets zwei beliebige von ihnen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differenzieren. Infolge der Abgeschlossenheit des Rationalitätsbereiches Σ gegenüber diesen Operationen erhält man auf dem angegebenen

Wege nur Funktionen aus Σ; die sich ergebenden Funktionen sind daher infolge der über Σ getroffenen Voraussetzungen innerhalb S überall bis auf isolierte Punkte regulär. Da die Funktionen aus Σ überall innerhalb S bis auf isolierte Punkte regulär sind, so ist auch für jede algebraische Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, abgesehen von isolierten Punkten, überall innerhalb S die Existenz regulärer Integrale gesichert.*)

Wir setzen die Picard-Vessiotsche Theorie für eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

mit Koeffizienten aus Σ auseinander. Einleitend möchte ich mir erlauben, für die Kenner der Materie einige Punkte hervorzuheben und hierzu zum Vergleiche die Darstellungen von Herrn Picard im dritten Bande seines Traité d'analyse, S. 531 ff. (Paris 1896) und von Herrn Ludwig Schlesinger im ersten Teile des zweiten Bandes seines Handbuches der Theorie der linearen Differentialgleichungen, S. 64, heranzuziehen. Unser Rationalitätsbereich braucht die unabhängige Variable x nicht zu enthalten. Im Mittelpunkte der Arbeit steht die im § 2 eingeführte Differentialgleichung $f=0$. Sie spielt die gleiche Rolle wie die in speziellerer Weise gewonnene Differentialgleichung $f=0$ bei Herrn Picard (a. a. O. S. 534) und die Gleichung (21) $\Theta(U)=0$ bei Herrn Schlesinger (a. a. O. S. 65). Die Differentialgleichung $f=0$ und alle Differentialgleichungen, die sie gleichberechtigt vertreten können, haben genau dieselbe Ordnung, die durch die lineare homogene Differentialgleichung (D) und den Rationalitätsbereich Σ eindeutig bestimmt ist. Im § 3 und § 4 werden diese Differentialgleichungen ihrer Natur nach näher untersucht und der Zusammenhang ihrer Integrale mit denjenigen der linearen homogenen Differentialgleichung (D) eingehend studiert. Hierauf behandle ich die zu (D) gehörige Rationalitätsgruppe. Mit Herrn F. Klein ziehe ich es vor, statt von der Transformationsgruppe von der Rationalitätsgruppe zu sprechen. Ich betrachte die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ aller linearen homogenen Substitutionen von verschwindenden und nicht verschwindenden Determinanten, die man auf ein bestimmt gewähltes Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ der Differentialgleichung (D) anwenden kann, so daß hierdurch alle richtigen Gleichungen, die $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten ganz und rational enthalten und Koeffizienten aus Σ

*) In dem vorliegenden Aufsatz ist der Rationalitätsbereich ebenso wie in meiner Arbeit „Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“ (Math. Ann. Bd. 62, S. 89) festgelegt; nur ist hier, was dort nicht nötig ist, die Zugehörigkeit aller reellen und imaginären Konstanten zum Rationalitätsbereich gefordert.

besitzen, in ebenfalls richtige Gleichungen übergehen (§ 5). Durch Satz XII des § 8 (S. 154), auf den ich als Hauptresultat besonders verweise, bestimme ich diejenigen Substitutionen aus $\mathfrak{G}$, deren Determinanten nicht verschwinden — diese Gesamtheit wird mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichnet —, schärfer als bisher und beweise, was meines Wissens noch nicht geschehen ist, daß die Rationalitätsgruppe $\mathfrak{G}_1$ neben jeder Transformation die reziproke enthält. Bei der Definition von $\mathfrak{G}_1$ läßt sich u. a. der Gebrauch der von Herrn Picard mit $\varphi = 0$ (S. 534) und der von Herrn Schlesinger mit (20) numerierten und gleichfalls mit $\varphi = 0$ bezeichneten Hilfsdifferentialgleichung umgehen.

§ 1.

Ein Koenigsbergerscher und ein Picardscher Satz.

Für die folgenden Betrachtungen ist ein Satz von Herrn Leo Koenigsberger von grundlegender Bedeutung. Er gilt zwar für einen enger definierten Rationalitätsbereich, als es der Rationalitätsbereich Σ ist (z. B. ist für seine Gültigkeit nicht die Zugehörigkeit aller Konstanten zum Rationalitätsbereich erforderlich). Da wir aber nur ausschließlich im Rationalitätsbereiche Σ operieren, wollen wir auch den Koenigsbergerschen Satz*), der das Fundament der folgenden Untersuchungen bildet, so formulieren, wie er von uns verwandt wird:

Haben die zwei algebraischen Differentialgleichungen:

$$f\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots; \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

und

$$F\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^sV}{dx^s}\right) = 0 \qquad (s \geqq p)$$

nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ und genügt ein Integral von $f = 0$, das keine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als die Differentialgleichung $f = 0$ befriedigt, auch der Differentialgleichung $F = 0$, so ist, falls f als ganze rationale Funktion von $V, \frac{dV}{dx}, \cdots, \frac{d^pV}{dx^p}$ betrachtet, in Σ algebraisch irreduzibel (d. h. nicht in Faktoren mit Koeffizienten aus Σ zerlegbar ist) ist, abgesehen von etwaigen

*) Leo Koenigsberger, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882, S. 5. Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1889, S. 65. Vgl. ferner Ludw. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2_1, S. 55, Leipzig 1897.

singulären Integralen, die $f=0$ besitzt, jedes Integral von $f=0$ auch ein Integral von $F=0$.

Etwaige singuläre Integrale von $f=0$, d. h. solche, die gleichzeitig $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}=0$ befriedigen, brauchen der Differentialgleichung $F=0$ nicht zu genügen. Enthält $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}=0$ nicht mehr $\frac{d^pV}{dx^p}$, so genügen etwaige singuläre Integrale von $f=0$, da sie $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}=0$ befriedigen, tatsächlich einer Differentialgleichung niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ. Enthält $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}$ noch $\frac{d^pV}{dx^p}$, so ist es in bezug auf diese Größe von niedrigerem Grade als f. Faßt man f und $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}$ als ganze rationale Funktionen von $\frac{d^pV}{dx^p}$ auf, so haben diese Funktionen keinen gemeinsamen Teiler; denn sonst wäre f in Faktoren mit Koeffizienten aus Σ zerlegbar, die in $\frac{d^pV}{dx^p}$ ganz und rational, in

$$\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}},\ \frac{d^{p-2}V}{dx^{p-2}},\ \ldots,\ \frac{dV}{dx},\ V$$

wenigstens rational sein müßten. Aus einer derartigen Zerlegung von f würde aber auf Grund eines bekannten Satzes*) im Widerspruch mit der Voraussetzung folgen, daß sich f auch in zwei Faktoren mit Koeffizienten aus Σ zerlegen läßt, die in bezug auf alle erwähnten Größen ganz und rational sind. Mithin läßt sich $\frac{d^pV}{dx^p}$ aus f und $\frac{\partial f}{\partial \frac{d^pV}{dx^p}}$ eliminieren, ohne daß das Eliminationsresultat etwa identisch verschwindet. Also auch in dem eben behandelten Falle genügen etwaige singuläre Integrale von $f=0$, da das Eliminationsresultat nicht mehr $\frac{d^pV}{dx^p}$ enthält, einer algebraischen Differentialgleichung höchstens $p-1^{\text{ter}}$ Ordnung mit Koeffizienten aus Σ. Daher gewinnen wir das für die folgenden Betrachtungen wichtige Resultat:

---

*) Vgl. etwa Webers Algebra, Bd. 1, § 20 (2te Aufl., Braunschweig 1898).

Bei den über $f = 0$ gemachten Voraussetzungen genügen etwaige singuläre Integrale von $f = 0$, welche die einzigen Integrale von $f = 0$ sind, die nicht $F = 0$ zu genügen brauchen, einer Differentialgleichung niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ.

Mit Hilfe des Koenigsbergerschen Satzes beweisen wir folgendes Theorem, das eine Erweiterung eines von Herrn E. Picard in seinem Traité d'analyse*) abgeleiteten Satzes darstellt: *r sei eine in dem Bereiche S der Ebene eindeutig bestimmte analytische Funktion, die innerhalb S nur isolierte Singularitäten hat; die Funktion r genüge der Differentialgleichung:*

$$g\left(r;\ \frac{dr}{dx};\ \cdots;\ \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}\right) = 0.$$

Diese sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die r zum Integral hat.

$$f\left(V;\ \frac{dV}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0$$

sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, welche die Funktion V zum Integral hat. Genügt nach Adjunktion der Funktion r zum Rationalitätsbereich Σ die Funktion V der Differentialgleichung:

$$f_1\left(V;\ \frac{dV}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{p'} V}{dx^{p'}}\right) = 0,$$

und ist diese für V die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus dem durch Adjunktion von r erweiterten Rationalitätsbereich, so besteht die Ungleichheit $p' + \lambda \geqq p$.

Für den Beweis können wir voraussetzen, daß

$$f\left(V;\ \frac{dV}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^p V}{dx^p}\right),$$

als ganze rationale Funktion von

$$V,\ \frac{dV}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^p V}{dx^p}$$

aufgefaßt, in diesen Größen im Bereiche Σ algebraisch irreduzibel ist. Sollte dies etwa von Anfang an nicht der Fall sein, so wäre ein Faktor von f mit Koeffizienten aus Σ zu betrachten, der diese Bedingung erfüllt und, gleich Null gesetzt, V zum Integral hat. Er stellt dann für V ebenfalls eine Differentialgleichung p^{ter} Ordnung dar. Ebenso kann man für den zu führenden Beweis die linke Seite der Differentialgleichung

$$g\left(r;\ \frac{dr}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}\right) = 0$$

*) E. Picard, Traité d'analyse, t. 3, S. 562 (Paris 1896).

als algebraisch irreduzible ganze rationale Funktion von $r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ mit Koeffizienten aus Σ auffassen.

Die l^{te} Ableitung von

$$g\left(r; \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}\right) = 0$$

ergibt sich durch Differentiation in der Form:

$$g' \frac{d^{\lambda+l} r}{dx^{\lambda+l}} + g_l\left(r; \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^{\lambda+l-1} r}{dx^{\lambda+l-1}}\right) = 0.$$

Hierbei bedeutet g' die partielle Abgeleitete von $g\left(r; \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}\right)$ nach $\frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ und g_l eine ganze rationale Funktion von

$$r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^{\lambda+l-1} r}{dx^{\lambda+l-1}} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hieraus folgt, daß sich $\frac{d^{\lambda+1} r}{dx^{\lambda+1}}, \frac{d^{\lambda+2} r}{dx^{\lambda+2}}, \cdots$ als rationale Funktionen von $r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ — dem ja auch die Koeffizienten von g angehören — ausdrücken. Bei dieser Darstellung der höheren als λ^{ten} Abgeleiteten von r durch

$$r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$$

treten die eben aufgezählten Funktionen im Nenner nur in der Verbindung $(g')^{s_l}$ auf; s_l ist hierbei eine ganze positive Zahl, die von der Höhe $\lambda + l$ der gebildeten Ableitung des r abhängt. Die im Nenner auftretende Funktion $g' = \frac{\partial g}{\partial \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}}$ enthält $\frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ entweder überhaupt nicht oder ist in bezug auf diese Größe von niedrigerem Grade als g. Wegen der über die Differentialgleichung $g = 0$ gemachten Voraussetzungen kann g' daher nicht für r verschwinden.

Wir betrachten nunmehr

$$f_1\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'} V}{dx^{p'}}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung werden rationale Verbindungen von r und seinen Abgeleiteten sein. Durch Multiplikation mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner kann man die Koeffizienten von f_1 als ganze rationale Funktionen von r und seinen Ab-

geleiteten voraussetzen. Höhere Abgeleitete von r als λ^{te} können durch r und seine Abgeleiteten bis zur Ordnung λ ausgedrückt werden. Mit den hierbei eingeführten Nennern, die in Potenzen von g' bestehen, können wir, da die ganze rationale Funktion g' von $r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ für r nicht verschwindet, rechts und links multiplizieren. Man kann daher die linke Seite von

$$f_1\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'} V}{dx^{p'}}\right) = 0$$

als ganze rationale Funktion von $r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ voraussetzen. Wir differenzieren die Gleichung $f_1 = 0$ nach x und behandeln die durch Differentiation aus $f_1 = 0$ abgeleitete Gleichung ebenso wie $f_1 = 0$. Auf diese Art fahren wir fort und gewinnen ein System von miteinander verträglichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&f_2\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'+1} V}{dx^{p'+1}}\right) = 0,\\
&f_3\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'+2} V}{dx^{p'+2}}\right) = 0,\\
&\vdots\\
&f_{\lambda+1}\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'+\lambda} V}{dx^{p'+\lambda}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nimmt man zu diesem System von Gleichungen noch die Differentialgleichung

$$g\left(r; \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}\right) = 0,$$

so hat man $\lambda + 2$ Gleichungen, die miteinander verträglich sind und r und seine Ableitungen höchstens bis zur λ^{ten} Ordnung ganz und rational enthalten. Aus den ersten $s + 1 \leqq \lambda + 1$ Gleichungen

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_{s+1} = 0$$

und der Gleichung $g = 0$ kann man $r, \frac{dr}{dx}, \cdots, \frac{d^\lambda r}{dx^\lambda}$ eliminieren und findet eine Relation:

$$R\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^{p'+s} V}{dx^{p'+s}}\right) = 0. \qquad (s \leqq \lambda).$$

R verschwindet nicht identisch, weil jede der Gleichungen

$$f_2 = 0, f_3 = 0, \cdots, f_{s+1} = 0$$

eine neue Abgeleitete von V einführt. Mithin ist $R = 0$ eine Differentialgleichung für V. Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung, die frei

von r und seinen Abgeleiteten sind, gehören dem ursprünglichen Rationalitätsbereich Σ an. V genügt auch der Differentialgleichung:

$$f\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots;\ \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0.$$

Infolge der für diese Differentialgleichung gültigen Voraussetzungen können wir den Koenigsbergerschen Satz anwenden. Wir finden, jedes Integral von $f = 0$, abgesehen von singulären, muß $R = 0$ genügen. Daher ist $p \leqq p' + s$, und da $s \leqq \lambda$, so wird, was zu beweisen war, $p \leqq p' + \lambda$.

§ 2.

Einführung einer zu der gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung (D) zugehörigen Funktion V und der durch V bestimmten Differentialgleichung (f).

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x) y = 0$$

sei die zu untersuchende lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ. Für sie sollen unter Zugrundelegung des Rationalitätsbereiches Σ die Grundlagen der Picard-Vessiotschen Theorie entwickelt werden. Infolge der über Σ gemachten Voraussetzungen hören alle einzelnen Funktionen aus Σ und daher auch die m Funktionen $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ nur an isolierten Punkten innerhalb des Bereiches S auf, regulär zu sein. Mithin gibt es nach dem Existenzsatz ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen von (D), das bis auf isolierte Punkte innerhalb S regulär ist und durch seine Anfangswerte und die seiner $m-1$ ersten Abgeleiteten für eine beliebige Stelle $x = x_0$ im Innern von S, an der die Funktionen $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ sämtlich regulär sind, festgelegt werden kann. $y_1, y_2, \cdots, y_m$ bedeute ein beliebiges, aber eindeutig bestimmtes, etwa auf die obige Art gewähltes Fundamentalsystem von Integralen von (D).

V sei irgend eine ganze rationale Funktion des Fundamentalsystems von Integralen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und eventuell deren Abgeleiteten mit folgenden Eigenschaften: die in V auftretenden Koeffizienten der Funktionen y_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ und deren Abgeleiteten mögen dem Rationalitätsbereiche Σ angehören, und die m Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ mögen sich als ganze rationale Funktionen von V und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken lassen. Dementsprechend setzen wir:

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

und

$$y_i = \mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m);$$

r und $\mathsf{X}_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ bedeuten ganze rationale Funktionen der hingeschriebenen Argumente mit Koeffizienten aus Σ.

Die Existenz wenigstens einer Funktion V der eben beschriebenen Eigenschaft habe ich in einer früheren Arbeit nachgewiesen (Math. Annalen Bd. 59, S. 435). Durch die Funktionen $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ und die Gesamtheit aller Konstanten wird ein Rationalitätsbereich P_1 bestimmt. Dieser Rationalitätsbereich P_1 soll das kleinste Funktionensystem sein, das durch die Gesamtheit aller reellen und imaginären Konstanten, sowie sämtlicher Koeffizienten $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung (D) entsteht und in sich derartig abgeschlossen ist, daß man je zwei Funktionen des Systems untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differenzieren kann, ohne hierdurch das Funktionensystem P_1 zu verlassen. Der Rationalitätsbereich P_1 enthält, da $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ wie alle Konstanten dem Rationalitätsbereiche Σ angehören, nur Funktionen aus Σ; entweder enthält Σ mehr Funktionen als P_1 oder ist mit P_1 identisch.

Wie ich a. a. O. zeigte, kann man sich aus $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Differentiation unter Verwendung von Konstanten m Funktionen $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_m(x)$ konstruieren; sie gehören nach ihrer Bildung dem Rationalitätsbereich P_1 und daher a fortiori Σ an. Durch $u_1, u_2, \cdots, u_m$ wird dann eine ganze rationale Funktion V von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ der besonderen Form:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$$

bestimmt, welche die Eigenschaften hat: ihre Koeffizienten $u_1, u_2, \cdots, u_m$ gehören dem Rationalitätsbereiche Σ an und jedes der Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von (D) läßt sich als ganze rationale Funktion von V und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken.

Wir führen die Untersuchung in größter Allgemeinheit, legen also den folgenden Betrachtungen *nicht* eine Funktion V der speziellen Form:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m,$$

wobei $u_1, u_2, \cdots, u_m$ geeignet gewählte Funktionen aus Σ sind, zugrunde. Wir betrachten vielmehr, wie wir oben angaben, *irgend eine* Funktion:

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right),$$

die ganz und rational in $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffi-

zienten aus Σ ist und durch die sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als ganze rationale Funktionen von V und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ in der Form:

$$y_i = \mathrm{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

darstellen lassen.

Durch Differentiation von

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

nach x erhält man die miteinander verträglichen Gleichungen:

$$V = r(y);\ \frac{dV}{dx} = r_1(y),\ \frac{d^2V}{dx^2} = r_2(y),\ \cdots,\ \frac{d^{m^2}V}{dx^{m^2}} = r_{m^2}(y).$$

Beseitigt man aus den eben gewonnenen Gleichungen mit Hilfe der Differentialgleichung (D) alle Abgeleiteten von $y_1, y_2, \cdots, y_m$, die von höherer als $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung sind, so lassen sich die dann noch verbleibenden der m^2 Größen $y_1, y_2, \cdots, y_m, y_1', y_2', \cdots, y_m', y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \cdots, y_m^{(m-1)}$ aus den ersten $s+1$ Gleichungen, wobei $s \leqq m^2$ ist, eliminieren. Als Eliminationsresultat findet man eine Differentialgleichung (E) von der s^{ten} Ordnung:

$$E\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots;\ \frac{d^sV}{dx^s}\right) = 0$$

mit Koeffizienten aus Σ. Ihr genügt die schon infolge ihrer Bildung als ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ überall bis auf isolierte Punkte innerhalb des Bereiches S der Ebene reguläre analytische Funktion

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right).$$

Die Differentialgleichung (E) heißt eine *Transformierte* oder *Resolvente von* (D).*)

Die Differentialgleichung (E), die wir für die Funktion V aufstellten, braucht nicht die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ zu sein, der die Funktion V als Integral genügt. Wir betrachten *die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die V zum Integral hat; diese sei mit*

$$\text{(f)} \qquad f\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots;\ \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

bezeichnet und habe die Ordnung p. (f) *werde, als ganze rationale Funktion*

*) Vgl. E. Vessiot, Encyklopädie der math. Wiss. Bd. 2, S. 268.

von $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \cdots, \frac{d^pV}{dx^p}$ *betrachtet, im Rationalitätsbereich* Σ *algebraisch irreduzibel angenommen.**) Durch die Funktion V ist die Differentialgleichung (f) offenbar eindeutig definiert.

§ 3.

Zusammenhang der Integrale von $f=0$ mit denjenigen von $D=0$.

In diesem Paragraphen wollen wir den Zusammenhang der Integrale der Differentialgleichung (f) des vorigen Paragraphen mit denen der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung (D) untersuchen. Da

$$y_i = \mathrm{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

ist, bilden die m Funktionen X_i ein Fundamentalsystem von Integralen von (D). Hieraus ergeben sich die m Differentialgleichungen:

$$\frac{d^m\mathrm{X}_i}{dx^m}\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right) + p_1(x)\frac{d^{m-1}\mathrm{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right)}{dx^{m-1}}$$

$$+ \cdots + p_m(x)\,\mathrm{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

Die erhaltenen Differentialgleichungen haben Koeffizienten aus Σ, ferner hat die Differentialgleichung (f) ein Integral V mit ihnen gemeinsam, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, als der Differentialgleichung (f) genügt. Hieraus folgt nach dem Koenigsbergerschen Satze, daß alle nicht singulären Integrale von $f=0$ die obigen m Differentialgleichungen erfüllen müssen.

Wir haben daher den Satz:

(I). *Ist w irgend ein nicht singuläres Integral von $f=0$, so sind die m Funktionen:*

$$\mathrm{X}_i\left(w;\ \frac{dw}{dx};\ \frac{d^2w}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung (D).

---

*) Herr Picard und Herr Schlesinger wählen V von Anfang an in besonderer Form:

$$V = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_my_m;$$

die Differentialgleichung (E) ist bei ihnen eine lineare homogene. Abgesehen davon, daß V in allgemeinerer Weise gewählt wurde, ist auch unser Übergang von (E) zu (f) von dem der genannten Autoren verschieden. Über diesen Punkt vgl. man meinen Brief an Herrn Picard, der im Bulletin des sciences math., 2e sér., t. 26, März 1902 abgedruckt ist.

Da $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen von (D) bilden und, wie wir soeben bewiesen haben, die m Funktionen

$$\mathsf{X}_i\left(w; \frac{dw}{dx}; \frac{d^2w}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ebenfalls der Differentialgleichung (D) genügen, können wir den gewonnenen Satz auch so formulieren:

(I_1). *Ersetzt man in*

$$y_i = \mathsf{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

rechter Hand die Funktion V durch irgend ein nicht singuläres Integral w von $f = 0$, so erhält man eine lineare homogene Substitution der Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$, das heißt, es gibt m^2 Konstante c_{ik}, so daß

$$\mathsf{X}_i\left(w; \frac{dw}{dx}; \frac{d^2w}{dx^2}; \cdots\right)$$

von der Form

$$c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

wird.

Wir beweisen nunmehr folgenden Satz:

(II). *Sind w_1 und w_2 zwei verschiedene nicht singuläre Integrale von $f = 0$, so sind die zwei linearen homogenen Substitutionen, die sie bestimmen,*

$$\mathsf{X}_i\left(w_1, \frac{dw_1}{dx}, \frac{d^2w_1}{dx^2}, \cdots\right) = \sum_{s=1}^{s=m} c_{is}^{(1)} y_s, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

und

$$\mathsf{X}_i\left(w_2, \frac{dw_2}{dx}, \frac{d^2w_2}{dx^2}, \cdots\right) = \sum_{s=1}^{s=m} c_{is}^{(2)} y_s, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

voneinander verschieden, das heißt, es stimmen nicht alle m^2 Konstanten $c_{ik}^{(1)}$ mit den entsprechenden m^2 Konstanten $c_{ik}^{(2)}$ überein.

Zum Beweise ersetze man in

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

rechter Hand die Größen y_i und deren Abgeleiteten durch die Funktionen

$$\mathsf{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right)$$

und ihre Abgeleiteten. Man erhält dann:

$$V = r\left(\mathsf{X}_1\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right), \mathsf{X}_2\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right), \cdots \mathsf{X}_m\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right), \frac{d\mathsf{X}_1}{dx}, \frac{d\mathsf{X}_2}{dx}, \cdots\right).$$

Die eben hergeleitete Relation kann als eine Differentialgleichung für V mit Koeffizienten aus Σ angesehen werden. Da V keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als der Differentialgleichung (f) genügt, so folgt nach dem Koenigsbergerschen Theorem, daß man für die nicht singulären Integrale w_1 und w_2 von $f=0$ die Relationen:

$$w_1 = r\left(\mathsf{X}_1\left(w_1;\ \frac{dw_1}{dx};\ \cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(w_1;\ \frac{dw_1}{dx};\ \cdots\right),\ \cdots,\ \mathsf{X}_m\left(w_1;\ \frac{dw_1}{dx};\ \cdots\right)\cdots\right)$$

und

$$w_2 = r\left(\mathsf{X}_1\left(w_2;\ \frac{dw_2}{dx};\ \cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(w_2;\ \frac{dw_2}{dx};\ \cdots\right),\ \cdots,\ \mathsf{X}_m\left(w_2;\ \frac{dw_2}{dx};\ \cdots\right)\cdots\right)$$

erhalten muß. Angenommen, die zwei durch

$$\mathsf{X}_i\left(w_1;\ \frac{dw_1}{dx};\ \frac{d^2w_1}{dx^2};\ \cdots\right) \quad \text{und} \quad \mathsf{X}_i\left(w_2;\ \frac{dw_2}{dx};\ \frac{d^2w_2}{dx^2};\ \cdots\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

bestimmten linearen homogenen Substitutionen wären identisch, so würde sich wegen der Übereinstimmung der rechten Seiten von w_1 und w_2 in den oben hergeleiteten Formeln die Gleichheit der linken Seiten, also $w_1 = w_2$, ergeben. Dies würde aber unserer Voraussetzung widersprechen; folglich sind die zwei linearen homogenen Substitutionen verschieden.

Ein Integral w von $f=0$ kann unter Umständen auch einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügen. Wir behaupten jetzt die Gültigkeit des folgenden Satzes:

(III). *Ist W irgend ein Integral von $f=0$, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügt, so sind die m Funktionen:*

$$\mathsf{X}_i\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \frac{d^2W}{dx^2};\ \cdots\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

linear unabhängig.

Angenommen, es bestehe eine Relation:

$$(R_1) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} l_i \mathsf{X}_i\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \frac{d^2W}{dx^2};\ \cdots\right) = 0,$$

wobei die Größen l_i $(i=1,2,\cdots,m)$ Konstanten bedeuten, die nicht sämtlich verschwinden. Die hingeschriebene Relation (R_1) kann als eine Differentialgleichung angesehen werden. Sie hat, da die Funktionen X_i Koeffizienten aus Σ haben und die Größen l_i als Konstanten ebenfalls Σ angehören, nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ. Die aufgestellte Differentialgleichung (R_1) hat mit der Differentialgleichung (f) das Integral W gemeinsam, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) genügt. Nach dem Koenigs-

bergerschen Theorem müssen daher jedenfalls alle Integrale von $f=0$, die keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als der Differentialgleichung $f=0$ genügen, auch (R_1) befriedigen. Im besonderen muß also für das Integral V die Relation:

$$\sum_{i=1}^{i=m} l_i \mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right)=0$$

bestehen. Die soeben gefundene Relation steht aber im Widerspruch mit der Tatsache, daß die m Funktionen

$$y_i=\mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

nach Voraussetzung ein Fundamentalsystem von Integralen von (D) bilden. Folglich ist die Relation (R_1) unmöglich, und unser Satz (III) ist bewiesen.

Da nach dem soeben bewiesenen Satz (III)

$$\mathsf{X}_1\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \frac{d^2W}{dx^2};\ \cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \cdots\right),\ \cdots,\ \mathsf{X}_m\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \cdots\right)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von (D) bilden und dies auch für die m Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ zutrifft, so folgt, daß m^2 Konstante a_{ik} von nicht verschwindender Determinante existieren, so daß

$$\mathsf{X}_i\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \frac{d^2W}{dx^2};\ \cdots\right)=\sum_{s=1}^{s=m} a_{is}y_s \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

wird, wobei die Determinante $|a_{ik}|\neq 0$.

Wir haben daher den Satz:

(III_1). *Ersetzt man in*

$$y_i=\mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

die Funktion V durch irgend ein Integral W von $f=0$, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) *genügt, so wird*

$$\mathsf{X}_i\left(W;\ \frac{dW}{dx};\ \frac{d^2W}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

von der Form $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{im}y_m$, wobei die Größen a_{ik} Konstanten mit nicht verschwindender Determinante bedeuten. Das Ersetzen des Integrals V von (f) *durch W liefert daher eine lineare homogene Substitution von nicht verschwindender Determinante.*

Aus dem Nichtverschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ folgt die Auflösbarkeit der Gleichungen:

$$\mathsf{X}_i\left(W; \frac{dW}{dx}; \frac{d^2W}{dx^2}; \cdots\right) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

nach den m Größen $y_1, y_2, \cdots, y_m$.

Da außerdem die Größen a_{ik} als Konstanten dem Rationalitätsbereiche Σ angehören, ferner die Funktionen X_i Koeffizienten aus Σ haben, ergibt sich der Satz:

(IV). *Jedes Integral W von $f = 0$, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als* (f) *genügt, hat die Eigenschaft, daß sich die m Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als ganze rationale Funktionen von W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ darstellen lassen.*

§ 4.

Mit V gleichberechtigte Funktionen und die durch sie bestimmten mit (f) analogen Differentialgleichungen. Näheres Studium derjenigen Integrale von $f = 0$, die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen genügen.

Der Schlußsatz führt dazu, sich näher mit denjenigen Funktionen zu beschäftigen, welche die Eigenschaft haben, daß sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als ganze rationale Funktionen von ihnen und ihren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ darstellen lassen.

Wir beweisen folgenden Satz:

(V). *W sei irgend ein eindeutig bestimmtes Integral einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ. Ist V irgend eine ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ und lassen sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ganz und rational sowohl durch V und dessen Abgeleiteten als auch durch W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken, so ist jede Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, der W genügt, nicht von niedrigerer Ordnung als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der V genügt.*

$$g\left(W; \frac{dW}{dx}; \frac{d^2W}{dx^2}; \cdot \ \cdot; \frac{d^\lambda W}{dx^\lambda}\right) = 0$$

sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die W zum Integral hat. Die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der V genügt, soll wie bisher mit

$$f\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

bezeichnet sein. Nach Voraussetzung ist V eine ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ. Da nach Voraussetzung $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ganze rationale Funktionen von W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ sind, so wird V eine ganze rationale Funktion von W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ. In diesem Sinne sei:

$$V = t\left(W; \frac{dW}{dx}; \frac{d^2W}{dx^2}; \cdots\right).$$

Nach Adjunktion von W zum Rationalitätsbereich Σ genügt V also einer algebraischen Gleichung, das heißt einer Differentialgleichung 0^{ter} Ordnung. Wenden wir den im § 1 auf Seite 133 bewiesenen Satz an, so ist das dortige $p' = 0$ und für r ist W getreten. Daher finden wir $\lambda \geqq p$. Hiermit ist Satz (V) bewiesen.

Als Zusatz zu (V) geben wir den Satz:

(V_1). *Ist W irgend ein Integral von $f = 0$ und lassen sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ganz und rational durch W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken, so genügt W keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$.*

Die Sätze (IV) und (V_1) lehren also, daß *nur* diejenigen Integrale W von $f = 0$, die keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) genügen, diese Integrale aber auch *ausnahmslos* die Eigenschaft haben, daß sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als ganze rationale Funktionen von ihnen und ihren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ darstellen lassen.

Wir beweisen ferner:

(VI). *Sind V und W zwei beliebige ganze rationale Funktionen von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ und lassen sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ganz und rational sowohl durch V und dessen Abgeleiteten, als auch durch W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken, so sind die Differentialgleichungen niedrigster Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ, denen die Funktionen V und W genügen, von den gleichen Ordnungen.*

Angenommen, die Differentialgleichungen niedrigster Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ, denen V beziehungsweise W genügen, seien von ungleichen Ordnungen. Daß V und W Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ genügen, ergibt sich aus § 2. Wegen der im Satze (VI) vorausgesetzten völligen Gleichberechtigung von V und W kann man mit V diejenige Funktion bezeichnet denken, die der Differentialgleichung höherer Ordnung genügt. Nach Satz (V) muß W dann einer Differentialgleichung gleicher oder höherer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ genügen. Die Annahme verschiedener Ordnungen der Differentialgleichungen niedrigster Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ, denen die Funktionen V

und W genügen, erweist sich also als unmöglich; hiermit ist unser Theorem bewiesen.

Aus den Sätzen (V) und (VI) können wir noch folgenden Schluß ziehen:

(VI_1). *Haben die Funktionen V und W die gleiche Bedeutung wie im Satz (V) und ist die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der die Funktion W genügt, von wirklich höherer Ordnung als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der V genügt, so ist W keine ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ.*

Unter den Voraussetzungen des eben ausgesprochenen Satzes ist V eine ganze rationale Funktion von W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, jedoch findet nicht das Umgekehrte statt. Als Beispiel für das geschilderte Verhältnis kann die lineare homogene Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ für den Rationalitätsbereich aller Konstanten dienen. $y_1 = 1$ ist ein partikuläres Integral von $\frac{dy}{dx} = 0$. V kann man gleich 1 wählen. Die Gleichung (f) lautet $V - 1 = 0$, sie ist als algebraische Gleichung von der 0^{ten} Ordnung. Wählt man $W = x$, so genügt W keiner algebraischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten, V wird gleich $\frac{dW}{dx}$; hingegen kann W nicht durch V und dessen Abgeleiteten rational mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden.

Zum Schluß dieses Paragraphen beschäftigen wir uns noch mit den Integralen der Differentialgleichung $f = 0$, die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen genügen. Ist w irgend ein nicht singuläres Integral von $f = 0$, so existieren nach Satz (I_1) m^2 Konstante, daß:

$$\mathsf{X}_i\left(w;\ \frac{dw}{dx};\ \frac{d^2w}{dx^2};\ \cdots\right) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

wird. Genügt w einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$, so muß die Determinante $|a_{ik}|$ verschwinden. Würden nämlich die angegebenen Gleichungen bestehen und die Determinante $|a_{ik}|$ nicht verschwinden, so würden sich $y_1, y_2, \cdots, y_m$ durch Auflösung der linearen Gleichungen als ganze rationale Funktionen von w und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ergeben. Hierbei würde nach Voraussetzung w einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$ genügen. Dies widerspricht aber Satz (V). In Ergänzung des Satzes (III_1) haben wir daher:

(VII). *Ersetzt man in*

$$y_i = \mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

die Funktion V durch irgend ein nicht singuläres Integral w von $f=0$, das einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügt, so wird

$$\mathsf{X}_i\left(w; \frac{dw}{dx}; \frac{d^2w}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

von der Form $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m$, wobei die Größen a_{ik} Konstanten von verschwindender Determinante bedeuten. Das Ersetzen des Integrals V von (f) *durch w liefert daher eine Substitution verschwindender Determinante.*

Ein nicht singuläres Integral w von $f=0$, das einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügt, hat die Eigenschaft, für V in

$$\mathsf{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

gesetzt, m Integrale von (D) zu liefern, die kein Fundamentalsystem bilden, also in linearer Dependenz stehen, d. h. eine verschwindende Wronskische Determinante haben. Jedes nicht singuläre Integral w von $f=0$, das eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ befriedigt, genügt demnach der Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
\mathsf{X}_1\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right) & \mathsf{X}_2\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right) & \cdots & \mathsf{X}_m\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right) \\
\frac{d\mathsf{X}_1\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx} & \frac{d\mathsf{X}_2\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx} & \cdots & \frac{d\mathsf{X}_m\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx} \\
\frac{d^2\mathsf{X}_1\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^2} & \frac{d^2\mathsf{X}_2\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^2} & \cdots & \frac{d^2\mathsf{X}_m\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^2} \\
\vdots & & & \\
\frac{d^{m-1}\mathsf{X}_1\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}\mathsf{X}_2\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}\mathsf{X}_m\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots\right)}{dx^{m-1}}
\end{vmatrix} = 0.$$

Da w der Differentialgleichung

$$f\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

genügt, so ist

$$f\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots; \frac{d^pw}{dx^p}\right) = 0.$$

Die l-fache Differentiation von f nach x ergibt:

$$f' \frac{d^{p+l}w}{dx^{p+l}} + f_l\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots; \frac{d^{p+l-1}w}{dx^{p+l-1}}\right) = 0;$$

hierbei bedeutet f' die partielle Abgeleitete von

$$f\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots; \frac{d^p w}{dx^p}\right) \text{ nach } \frac{d^p w}{dx^p}$$

und f_l eine ganze rationale Funktion von

$$w, \frac{dw}{dx}; \cdots; \frac{d^{p+l-1}w}{dx^{p+l-1}} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hieraus folgt, daß sich $\frac{d^{p+1}w}{dx^{p+1}}, \frac{d^{p+2}w}{dx^{p+2}}, \cdots$ als rationale Funktionen von $w, \frac{dw}{dx}, \cdots, \frac{d^p w}{dx^p}$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ ausdrücken. Bei dieser Darstellung der höheren als p^{ten} Abgeleiteten von w durch $w, \frac{dw}{dx}, \cdots, \frac{d^p w}{dx^p}$ treten die eben aufgezählten Funktionen im Nenner nur in der Verbindung $(f')^{s_l}$ auf; s_l ist hierbei eine ganze positive Zahl, die von der Höhe $p + l$ der gebildeten Ableitung des w abhängt. Wir ersetzen in der oben abgeleiteten Wronskischen Determinante linker Hand die höheren als p^{ten} Abgeleiteten von w durch w und dessen Abgeleiteten bis zur Ordnung p. Mit den hierbei eingeführten Nennern, die in Potenzen von f' bestehen, können wir, da w ein nicht singuläres Integral von $f = 0$ sein soll, das heißt, die ganze rationale Funktion f' von $w, \frac{dw}{dx}, \cdots, \frac{d^p w}{dx^p}$ nicht verschwindet, fortmultiplizieren. Auf diese Weise finden wir für w eine Gleichung:

$$\varphi\left(w; \frac{dw}{dx}; \cdots; \frac{d^p w}{dx^p}\right) = 0$$

mit Koeffizienten aus Σ, die $w, \frac{dw}{dx}, \cdots, \frac{d^p w}{dx^p}$ ganz und rational enthält. Demnach befriedigt jedes nicht singuläre Integral w von

$$f\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots; \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0,$$

das einer Differentialgleichung niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ genügt, die Differentialgleichung:

$$\varphi\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right) = 0$$

mit Koeffizienten aus Σ. Sollte φ die p^{te} Abgeleitete von V nicht mehr enthalten, so genügen alle nicht singulären Integrale w von $f = 0$, die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ

befriedigen, einer und derselben Differentialgleichung niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, nämlich

$$\varphi\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right) = 0.$$

Enthält $\varphi = 0$ auf der linken Seite noch $\frac{d^pV}{dx^p}$, so fassen wir f und φ als ganze rationale Funktionen von $\frac{d^pV}{dx^p}$ auf. Diese zwei Funktionen haben alsdann keinen gemeinsamen Teiler; denn sonst wäre entweder f ein Teiler von φ oder f wäre in Faktoren mit Koeffizienten aus Σ zerlegbar, die in $\frac{d^pV}{dx^p}$ ganz und rational, in $\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}, \frac{d^{p-2}V}{dx^{p-2}}, \cdots, \frac{dV}{dx}, V$ wenigstens rational sein müßten. Daß f ein Teiler von φ ist, würde bedingen, daß jedes Integral von $f = 0$ auch $\varphi = 0$ befriedigen würde. Die Differentialgleichung $\varphi = 0$ wird aber nur durch die Integrale von $f = 0$ erfüllt, die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ genügen; mithin können diejenigen Integrale von $f = 0$, die keine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$ erfüllen, nicht $\varphi = 0$ befriedigen. Folglich ist die Teilbarkeit von φ durch f widerlegt. Würde f in Faktoren mit Koeffizienten aus Σ, die in $\frac{d^pV}{dx^p}$ ganz und rational, in $\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}, \frac{d^{p-2}V}{dx^{p-2}}, \cdots, \frac{dV}{dx}, V$ wenigstens rational wären, zerlegbar sein, so würde sich auf Grund des auch S. 132 verwandten Satzes im Gegensatz zur Voraussetzung ergeben, daß sich f in zwei Faktoren mit Koeffizienten aus Σ zerlegen läßt, die in bezug auf $V, \frac{dV}{dx}, \cdots, \frac{d^pV}{dx^p}$ ganz und rational sind. Mithin läßt sich, da f und φ keinen gemeinsamen Faktor haben, $\frac{d^pV}{dx^p}$ aus f und φ eliminieren, ohne daß das Eliminationsresultat etwa identisch verschwindet. Also auch wenn $\varphi = 0$ auf der linken Seite noch $\frac{d^pV}{dx^p}$ enthalten sollte, kann man für alle nicht singulären Integrale von $f = 0$, die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$ genügen, eine *einzige* Differentialgleichung von niedrigerer als p^{ter} Ordnung herleiten, welche durch die fraglichen Integrale befriedigt wird. Wir gewinnen daher das Resultat:

Zu der Differentialgleichung

$$f\left(V; \frac{dV}{dx};\ \cdots;\ \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

kann man eine Differentialgleichung niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koef-

fizienten aus Σ konstruieren; sie wird durch alle diejenigen nicht singulären Integrale von $f = 0$ befriedigt, die Differentialgleichungen niedrigerer als p^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ genügen.

§ 5.

Definition der linearen homogenen Substitutionen $\mathfrak{G}$ und der unter ihnen enthaltenen $\mathfrak{G}_1$ von nicht verschwindenden Determinanten.

$y_1, y_2, \cdots, y_m$ seien wie bisher unser beliebig, aber fest gewähltes Fundamentalsystem von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung (D). Wir betrachten die Gesamtheit aller Gleichungen mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereich, die $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten ganz und rational enthalten und für $y_1, y_2, \cdots, y_m$ richtige Relationen sind. Die Gesamtheit aller Gleichungen möge lauten:

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} &\gamma_1\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right) = 0, \\ &\gamma_2\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right) = 0, \\ &\gamma_3\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right) = 0, \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Durch diese Numerierung der Gleichungen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$ soll nicht etwa ausgedrückt sein, daß wir es mit einer im Sinne von Herrn Georg Cantor abzählbaren Menge von Gleichungen zu tun haben.

Jede dieser Gleichungen umfaßt nur Funktionen, die innerhalb des Bereiches S der Ebene bis auf isolierte Punkte regulär sind. Es genügt, daß jede dieser Gleichungen in der Umgebung eines Punktes von S, wo alle Funktionen gleichzeitig regulär analytisch sind, gültig ist; dann gilt sie auch, abgesehen von isolierten Punkten, überall innerhalb S, wenn alle Funktionen gleichzeitig längs eines beliebigen, durch keinen singulären Punkt hindurchführenden Weges innerhalb S analytisch fortgesetzt werden.

Mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die Gesamtheit linearer homogener Substitutionen, die man auf $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten ausüben kann, so daß bei jeder Substitution aus $\mathfrak{G}$ jede Relation des Systems (γ), die richtig war, richtig bleibt. Mit $\mathfrak{G}_1$ werde die Gesamtheit jener Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ bezeichnet, deren Determinanten nicht verschwinden.

Ist also A irgend eine lineare homogene Substitution aus $\mathfrak{G}$, die y_i durch

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ersetzt, so muß, wenn

$$\gamma_k\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right) = 0$$

eine beliebige Relation aus dem System (γ) ist, auch

$$\gamma_k\left(\sum_{s=1}^{s=m} a_{1s} y_s, \sum_{s=1}^{s=m} a_{2s} y_s, \cdots, \sum_{s=1}^{s=m} a_{ms} y_s, \sum_{s=1}^{s=m} a_{1s} y_s', \sum_{s=1}^{s=m} a_{2s} y_s', \cdots\right) = 0$$

eine richtige Relation zwischen den Integralen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten sein. Die soeben hingeschriebene, aus $\gamma_k = 0$ durch Anwendung der linearen homogenen Substitution A hervorgehende Gleichung sei mit $\gamma_k(\;)_A = 0$ bezeichnet. $\gamma_k(\;)_A$ braucht für willkürliche Größen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ durchaus nicht mit γ_k identisch zu sein; dies wäre formale Invarianz. Nur wenn A eine Substitution aus $\mathfrak{G}$ ist und $\gamma_k = 0$ für das bestimmt gewählte Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von (D) eine richtige Gleichung vorstellt, die $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und ihre Abgeleiteten ganz und rational enthält und Koeffizienten aus Σ besitzt, muß auch $\gamma_k(\;)_A$ für dasselbe Fundamentalsystem den Wert Null annehmen. Da das System (γ) alle richtigen Gleichungen, die $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten ganz und rational enthalten und Koeffizienten aus Σ haben, umfassen soll, so tritt auch die Gleichung $\gamma_k(\;)_A = 0$ in dem System (γ) auf und ist etwa eine Gleichung $\gamma_{k_1} = 0$ desselben.

Für die Gesamtheit von Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ gilt folgender Satz:

(VIII). *Sind A und B irgend zwei lineare homogene Substitutionen aus $\mathfrak{G}$, so ist auch ihr Produkt AB in $\mathfrak{G}$ enthalten.*

Ist $\gamma_k = 0$ irgend eine der Relationen aus (γ), so geht sie durch Anwendung der Substitution A, da A der Gesamtheit $\mathfrak{G}$ angehören soll, in die ebenfalls richtige Gleichung $\gamma_k(\;)_A = 0$ über; diese gehört, weil sie richtig ist, ebenfalls dem System (γ) an und sei daher mit $\gamma_{k_1} = 0$ bezeichnet. Da B als Substitution aus $\mathfrak{G}$ auf *alle* Relationen (γ) anwendbar sein muß, so bleibt die Relation $\gamma_{k_1} = 0$ bei Anwendung der Substitution B richtig. Transformiert man $y_1, y_2, \cdots, y_m$ durch B, so möge $\gamma_{k_1} = 0$ in die ebenfalls richtige Gleichung $\gamma_{k_1}(\;)_B = 0$ übergehen. Die Relation $\gamma_{k_1}(\;)_B = 0$ kann aber aus $\gamma_k = 0$ durch Anwendung von AB erhalten werden. Folglich geht jede Gleichung $\gamma_k = 0$, die dem System (γ) angehört, bei der Ausführung der Transformation AB auf $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten in eine ebenfalls richtige Gleichung über. Hieraus folgt, daß AB der Gesamtheit $\mathfrak{G}$ angehört.

(IX). *Sind A und B irgend zwei lineare homogene Substitutionen aus der Gesamtheit $\mathfrak{G}_1$, so gehört auch ihr Produkt AB zu $\mathfrak{G}_1$.*

Gehören A und B der Gesamtheit $\mathfrak{G}_1$ an, so gehören sie a fortiori zu $\mathfrak{G}$, also ihr Produkt nach dem Satz (VIII) ebenfalls zu $\mathfrak{G}$. Da A und B als Substitutionen aus $\mathfrak{G}_1$ nicht verschwindende Determinanten haben, trifft dies auch für das Produkt AB zu. Dies gehört daher, falls A und B der Gesamtheit $\mathfrak{G}_1$ angehören, ebenfalls zu ihr.

§ 6.

Zu jeder Substitution aus $\mathfrak{G}$ gehört ein Integral von $f=0$.

In diesem Paragraphen beweisen wir von den in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen linearen homogenen Substitutionen:

(X). *Jede lineare homogene Substitution A aus $\mathfrak{G}$ führt das Integral:*

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

von (f) *in ein anderes Integral von $f=0$ über. Hat A eine nicht verschwindende Determinante, das heißt, gehört A der Gesamtheit $\mathfrak{G}_1$ an, so genügt dieses Integral ebenso wie V keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als der Differentialgleichung $f=0$. Hat A eine verschwindende Determinante, das heißt, gehört A zu $\mathfrak{G}$, aber nicht zu $\mathfrak{G}_1$, so genügt das fragliche Integral von $f=0$, in das V durch A übergeführt wird, einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$.*

Zum Beweis setzen wir in der Differentialgleichung

$$f\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots; \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

für V seinen Wert

$$r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right),$$

dann erhalten wir:

$$f\left(r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right), \frac{dr}{dx}\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right), \cdots\right) = 0.$$

Die hingeschriebene Gleichung, deren linke Seite abgekürzt mit f_1 bezeichnet sei, ist eine Gleichung mit Koeffizienten aus Σ, die $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten ganz und rational enthält. Ist A eine Substitution aus $\mathfrak{G}$, die y_i in

$$Y_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

überführt, so muß A auf $f_1 = 0$ anwendbar sein; denn die Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ führen jede richtige Gleichung zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ in eine richtige Gleichung über. Mithin ist:

$$f\left(r\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right), \frac{dr}{dx}\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right), \cdots\right) = 0$$

eine richtige Gleichung. Aus der zuletzt hingeschriebenen Gleichung ist zu entnehmen, daß

$$r\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right)$$

ein Integral von $f = 0$ ist.

Um unseren Satz weiter zu beweisen, betrachten wir

$$y_i = \mathrm{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Wir denken uns in den soeben hingeschriebenen m Gleichungen V rechter Hand durch seinen Wert

$$r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

ersetzt. Dann erhalten wir zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten richtige Gleichungen, die diese Funktionen ganz und rational enthalten und nur Koeffizienten aus Σ haben. Auf diese Gleichungen läßt sich daher die Substitution A aus $\mathfrak{G}$ anwenden. Durch Anwendung von A erhält man aus den m Gleichungen:

$$y_i = \mathrm{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

die m neuen richtigen Gleichungen:

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m = \mathrm{X}_i\left(\overline{W}, \frac{d\overline{W}}{dx}, \frac{d^2\overline{W}}{dx^2}, \cdots\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Hierbei ist unter $\overline{W}$ die Funktion

$$r\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right)$$

verstanden, in die

$$V = r\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

durch Anwendung von A übergeht. Man kann also die Substitution A aus $\mathfrak{G}$ durch die Gleichungen:

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m = \mathrm{X}_i\left(\overline{W}, \frac{d\overline{W}}{dx}, \frac{d^2\overline{W}}{dx^2}, \cdots\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

bei denen

$$\overline{W} = r\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right)$$

ein Integral von $f = 0$ darstellt, definieren.

Verschwindet die Determinante von A nicht, d. h. A gehört $\mathfrak{G}_1$ an, so darf auf Grund der Sätze (III_1) und (VII) die Funktion $\overline{W}$ keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügen. Verschwindet hingegen die Determinante von A, d. h. A gehört $\mathfrak{G}$, aber nicht $\mathfrak{G}_1$ an, so muß auf Grund der gleichen Sätze die Funktion $\overline{W}$ einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügen.

§ 7.

Zu jedem nicht singulären Integral von $f=0$ gehört eine Substitution aus $\mathfrak{G}$.

Die Gleichungen:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m = \mathrm{X}_i\left(\overline{W}, \frac{d\overline{W}}{dx}, \frac{d^2\overline{W}}{dx^2}, \cdots\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

des vorigen Paragraphen lehren, daß wir durch Ersetzen von V durch gewisse Integrale $\overline{W}$ der Differentialgleichung $f=0$ alle Substitutionen A aus $\mathfrak{G}$ erhalten. Es fragt sich, ob an Stelle von V nur *gewisse* oder *alle* Integrale von $f=0$ treten können. Wir beweisen:

(XI). *Ersetzt man in*

$$y_i = \mathrm{X}_i\left(V; \frac{dV}{dx}; \frac{d^2V}{dx^2}; \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

die Funktion V durch irgend ein nicht singuläres Integral w von $f=0$, so wird $\mathrm{X}_i\left(w; \frac{dw}{dx}; \frac{d^2w}{dx^2}; \cdots\right)$ von der Form

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

und stellt eine Substitution aus $\mathfrak{G}$ dar. Diese gehört dann und nur dann $\mathfrak{G}_1$ an, wenn die Funktion w keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$ genügt.

Daß man für jedes nicht singuläre Integral w von $f=0$ eine lineare homogene Substitution A:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

erhält, ergibt sich aus Satz (I). Um die Zugehörigkeit von A zu $\mathfrak{G}$ zu zeigen, ist noch nachzuweisen, daß jede Relation

$$\gamma_k\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right) = 0$$

des Systems (γ) durch Anwendung von A in eine richtige Relation übergeht. Wir ersetzen in der angegebenen Relation die Funktionen

y_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ durch $\mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right)$ und erhalten dann eine Gleichung:

$$\gamma_k\left(\mathsf{X}_1\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right),\ \cdots,\ \mathsf{X}_m,\ \frac{d\mathsf{X}_1}{dx},\ \frac{d\mathsf{X}_2}{dx},\ \cdots\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist in V ganz und rational, besitzt nur Koeffizienten aus Σ und hat mit $f = 0$ das Integral V gemeinsam. Wenn w irgend ein nicht singuläres Integral von $f = 0$ bedeutet, so muß nach dem Koenigsbergerschen Satze auch w die zuletzt gewonnene Gleichung erfüllen, d. h. es muß

$$\gamma_k\left(\mathsf{X}_1\left(w;\ \frac{dw}{dx};\ \cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(w;\ \frac{dw}{dx};\ \cdots\right),\ \cdots\right) = 0$$

sein. Ersetzt man in

$$\mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

die Funktion V durch w, so erhält man die Substitution A; diese ist daher auf alle Relationen (γ) anwendbar, ohne ihre Richtigkeit zu zerstören, und gehört folglich $\mathfrak{G}$ an. Nach den Sätzen (III_1) und (VII) hat A dann und nur dann eine nicht verschwindende Determinante, gehört also $\mathfrak{G}_1$ an, wenn die Funktion w keine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$ befriedigt. Hiermit ist Satz (XI) bewiesen.

§ 8.

Bestimmung aller Substitutionen aus $\mathfrak{G}_1$. Die Substitutionen von $\mathfrak{G}_1$ bilden eine Gruppe, die sogenannte Rationalitätsgruppe.

Mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichneten wir die Gesamtheit derjenigen Substitutionen aus $\mathfrak{G}$, deren Determinanten nicht verschwinden. Durch die Sätze (X) und (XI), sowie die Schlußbemerkungen auf Seite 152 haben wir die Substitutionen von $\mathfrak{G}_1$ völlig bestimmt. Unter Beachtung des Satzes (II) ergibt sich:

(XII.) *Man erhält sämtliche Substitutionen aus $\mathfrak{G}_1$ und auch nur diese sowie eine jede nur einmal, wenn man in*

$$y_i = \mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

die Funktion V durch sämtliche Integrale von $f = 0$, die keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) *genügen, ersetzt.*

Nach Satz (IX) ist die Gesamtheit linearer homogener Substitutionen $\mathfrak{G}_1$ in bezug auf die Produktbildung in sich abgeschlossen. Hieraus kann

noch nicht geschlossen werden, daß $\mathfrak{G}_1$ eine Gruppe in üblichem Sinne ist. Beispielsweise bildet die Gesamtheit linearer homogener Substitutionen $\xi_1' = \xi_1$, $\xi_2' = \nu\xi_1 + \xi_2$, wobei ν jeden der Werte $1, 2, \cdots$ annimmt, trotz ihrer Abgeschlossenheit gegenüber der Produktbildung keine Gruppe; denn diese Gesamtheit enthält nicht zu jeder Substitution die reziproke in sich. *Wir beweisen, daß $\mathfrak{G}_1$ neben jeder Substitution A die reziproke enthält.*

A sei diejenige Substitution aus $\mathfrak{G}_1$, die y_i in

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

überführt. Dann gibt es ein Integral W von $f = 0$, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$ genügt und die Substitution A durch die Gleichungen:

$$\mathsf{X}_i\left(W; \frac{dW}{dx}; \frac{d^2W}{dx^2}; \cdots\right) = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

definiert. Da A zu $\mathfrak{G}_1$ gehören soll, verschwindet die Determinante von A nicht; mithin sind die Gleichungen auflösbar, und man findet:

$$y_i = \alpha_{i1} \mathsf{X}_1\left(W; \frac{dW}{dx}; \cdots\right) + \alpha_{i2} \mathsf{X}_2\left(W; \frac{dW}{dx}; \cdots\right) + \cdots + \alpha_{im} \mathsf{X}_m\left(W; \frac{dW}{dx}; \cdots\right)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

Wir betrachten irgend eine Gleichung

$$\gamma_k\left(y_1, y_2, \cdots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}; \cdots\right) = 0$$

des Systems (γ) und führen für die Funktionen y_i und deren Abgeleiteten ihre zuletzt gefundenen Werte als Funktionen von W und dessen Abgeleiteten ein. Auf diese Art gewinnen wir aus $\gamma_k = 0$ eine Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, die mit $f = 0$ das Integral W gemeinsam hat. Da W keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) genügt, so erfüllt nach dem Koenigsbergerschen Satze auch das ursprüngliche Ausgangsintegral V von $f = 0$ die sich aus $\gamma_k = 0$ ergebende Differentialgleichung. Aus

$$\gamma_k\left(\sum_{s=1}^{s=m} \alpha_{1s} \mathsf{X}_s\left(W; \frac{dW}{dx}; \cdots\right), \sum_{s=1}^{s=m} \alpha_{2s} \mathsf{X}_s\left(W; \frac{dW}{dx}; \cdots\right), \cdots\right) = 0$$

folgt nach dem Obigen:

$$\gamma_k\left(\sum_{s=1}^{s=m} \alpha_{1s} \mathsf{X}_s\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right), \sum_{s=1}^{s=m} \alpha_{2s} \mathsf{X}_s\left(V; \frac{dV}{dx}; \cdots\right), \cdots\right) = 0.$$

Setzt man für $\mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\cdots\right)$ seinen Wert y_i, so erhält man:

$$\gamma_k\left(\sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{1s}y_s,\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{2s}y_s,\ \cdots,\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{ms}y_s,\ \cdots\right)=0.$$

Mithin sehen wir, daß jede richtige Relation:

$$\gamma_k\left(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx},\ \cdots\right)=0$$

des Systems (γ), wenn man in ihr y_i $(i=1,2,\cdots,m)$ durch die zu A reziproke Substitution A^{-1}:

$$\sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{is}y_s \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

ersetzt, in die ebenfalls richtige Relation:

$$\gamma_k\left(\sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{1s}y_s,\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{2s}y_s,\ \cdots,\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{ms}y_s,\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{1s}y_s',\ \sum_{s=1}^{s=m}\alpha_{2s}y_s',\ \cdots\right)=0$$

übergeht. Da $\mathfrak{G}_1$ die Gesamtheit aller linearen homogenen Substitutionen von nicht verschwindenden Determinanten enthält, die alle richtigen Relationen richtig lassen, so enthält $\mathfrak{G}_1$ neben jeder Substitution A auch die zu A reziproke A^{-1}. Hierdurch ist jetzt nachgewiesen, daß die Gesamtheit linearer homogener Substitutionen $\mathfrak{G}_1$ eine Gruppe bildet.

$\mathfrak{G}_1$ *heißt die Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differentialgleichung* (D).

§ 9.

Die mit $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gesamtheiten linearer homogener Substitutionen.

Die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen war von der Wahl des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von (D) abhängig. $z_1, z_2, \cdots, z_m$ sei ein anderes, ebenfalls festgewähltes Fundamentalsystem von Integralen von (D). Dann gibt es m^2 Konstante l_{ik}, daß:

(1) $$z_i = l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \cdots + l_{im}y_m \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

wird und die Determinante $|l_{ik}|$ nicht verschwindet. Betrachten wir die Gesamtheit aller Gleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die $z_1, z_2, \cdots, z_m$ und deren Ableitungen ganz und rational enthalten und für $z_1, z_2, \cdots, z_m$ richtige Relationen sind. Die Gesamtheit aller Gleichungen möge lauten:

$$(\delta)\qquad \begin{aligned}&\delta_1\left(z_1, z_2, \cdots, z_m, \frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}, \cdots\right) = 0,\\ &\delta_2\left(z_1, z_2, \cdots, z_m, \frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}, \cdots\right) = 0,\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (1) dieses Paragraphen geht das System (δ) in die ebenfalls richtigen Gleichungen:

$$(\delta')\qquad \begin{aligned}&\delta_1\left(\sum_{s=1}^{s=m} l_{1s}y_s, \sum_{s=1}^{s=m} l_{2s}y_s, \cdots, \sum_{s=1}^{s=m} l_{ms}y_s, \sum_{s=1}^{s=m} l_{1s}\frac{dy_s}{dx}, \sum_{s=1}^{s=m} l_{2s}\frac{dy_s}{dx}, \cdots\right) = 0,\\ &\delta_2\left(\sum_{s=1}^{s=m} l_{1s}y_s, \sum_{s=1}^{s=m} l_{2s}y_s, \cdots, \sum_{s=1}^{s=m} l_{ms}y_s, \sum_{s=1}^{s=m} l_{1s}\frac{dy_s}{dx}, \sum_{s=1}^{s=m} l_{2s}\frac{dy_s}{dx}, \cdots\right) = 0,\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

über. Diese Gleichungen sind ganz und rational in $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koëffizienten aus Σ. Da das System (γ) des § 5 alle derartigen richtigen Gleichungen enthält, müssen die Gleichungen (δ') in (γ) enthalten sein und jede lineare homogene Substitution aus $\mathfrak{G}$ zulassen. Sei

$$A:\qquad a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

eine Substitution aus $\mathfrak{G}$, so muß sie das System (δ') in ein ebenfalls richtiges System überführen, d. h. die Gleichungen:

$$(\delta'')\qquad \begin{aligned}&\delta_1\left(\sum_{s,t=1}^{m} l_{1s}a_{st}y_t, \sum_{s,t=1}^{m} l_{2s}a_{st}y_t, \cdots, \sum_{s,t=1}^{m} l_{ms}a_{st}y_t, \cdots\right) = 0,\\ &\delta_2\left(\sum_{s,t=1}^{m} l_{1s}a_{st}y_t, \sum_{s,t=1}^{m} l_{2s}a_{st}y_t, \cdots, \sum_{s,t=1}^{m} l_{ms}a_{st}y_t, \cdots\right) = 0,\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

müssen richtige Gleichungen sein. Da die Determinante $|l_{ik}| \neq 0$ ist, sind die Gleichungen (1) auflösbar. Man findet:

$$(1')\qquad y_i = \lambda_{i1}z_1 + \lambda_{i2}z_2 + \cdots + \lambda_{im}z_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Führt man diese Werte in das System (δ'') ein, so hat man

$$\begin{aligned}&\delta_1\left(\sum_{s,t,u=1}^{m} l_{1s}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \sum_{s,t,u=1}^{m} l_{2s}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \cdots, \sum_{s,t,u=1}^{m} l_{ms}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \cdots\right) = 0,\\ &\delta_2\left(\sum_{s,t,u=1}^{m} l_{1s}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \sum_{s,t,u=1}^{m} l_{2s}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \cdots, \sum_{s,t,u=1}^{m} l_{ms}a_{st}\lambda_{tu}z_u, \cdots\right) = 0,\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

Sei die Matrix $\|l_{ik}\|$ mit L bezeichnet, so bleibt, wie aus den letzten Gleichungen hervorgeht, das System (δ) bei allen linearen homogenen Substitutionen $L\mathfrak{G}L^{-1}$ richtig, wobei $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit aller Matrizes aus $\mathfrak{G}$ durchläuft und L^{-1} die zu L reziproke Matrix bedeutet. Daß das System (δ) aber auch nur ausschließlich Substitutionen der Form $L\mathfrak{G}L^{-1}$ zuläßt, sieht man folgendermaßen ein: Sei $\bar{A}$ irgend eine Substitution, die alle Gleichungen des System (δ) richtig läßt. Wenden wir die Gleichungen (1') auf das System (γ) des § 5 an, so müssen die sich ergebenden Gleichungen (γ'), die ganz und rational in $z_1, z_2, \cdots, z_m$ und deren Abgeleiteten sind und nur Koeffizienten aus Σ haben, in dem System (δ) enthalten sein, das alle derartigen Gleichungen umfaßt. Dann ergibt sich, daß das System (γ) die Substitution $L^{-1}\bar{A}L$ zuläßt. Da das System (γ) nur Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ gestattet, muß $L^{-1}\bar{A}L$ in der Gesamtheit $\mathfrak{G}$ enthalten sein, d. h. $\bar{A}$ gehört der Gesamtheit $L\mathfrak{G}L^{-1}$ an.

Wählt man statt $y_1, y_2, \cdots, y_m$ irgend ein anderes Fundamentalsystem $z_1, z_2, \cdots, z_m$ von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung (D), *das mit $y_1, y_2, \cdots, y_m$ durch die Gleichungen:*

$$z_i = l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \cdots + l_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

zusammenhängt, so tritt für die im § 5 *definierte Gesamtheit $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen die zu ihr ähnliche $L\mathfrak{G}L^{-1}$, wobei L die Matrix $\|l_{ik}\|$ bedeutet.*

Für $\mathfrak{G}$ kann man auch stets jede zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gesamtheit $L\mathfrak{G}L^{-1}$ treten lassen, wobei L eine beliebige Matrix $\|l_{ik}\|$ von nicht verschwindender Determinante bedeutet; man hat statt $y_1, y_2, \cdots, y_m$ nur das durch

$$z_i = l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \cdots + l_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

definierte Fundamentalsystem von Integralen von (D) *zu wählen.*

Jede mit der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ähnliche Gruppe kann folglich als Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differentialgleichung (D) *angesehen werden.*

§ 10.

Die Differentialgleichung (f) ein Analogon zur Galoisschen oder Normalgleichung der Algebra.

w sei irgend ein nicht singuläres Integral von $f = 0$; dann wird nach Satz XI:

$$\chi_i\left(w; \frac{dw}{dx}; \frac{d^2w}{dx^2}; \cdots\right)$$

von der Form

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

und stellt eine Substitution A aus $\mathfrak{G}$ dar. Nach den auf S. 152 gefundenen

Ergebnissen läßt sich diese Substitution A aus $\mathfrak{G}$ auch auf die m Gleichungen:

$$y_i = \mathsf{X}_i\left(V;\ \frac{dV}{dx};\ \frac{d^2V}{dx^2};\ \cdots\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

anwenden, und man kann A durch die Gleichungen:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m = \mathsf{X}_i\left(\overline{W};\ \frac{d\overline{W}}{dx};\ \frac{d^2\overline{W}}{dx^2};\cdots\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

definieren, wobei:

$$\overline{W} = r\left(Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_m,\ \frac{dY_1}{dx},\ \frac{dY_2}{dx},\cdots\right)$$

ein Integral von $f=0$ darstellt. Y_i ist hierbei zur Abkürzung für

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

gesetzt. Ist die Determinante $|a_{ik}|$ von Null verschieden, so ist $f=0$ die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch $\overline{W}$ befriedigt wird; ist die Determinante $|a_{ik}|$ gleich Null, so genügt $\overline{W}$ einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f=0$.

Da

$$Y_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m = \mathsf{X}_i\left(w;\ \frac{dw}{dx};\ \frac{d^2w}{dx^2};\ \cdots\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

ist, so folgt aus:

$$\overline{W}=r\left(Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_m,\ \frac{dY_1}{dx},\ \frac{dY_2}{dx},\cdots\right),$$

daß

$$\overline{W}=r\left(\mathsf{X}_1\left(w;\frac{dw}{dx};\cdots\right),\ \mathsf{X}_2\left(w;\frac{dw}{dx};\cdots\right),\cdots,\mathsf{X}_m\left(w;\frac{dw}{dx};\cdots\right),\ \frac{d\mathsf{X}_1}{dx},\ \frac{d\mathsf{X}_2}{dx},\cdots\right)$$

wird. Wie auf Grund der ersten Gleichung auf Seite 141 folgt, ist die rechte Seite der zuletzt hingeschriebenen Relation, da w ein nicht singuläres Integral von $f=0$ ist, selbst gleich w; mithin sind w und $\overline{W}$ identisch. Wir haben daher das Resultat:

(XIII). *Jedes nicht singuläre Integral w der Differentialgleichung $f=0$ ist eine ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, es ist von der Form:*

$$r\left(Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_m,\ \frac{dY_1}{dx},\ \frac{dY_2}{dx},\cdots\right),$$

wobei Y_i zur Abkürzung für

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

gesetzt ist und die a_{ik} Konstanten bedeuten. Nur falls die Determinante $|a_{ik}|$ von Null verschieden ist, genügt das Integral

$$r\left(Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_m,\ \frac{dY_1}{dx},\ \frac{dY_2}{dx},\cdots\right)$$

keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als $f = 0$.

Nach Satz (IV) sind die Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ganze rationale Funktionen jedes Integrals von $f = 0$, das keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als (f) genügt. In

$$r\left(Y_1, Y_1, \cdots, X_m, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots\right)$$

gehören die a_{ik} als Konstanten und die Koeffizienten von r nach § 2 dem Rationalitätsbereiche Σ an. Infolgedessen ergibt sich:

(XIV). *Die Differentialgleichung $f = 0$ hat die Eigenschaft, daß sich alle ihre nicht singulären Integrale als ganze rationale Funktionen eines jeden beliebigen ihrer Integrale W und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ausdrücken lassen, vorausgesetzt, daß W keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ als der Differentialgleichung $f = 0$ genügt.*

Die Differentialgleichung $f = 0$ hat also ähnliche Eigenschaften wie sie in der Theorie der algebraischen Gleichungen einer sogenannten Galoisschen oder Normalgleichung zukommen, bei der alle Lösungen durch jede beliebige rational ausdrückbar sind.

Freiburg i. Br., März 1906.

Berichtigung

zu der Arbeit von E. Jacobsthal: Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungstypen, Math. Ann. Bd. 64, S. 475—488.

Auf Seite 481 finden sich folgende Druckfehler:

Formel (16):	lies	$\bar{a}(e-1)$	statt	$(e\bar{a}-1)$
Anmerkung **), Z. 2:	„	μ_t	„	μ
„ , „ 2:	„	ω^{μ_t}	„	ω^{μ}
„ , „ 3:	„	μ_t	„	μ

Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden.

Von

O. Hölder in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Wenn man die projektive Geometrie im Sinne v. Staudts ohne die Kongruenzaxiome*) aufbaut, so erfordert die Einführung der Zahlen, die den Punkten der Geraden zugeordnet werden, gewisse Umstände. Verfügt man bereits über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie**)

---

*) Dabei sind wesentlich auch diejenigen Kongruenzaxiome gemeint, die in der gewöhnlichen Geometrie von den Strecken einer Geraden gelten (m. vergl. z. B. Hilbert, Grundlagen der Geometrie 1899, S. 10f.), und die man auch als Axiome der Längengleichheit bezeichnen könnte.

**) Der Fundamentalsatz kann bekanntlich mit Benutzung des Dedekindschen

und über die Involution, so kann man die „Würfe" und für sie die Beziehungen des Größerseins und Kleinerseins und die Addition definieren*) und dann zu den Zahlen gelangen.**) Da aber die Definition der Würfe in keiner der bis jetzt gegebenen Darstellungen sehr einfach ist, hat man neuerdings vielfach Konstruktionen bevorzugt, die sich unmittelbar aus Bestimmungen von vierten harmonischen Punkten zusammensetzen und so, nach Festsetzung von drei Fundamentalpunkten, die Stellen ergeben, denen

Stetigkeitsaxioms ohne die Kongruenzaxiome in der Art von Zeuthen und Lüroth (vergl. Klein, Mathematische Annalen Bd. 7, S. 531) oder in der Art von Thomä (Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet, 1873, S. 12; m. vergl. auch Reye, Die Geometrie der Lage, 2. Aufl. 1882, 1. Abt. S. 45) begründet werden. Der Thomäsche Beweis macht zwar ursprünglich von der Vorstellung der Bewegung Gebrauch, kann aber von dieser befreit werden, wozu Enriques (R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti, ser. II, vol. 27, 1894, p. 566 und p. 562, 563) zu vergleichen ist, der einen von der Bewegung unabhängigen, auf das Stetigkeitsaxiom gegründeten, auf demselben Gedanken wie der Thomäsche beruhenden Beweis gegeben hat. Man vergl. auch Pieri, Memorie della R. Acc. delle scienze di Torino, ser. II, tomo 48, p. 1ff. und Vahlen, Abstrakte Geometrie 1905, S. 151 und 160.

Bei Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, S. 123f. findet sich ein Beweis für eine engere Form des Fundamentalsatzes, wobei im Grunde nur die projektiv gefaßten (s. hier S. 168 Anm.) Axiome der Verknüpfung und Anordnung des Raumes und der „Satz vom Fluchtpunkt" (s. § 13 dieser Arbeit) vorausgesetzt werden. Dies entspricht dem Hilbertschen Resultat (Grundlagen der Geometrie S. 71), wonach aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung der gewöhnlichen Geometrie, dem Parallelenaxiom (s. hier S. 168 Anm.) und dem archimedischen Axiom der Satz von Pascal (für zwei Gerade) sich folgern läßt. Das archimedische Axiom ist auch bei Hilbert an dieser Stelle etwas anders als sonst, nämlich ohne Beziehung auf Kongruenzbegriffe zu verstehen.

*) Vergl. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1. Heft, 1856, S. 15, 2. Heft 1857, S. 166, H. Pfaff, Neuere Geometrie 1867 und R. Sturm, Mathematische Annalen Bd. 9, S. 333. Es sind auch die Abhandlungen von Lüroth, Göttinger Nachrichten 1873, S. 767 und Mathematische Annalen Bd. 8, S. 145 zu vergleichen, deren zweite allerdings der Begründung der imaginären Würfe gilt. Eine wesentlich andere, aber auch nicht besonders einfache Begründung der v. Staudtschen Würfe hat Vahlen gegeben (a. a. O. S. 110ff.); sie ist auch nicht vollständig.

**) Diejenigen Entwicklungen, die zur Einführung der Zahlen dann immer noch notwendig sind, finden sich in meiner Arbeit: „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß" in den Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1901, S. 1ff. ausführlich dargestellt. Man vergl. dazu: Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik 1885, 1. Teil, S. 69—96 und insbesondere S. 121—124, welche letztere Stelle von mir bei Abfassung der erwähnten Arbeit nicht beachtet worden ist, ferner Hill, Transactions of the Cambridge Philosophical Society vol. XVI (1898), p. 227ff., Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1. Bd. (1898), S. 4—16, Huntington, Transactions of the American Mathematical Society vol. 3, p. 264ff., Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, II. Abteilung 1902, S. 99—135 und insbesondere S. 172—177.

die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ usw., überhaupt die rationalen Zahlen zukommen. Nachdem die „rationalen Punkte" bestimmt sind, geht man dann zu den anderen Punkten über, denen irrationale Zahlen entsprechen.

Der Übergang zu den nichtrationalen Punkten pflegt jedoch meist nicht so durchgeführt zu werden, daß die Gültigkeit der Relationen für diese Punkte wirklich bewiesen wäre.*) Um die Erfordernisse einer strengen Durchführung solcher Betrachtungen klar zu machen, denke man sich einmal vier harmonische Punkte**) A, B, C, D, denen die sämtlich oder teilweise irrationalen Zahlen a, b, c, d entsprechen sollen. Es handle sich darum, zu beweisen, daß die Relation

1) $$\frac{a-b}{c-b} : \frac{a-d}{c-d} = -1$$

besteht, wobei bereits bekannt sein möge, daß für vier *rationale* harmonische Punkte die entsprechende Relation richtig ist. In diesem Fall wird in der Regel nur darauf hingewiesen, daß man sich einem nichtrationalen Punkt A' durch rationale Punkte beliebig „annähern" kann oder besser: daß in jedem Intervall, von dem A ein Endpunkt ist, rationale Punkte liegen, was sich auf Grund der eingeführten Axiome, zu denen meist auch das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom gehört, zeigen läßt. Um aber den vorhin erwähnten Hinweis zu einem beweiskräftigen Schluß zu machen, müßte man zeigen, daß zu jenen gegebenen Punkten A, B, C, D vier *gleichfalls*

*) F. Enriques (Vorlesungen über projektive Geometrie, deutsche Ausgabe von Fleischer, 1903, S. 338ff.) hat ein besonderes Verfahren, die Zahlen einzuführen, angegeben. Er geht davon aus, daß eine Mannigfaltigkeit, deren Elemente durch Quadrupel von Verhältniszahlen, durch homogene lineare Relationen und Paare solcher Relationen vorgestellt sind, geeignet aufgefaßt, die Axiome erfüllt, die von den Punkten, Ebenen und Geraden des Raumes in der projektiven Geometrie gelten, und daß andererseits auch irgend zwei diesen Axiomen genügende Systeme von Elementen so ein-eindeutig aufeinander bezogen werden können, daß die Bedingungen der Projektivität bestehen. Daß eine solche Beziehung hergestellt werden kann, beruht auf dem Isomorphismus einer kontinuierlichen Gruppe von Projektivitäten innerhalb des einen Systems mit einer ebensolchen innerhalb des anderen Systems vorhandenen Gruppe (S. 345). Die Betrachtung ist nicht vollständig ausgeführt. Auch die verwendeten Potenzen von Projektivitäten wären für gebrochene (S. 339) und irrationale Exponenten streng genommen noch etwas genauer zu begründen, was aber mit Hilfe der allgemeinen Untersuchungen über additive Zusammensetzungen, bei denen die Postulate der meßbaren Größen gelten (man vergl. meine vorhin zitierte Arbeit), unschwer zu machen sein dürfte. Das Verfahren von Enriques ist nicht anwendbar für die vorliegende Arbeit, die nur in der Geraden operieren will, wobei die Herstellung einer Projektivität überhaupt nur mit Hilfe der Zahlen möglich ist.

**) Ich führe — im Gegensatz zu der Mehrzahl der neueren Autoren — vier harmonische Punkte in einer solchen Ordnung auf, daß der erste mit dem dritten, und der zweite mit dem vierten konjugiert ist.

harmonische Punkte A', B', C', D' mit rationalen Zahlen a', b', c', d' so gefunden werden können, daß zugleich die vier Zahldifferenzen $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$, $d'-d$ absolut unter einer irgendwie vorgeschriebenen Zahlgrenze liegen. Wenn dies für jede Zahlgrenze gezeigt werden kann, so läßt sich aus dem Bestehen der Relation 1) für die Zahlen a', b', c', d' auf das Bestehen der Relation 1) für a, b, c, d schließen. Der nach dem eben Gesagten erforderliche Beweis läßt sich mit Hilfe der im folgenden gegebenen Postulate, wobei insbesondere IV und V benutzt werden, ohne besondere Schwierigkeit führen; immerhin sind noch einige Überlegungen dazu notwendig. Subtiler ist der Beweis für die Relation, welche die Zahl x eines Punktes P mit derjenigen Zahl verbindet, die demselben Punkt P für drei neue Fundamentalpunkte zukommt, wenn nicht nur x irrational sein kann, sondern auch dasselbe von den Zahlen gilt, die den neuen Fundamentalpunkten in Beziehung auf die alten zukommen.

Dadurch, daß der Grenzübergang von den rationalen zu den irrationalen Punkten vollständig durchgeführt wird, werden zugleich gewisse häufig wiederkehrende Einwürfe widerlegt, die sich gegen alle derartigen Grenzbetrachtungen und auch gegen den auf die Stetigkeit gegründeten Beweis des Fundamentalsatzes richten, indem behauptet wird, daß doch in versteckter Weise von den Kongruenzaxiomen oder, wie es meist ausgedrückt wird, von dem im gewöhnlichen Sinne des Wortes genommenen „Maß“ Gebrauch gemacht worden sei. Es hat übrigens Klein bereits vor langer Zeit auf den wesentlichen Punkt hingewiesen*), daß die Grenzbetrachtungen in der projektiven Geometrie so behandelt werden können, daß sie — modern gesprochen — keine Beziehung auf die Kongruenzaxiome enthalten, sondern sich auf Anordnungstatsachen gründen.**)

In der Behandlung der rationalen Punkte finden sich bei vielen Autoren wesentliche Lücken; die meisten werden am geeigneten Ort besprochen werden. Hier sei nur hervorgehoben, daß die Darstellungen von Pasch***) und von de Paolis†) in dieser Hinsicht allen Anforderungen der Strenge genügen. Dabei betrachte ich es allerdings als unwesentlich,

---

*) Mathematische Annalen Bd. 7, S. 534: „Bei der Feststellung des Grenzbegriffs kommen eben nur solche Segmente in Vergleich, die in dieser Relation stehen, daß das eine ein Stück des anderen ist.“

**) Speziell gilt auch vom Dedekindschen Stetigkeitsaxiom (man vergl. § 12 der vorliegenden Arbeit), daß es nur Anordnungsbegriffe voraussetzt, während der Veronesesche Stetigkeitsbegriff (Atti della R. Acc. dei Lincei, ser. 4, mem. d. cl. d. sc. fis. mat. e nat. vol. VI, 1889, p. 612) die Streckenvergleichung, also im Grund Kongruenzaxiome voraussetzt.

***) Vorlesungen über Neuere Geometrie 1882, S. 164 ff.

†) Atti della R. Accademia dei Lincei 1880—81, ser. 3, mem. d. cl. d. sc. fis. mat. e nat. vol. IX, p. 489 ff.

daß Pasch, vermöge seiner Auffassung vom Verhältnis der Geometrie zur Erfahrung, sich dahin erklärt hat, daß es vorzuziehen sei, den benutzten Satz vom Fluchtpunkt*) aus Kongruenzaxiomen herzuleiten; es hat ja Pasch selbst noch eine andere Herleitung aus einem dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom gleichwertigen Postulat angegeben**), bei der keine Kongruenzaxiome benutzt werden. Bei der de Paolisschen Behandlung der rationalen Punkte werden sowohl der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie als die Sätze von der Involution benutzt.***)

*) Damit ist der Satz in § 13 dieser Arbeit gemeint, der dem archimedischen Axiom der gewöhnlichen Geometrie entspricht; vergl. Balser, Mathematische Annalen Bd. 55, S. 296 und Schur ebendaselbst Bd. 51, S. 402.

**) Vergl. Pasch, a. a. O. S. 125.

***) Der Fundamentalsatz wird im Anfang der Arbeit entwickelt; es sind jedoch diese Entwicklungen verbesserungsbedürftig. Ich will nicht hervorheben, daß der Begriff von sich deckenden Elementepaaren (Strecken) eingeführt wird (a. a. O. p. 489); dies ist, da de Paolis nachher nicht mehr darauf zurückkommt, nur scheinbar. Daß aber, nachdem eine Zuordnung von drei Elementen P, Q, R zu drei Elementen P', Q', R' vorgenommen worden ist, eine *ein-eindeutige* Beziehung zweier Gebilde entsteht, ist bei der Art, wie diese Beziehung hergestellt wird, nicht hinreichend bewiesen. Es wird nämlich jedes Element E des ersten Gebildes aus P, Q, R durch Bestimmung von vierten harmonischen Punkten entweder durch eine endliche Zahl von Schritten oder durch einen Grenzprozeß hergeleitet; das entsprechende Element E' wird dann durch Übertragung des Vorganges auf das andere Gebilde F' gewonnen. Hinsichtlich eines Elements E, das durch eine endliche Zahl von Schritten entsteht, und seines entsprechenden wird (a. a. O. p. 493) die Bemerkung gemacht: „Tutte le leggi equivalenti che costruiscono E applicate al sistema armonico di F' costruiscono E'." Dies kann auch wirklich eingesehen werden, vorausgesetzt, daß man bedenkt, daß z. B. zwei Punktreihen durch einmaliges oder mehrmaliges Projizieren so aufeinander bezogen werden können, daß drei beliebigen Punkten P, Q, R der einen drei beliebige Punkte P', Q', R' der anderen entsprechen. Sollte aber, wie es fast den Anschein hat, de Paolis an dieser Stelle die Tatsachen der Ebene nicht benutzen, sondern nur in der Geraden operieren wollen, so müßten zur Begründung der erwähnten Bemerkung gewisse Voraussetzungen über die harmonischen Punkte gemacht werden (z. B. die Postulate IV, V, VI in § 6 der vorliegenden Arbeit, man vergl. auch § 25 bis 32, S. 237 und S. 249). Hinsichtlich eines Elements E_1, das aus P, Q, R nur durch einen Grenzprozeß abgeleitet werden kann, wird nun angenommen (p. 493, Nr. 12)), daß es auf zwei Arten durch einen Grenzprozeß dargestellt worden sei, und daß sich so das eine Mal E_1', das andere Mal E_1'' als entsprechendes Element des zweiten Gebildes F' ergeben habe. Daß E_1' und E_1'' nicht verschieden sein können, wird dann folgendermaßen dargetan. Es ließen sich, wenn sie verschieden wären, drei Elemente A', B', C' von F' so annehmen, daß A', B', E_1'', C', E_1' in der Ordnung, in der sie eben aufgeführt worden sind, liegen. Nun wird aus den Betrachtungen von Darboux (vergl. § 8 der vorliegenden Arbeit) geschlossen, daß die den Elementen A', B', C', E_1' entsprechenden A, B, C, E_1 in der eben genannten Ordnung, und die den Elementen A', B', E_1'', C' entsprechenden A, B, E_1, C in eben dieser Ordnung liegen müßten. Da man nicht zugleich die Ordnung A, B, C, E_1 und A, B, E_1, C haben kann, ist jetzt ein Widerspruch ein-

Außer der vollständigeren Ausführung der Beweise beabsichtige ich in dieser Arbeit noch die *Loslösung der projektiven Geometrie der Geraden von der Ebene.* Eine solche Loslösung läßt die Eigenart der Fragen, um die es sich bei der Einführung der Zahlen handelt, besonders deutlich hervortreten. Dabei ist es aber nun notwendig, daß außer den für die projektive Gerade gültigen Axiomen der Anordnung und der in einem Teil der Untersuchung erforderlichen Tatsache der Dichtigkeit, beziehungsweise der Stetigkeit, gewisse die harmonischen Punkte betreffende Tatsachen vorausgesetzt werden, die man bei einem anderen Ausgangspunkt der Untersuchung aus den Tatsachen der Ebene, beziehungsweise des Raumes beweist. Ein Teil dieser Tatsachen wird auch sonst in der Regel benutzt*), wenn auf der bloßen Geraden projektiv operiert wird. Hervorzuheben ist die hier zugrunde gelegte Tatsache VI, die man auch so ausdrücken könnte, daß vier harmonische Punkte A, B, C, D nach zwei Punkten M und N „harmonisch gespiegelt" wieder vier harmonische Punkte ergeben. Das ist in gewissem Sinne ein Schließungssatz**). Indem man nämlich von fünf beliebigen Punkten A, B, C, M, N ausgeht, wird bestimmt, daß man zu M, A, N den vierten harmonischen Punkt A', zu M, B, N den vierten harmonischen Punkt B', zu M, C, N den vierten harmonischen Punkt C', ferner zu A', B', C' den vierten harmonischen Punkt D', zu M, D', N den vierten harmonischen Punkt D, schließlich zu D, C, B auch noch den vierten harmonischen Punkt suchen soll, wobei dann ausgesagt wird, daß der zuletzt erhaltene vierte harmonische Punkt wieder mit A zusammenfallen muß. Dieser Schließungssatz spielt in der vorliegenden Arbeit die Rolle eines Postulats. Die Tatsachen I bis VI, die hier vorausgesetzt werden, einschließlich des Schließungssatzes, lassen sich, was hier nicht ausgeführt werden soll, aus den (projektiv gefaßten) Axiomen der Verknüpfung und Anordnung des Raumes oder aus den

getreten. Eine genauere Überlegung zeigt aber, daß die Art, wie die Darbouxsche Betrachtung hier angewendet wird, nicht ausschließt, daß C mit E_1 zusammenfallen könnte, abgesehen von Anderem, was sich noch einwenden ließe, so daß der Beweis hinfällig ist. De Paolis hätte das Zeuthen-Lürothsche Resultat, d. h. die Tatsache der Dichtigkeit (§ 14 der vorliegenden Arbeit), das er selbst p. 492 in etwas anderer Weise bewiesen hat, auch an dieser Stelle beiziehen müssen.

Hat man den Fundamentalsatz bewiesen, so ist zur Behandlung der Involution noch die Tatsache nötig, daß $ABA'B' \barwedge A'B'AB$, was ohne wirkliches Projizieren jedenfalls nicht auf einfache Weise gezeigt werden kann (vergl. außerdem S. 190 Anm.).

*) Man vergl. die Postulate III, IV und V des Textes.

**) Auf die „harmonischen Schließungssätze" der Geraden hat Vahlen (Abstrakte Geometrie, 1905, S. 105) besonders aufmerksam gemacht. Die Unabhängigkeit des oben eingeführten Schließungssatzes von den anderen hier eingeführten Postulaten erscheint zwar als plausibel, dürfte aber doch nicht ohne Umständlichkeit ganz strenge zu beweisen sein.

Axiomen der Verknüpfung und Anordnung der Ebene und dem Desarguesschen Satz unschwer herleiten.*) Es ergibt sich dies auch in besonders einfacher Weise aus einem Aufbau der projektiven Raumgeometrie, den ich bei einer anderen Gelegenheit zu geben beabsichtige.

Es liegt im Wesen einer Untersuchung wie die hier vorliegende, daß die Beweisführung eine gewissermaßen rein logische sein, und *der ganze Anschauungsinhalt der Theorie in die Postulate verlegt werden muß.* Deshalb war es notwendig, nicht nur die Axiome der Anordnung zu formulieren, sondern auch alle Tatsachen der Anordnung, die gebraucht werden, wirklich aus den Axiomen abzuleiten.**) Nach Erledigung der Anordnungstatsachen und anderer vorbereitender Untersuchungen, die den ersten Abschnitt der Arbeit füllen, wird im zweiten eine Darstellung gegeben, die einen ausgiebigen Gebrauch vom (Dedekindschen) Stetigkeitsaxiom macht. Nachher wird im dritten Abschnitt eine andere, gewissermaßen mehr arithmetische Behandlung der projektiven Geraden ausgeführt, in der, neueren Tendenzen entsprechend, alles das, was ohne Stetigkeits- und Dichtigkeitsaxiom***) begründet werden kann, ohne diese Voraussetzungen abgehandelt, und dann erst nachher (§ 33) das Dichtigkeits- und ganz

---

*) Hinsichtlich der Ausdrucksweise vergleiche man Hilbert, Grundlagen der Geometrie § 1—3 und § 22. Die Axiome der Verknüpfung und Anordnung können in einer der projektiven Geometrie besonders angepaßten Weise formuliert werden, indem man sie so faßt, wie sie für die geometrischen Elemente einschließlich der sogenannten unendlich fernen Elemente gültig sind. Es müssen dann z. B. an Stelle des Begriffs des „Zwischen" die Begriffe des „Sichtrennens" und „Sichnichttrennens" von Punktepaaren oder andere ähnliche Beziehungen treten (vergl. § 1 und § 5 des Textes), und es ist dann auch der Satz der perspektivischen Dreiecke von Desargues wieder allgemeiner zu formulieren, so daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke auf *irgend* einer Geraden vorausgesetzt werden. Will man die Axiome der Verknüpfung und Anordnung nicht in der erwähnten Weise einführen, so muß man zu den gewöhnlichen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung noch das Parallelenaxiom in einer von jeder Beziehung zu den Kongruenzaxiomen freien Form hinzufügen, wie sie auch von Hilbert gewählt worden ist: *Durch einen Punkt kann in einer diesen Punkt enthaltenden Ebene eine und nur eine Gerade gezogen werden, die eine gegebene, nicht durch den Punkt gehende Gerade der Ebene nicht schneidet.* Die „unendlich fernen Elemente" lassen sich dann begründen. Die oben angedeuteten projektiven Axiome der Verknüpfung und Anordnung bestehen von selbst in der elliptischen Geometrie (hinsichtlich ihres Begriffs vergl. man F. Klein, Math. Annalen Bd. 37, S. 554 f.) und nach der Adjunktion der idealen Elemente auch in der hyperbolischen Geometrie (Klein, Math. Annalen Bd. 4, S. 623 und Bd. 6, S. 131 ff., Schur, Math. Annalen Bd. 39, S. 113).

**) Es hat Vahlen neuerdings darauf hingewiesen, daß bereits Gauß (Werke, Bd. VIII, S. 222) die klare Formulierung der Anordnungstatsachen für notwendig erachtet hat.

***) Damit möchte ich eine bekannte Tatsache bezeichnen, vergl. § 14.

zuletzt das Stetigkeitsaxiom eingeführt wird. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie wird erst am Schluß in einem vierten Abschnitt behandelt.

Den Beweis dafür, daß das Dichtigkeitsaxiom aus dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom unter Mitbenutzung der anderen bekannten Postulate hergeleitet werden kann, der von Zeuthen und Lüroth herrührt, habe ich mir im ersten Abschnitt erlaubt in einer neuen Modifikation wiederzugeben, die mir erheblich vereinfacht erscheint. Die im zweiten Abschnitt enthaltene erste Darstellung der Theorie beruht im wesentlichen auf fortgesetzter harmonischer Zweiteilung. Es wird bei dieser Darstellung von dem Satz Gebrauch gemacht, den Darboux*) bewiesen hat, demzufolge zu zwei sich nicht trennenden Punktepaaren stets ein solches Punktepaar gefunden werden kann, das von jedem einzelnen jener beiden harmonisch getrennt wird. Bei der zweiten Darstellung im dritten Abschnitt wird die allgemeine harmonische n-Teilung benutzt. Alle die zu dieser Darstellung nötigen Hilfssätze sind in der vorliegenden Arbeit selbst vollständig entwickelt.

Erster Abschnitt.

Vorbereitende Entwicklungen.

§ 1.

Postulate der Anordnung.

Es sollen nun zunächst die folgenden Tatsachen (Axiome oder Postulate) vorausgesetzt werden:

Postulat I. *Auf jeder Geraden gibt es zwei verschiedene Punkte. Durch je zwei verschiedene Punkte A und B der Geraden wird die Gesamtheit ihrer übrigen Punkte in zwei Systeme zerfällt, deren jedes Punkte enthält, und die keinen Punkt gemein haben. Diese Systeme werden als die beiden „Strecken“ AB (oder die beiden Strecken BA) bezeichnet, denen also die*

---

*) Mathematische Annalen Bd. 17, S. 58 (vergl. § 8 der vorliegenden Arbeit). Aus diesem Hilfssatz konnte Darboux schließen, daß, wenn die Punkte einer Geraden auf die einer anderen ein-eindeutig so bezogen sind, daß vier harmonischen Punkten stets vier ebensolche Punkte zugeordnet sind, dann die Punkte der einen Geraden entsprechend denen der anderen geordnet liegen. Daß der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie aus den Darbouxschen Entwicklungen nicht ohne weitere ergänzende Betrachtungen — die in der Richtung der anderen Beweise des Fundamentalsatzes sich bewegen müssen — erschlossen werden kann, ist von Schur (Mathematische Annalen Bd. 18, S. 252) bemerkt worden.

*Punkte A und B selbst nicht angehören.**) *Jede der beiden Strecken AB wird Ergänzungsstrecke der anderen genannt.*

Postulat II. *Sind A, B, C drei verschiedene Punkte der Geraden, so hat die Strecke AB, die C nicht enthält, mit der Strecke BC, die A nicht enthält, keinen Punkt gemein, und es besteht die Strecke AC, die B enthält, gerade aus dem Punkt B und den beiden vorhin genannten Strecken.*

Aus diesen Postulaten läßt sich sofort noch eine Folgerung ziehen. Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, und zwar sollen die Punkte B und D nicht derselben Strecke AC angehören. Nun ist nach II die Strecke BC, *die A nicht enthält,* ein Teil der Strecke AC, die B enthält, d. h. also der Strecke AC, die D nicht enthält, und enthält also selbst D nicht. Ebenso ist nach II die Strecke DC, *die A nicht enthält,* ein Teil der Strecke AC, die D enthält und deshalb B nicht enthält, und enthält also selbst B nicht. Nimmt man jetzt die genannte Strecke BC und die genannte Strecke DC, d. h. CD, zusammen und fügt noch den Punkt C hinzu, so erhält man nach II diejenige Strecke BD, die C enthält. Da aber die genannten Strecken, die zusammengenommen worden sind, beide A nicht enthielten, so enthält die entstandene Strecke BD gleichfalls den Punkt A nicht. Somit liegen A und C auf verschiedenen Strecken BD. Wir haben damit den Satz bewiesen:

2) *Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte, und liegen B und D nicht auf derselben Strecke AC, so liegen auch A und C nicht auf derselben Strecke BD.*

Den Umstand, daß B und D auf verschiedenen Strecken AC liegen,

---

*) Es könnte bei oberflächlicher Betrachtung auffallend erscheinen, daß der Begriff der „Strecke" in einer Begründung der rein projektiven Geometrie als Grundbegriff auftritt. Tatsächlich wird aber nur vorausgesetzt, daß in bezug auf zwei Punkte der Geraden die anderen in zwei Systeme zerfallen; insbesondere wird selbstverständlich keine Kongruenz von Strecken vorausgesetzt. In § 5 wird dann noch eine andere Grundlegung der Anordnungstatsachen gegeben werden, wobei das Punkttripel den Grundbegriff bilden, und der Begriff der Strecke aus dem Begriff des Punkttripels hergeleitet werden wird.

Es mag daran erinnert werden, daß Anordnungsaxiome zuerst von Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, S. 5ff.) aufgestellt worden sind. Die hier gewählten entsprechen einigermaßen der für die gewöhnliche Gerade gegebenen Formulierung von Ingrami (Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori, Bologna 1899, p. 1ff., man vergl. auch Peano, Rivista di Matematica vol. IV, p. 55ff. und Schur, Mathematische Annalen Bd. 55, S. 267). Die Postulate des Textes sind aber *projektiv* formuliert, worunter ich — die Ausdrucksweise von Schur ist damit nicht im Einklang — eine Formulierung verstehe, die dann gilt, wenn die „idealen Elemente" bereits „adjungiert" sind. Die im Text gegebenen Postulate unterscheiden sich kaum von denjenigen, die M. Pieri in den Atti dell' Accad. d. sc. d. Torino vol. XXX, p. 626ff. aufgestellt hat.

wollen wir auch dadurch ausdrücken, daß wir sagen, *es werden B und D durch A und C getrennt*; es bringt dieser Umstand es nach unserem Satz mit sich, daß auch A und C durch B und D getrennt werden, so daß also die Punktepaare AC und BD sich gegenseitig trennen.

§ 2.

Nachbarpunkte im endlichen Punktsystem.

Jetzt sollen auf der Geraden irgend welche verschiedene Punkte $A, B, C, D, \cdots$ in einer endlichen Zahl $n \geqq 3$ gegeben sein. Man betrachte irgend eine von den beiden Strecken AB. Möglicherweise liegen auf dieser Strecke noch k Punkte, die zu den gegebenen gehören. Ist A' ein solcher, so stellt die Strecke AA', die B nicht enthält, nach Postulat II einen Teil der betrachteten Strecke AB dar; es enthält somit diese Strecke AA' keinen der gegebenen Punkte, der nicht schon in AB vorhanden gewesen wäre, und es kann AA', da es den Punkt A' nicht enthält, höchstens $k-1$ Punkte des gegebenen Systems enthalten. Ist nun auf AA' wirklich ein Punkt A'' des Systems vorhanden, so enthält wieder die Strecke AA'', die A' nicht enthält, höchstens $k-2$ Punkte des Systems. Man gelangt, indem man nötigenfalls so zu schließen fortfährt, zu einem von A verschiedenen Punkt A_1, der zu den gegebenen gehört und so beschaffen ist, daß in einer der beiden Strecken AA_1 keiner der gegebenen Punkte gelegen ist. Wir stellen jetzt die Definition auf:

3) *Zwei einem endlichen System von Punkten angehörende Punkte M und N sollen* Nachbarpunkte *des Punktsystems heißen, wenn es eine Strecke MN gibt, die keinen Systempunkt enthält.*

Durch das vorige ist bewiesen, daß in einem endlichen Punktsystem jeder Punkt A mindestens einen Nachbarpunkt A_1 besitzt.

Da wenigstens drei Systempunkte vorhanden sein sollen, so kann auch nur eine der beiden Strecken AA_1 frei von Systempunkten sein (Postulat I); diese Strecke soll die erste Strecke AA_1 heißen. In der Ergänzungsstrecke dieser Strecke AA_1 liegt also ein Systempunkt B'. Geht man nun von der Strecke AB', die A_1 nicht enthält, so wie oben von der Strecke AB aus, so ergibt sich ein in der Ergänzungsstrecke AA_1 gelegener Systempunkt A_{n-1}, *der auch Nachbarpunkt von A in dem gegebenen Punktsystem ist.* Dabei ist A_{n-1} von A_1 verschieden, und es ist die von Systempunkten freie Strecke AA_{n-1} diejenige der beiden Strecken AA_{n-1}, die A_1 nicht enthält. Nun erhebt sich die Frage, ob der Punkt A noch einen dritten Nachbarpunkt A_0 besitzen könnte. Da die erste Strecke AA_1 keinen Systempunkt enthält, so könnte A_0 nur auf der anderen Strecke AA_1 liegen, auf der auch A_{n-1} gelegen ist. Nun zerfällt

diese Strecke AA_1, wenn man vom Punkt A_{n-1} selbst absieht, in die Strecke AA_{n-1}, die A_1 nicht enthält, und in die Strecke $A_{n-1}A_1$, die A nicht enthält (Postulat II). Da nun A_0 auf der ersten der beiden zuletzt genannten Strecken, die gar keinen Systempunkt enthält, nicht gelegen sein kann, so müßte A_0 auf der Strecke $A_{n-1}A_1$ liegen, die A nicht enthält, somit müßte nach 2) auch A_{n-1} auf der Strecke AA_0 liegen, die A_1 nicht enthält. Es würde also dann die eine Strecke AA_0 den Punkt A_1, die andere den Punkt A_{n-1} enthalten, was dem Umstand widerspricht, daß A_0 ein Nachbarpunkt von A sein sollte. Somit ergibt sich:

4) *In einem endlichen Punktsystem von drei und mehr Punkten hat jeder Punkt genau zwei Nachbarpunkte.*

§ 3.

Die zyklische Ordnung eines endlichen Punktsystems.

Man greife in einem System von n Punkten, wobei $n \geq 3$ sein soll, einen Punkt A_0 beliebig heraus. A_1 sei einer der beiden Nachbarpunkte von A_0, A_2 sei der von A_0 verschiedene Nachbarpunkt von A_1, A_3 der von A_1 verschiedene Nachbarpunkt von A_2 usw. Da nun in der Reihe der Punkte $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$ notwendig einmal eine Wiederholung eintreten muß, so kann angenommen werden, es sei A_l der erste auftretende Punkt, der mit einem bereits vorhandenen Punkt A_k übereinstimmt. Nun folgt aus den getroffenen Bestimmungen, daß A_l von A_{l-1} und A_{l-2} verschieden sein muß, und es ist deshalb durch $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{l-2}, A_{l-1}$ ein Zyklus von mindestens drei Punkten dargestellt, für den je zwei aufeinanderfolgende Punkte Nachbarpunkte im ursprünglich gegebenen endlichen System sind. Natürlich soll hier das Wort „Zyklus" nur die Aufeinanderfolge bedeuten, die wir den *Zeichen* $A_k, \cdots, A_{l-1}$ geben wollen, indem wir von A_k anfangend zu A_{k+1}, dann zu A_{k+2} usw. und schließlich von A_{l-1} wieder zu A_k übergehen und nun den ganzen gedanklichen Prozeß eventuell mehrmals wiederholen.

Es ergibt sich nun, daß $k = 0$ ist. Wäre nämlich $k > 0$, so müßten die Punkte $A_{k-1}, A_{k+1}, A_{l-1}$ nach dem vorigen voneinander und von A_k verschieden und alle drei Nachbarpunkte von A_k sein, was unmöglich ist. Zweifelhaft bleibt aber noch, ob die Punkte des Zyklus $A_0A_1 \cdots A_{l-1}$ die *sämtlichen* Punkte des ursprünglich gegebenen Systems umfassen, d. h. ob $l = n$ ist. Nun soll neben dem ursprünglichen System ein zweites gedacht werden, das aus den Punkten $A_0, A_1, \cdots, A_{l-1}$ *allein* besteht. Offenbar sind zwei Punkte des zweiten Systems, die im ursprünglichen System benachbart sind, auch im zweiten benachbart, weshalb zwei im obigen Zyklus aufeinanderfolgende Punkte sowohl im ursprünglichen, als im zweiten System benachbart sind. Da ferner jeder der Punkte des

Zyklus auch im zweiten System nur zwei benachbarte haben kann, so sind zwei Punkte des Zyklus, die nicht aufeinander folgen, weder im ursprünglichen, noch im zweiten System benachbart. Da es außerdem Strecken A_0A_1, A_1A_2, $\cdots$, $A_{l-2}A_{l-1}$, $A_{l-1}A_0$ gibt, die keinen Punkt des ursprünglichen Systems enthalten, und z. B. von den beiden Strecken A_0A_1 nur die eine von Punkten des zweiten Systems frei ist, so enthalten diejenigen Strecken A_0A_1, $\cdots$, $A_{l-1}A_0$, in denen kein Punkt des zweiten Systems liegt, auch keinen Punkt des ursprünglichen Systems. Ist nun B irgend ein von A_0, A_1, $\cdots$, A_{l-1} verschiedener Punkt der Geraden, so bilde man ein drittes System aus den Punkten A_0, A_1, $\cdots$, A_{l-1} und B. In diesem System muß B zwei Nachbarpunkte A_α und A_β besitzen. Nun können die Strecken $A_\alpha B$ und $A_\beta B$, in denen kein Punkt des dritten Systems liegt, auch bezeichnet werden als die Strecke $A_\alpha B$, die A_β nicht enthält, und die Strecke $A_\beta B$, die A_α nicht enthält. Diese beiden genannten Strecken $A_\alpha B$ und $A_\beta B$ machen mit dem Punkt B zusammen nach dem Postulat II eine der beiden Strecken $A_\alpha A_\beta$ aus und zwar diejenige, die außer B keinen Punkt des dritten Systems, somit keinen Punkt des zweiten Systems enthält. Es sind also A_α und A_β im zweiten System benachbart und folgen demnach in dem obigen Zyklus aufeinander; es ist deshalb auch die Strecke $A_\alpha A_\beta$, die B, aber keinen Punkt des zweiten Systems enthält, eine solche, die auch keinen Punkt des ursprünglichen Systems enthält. B kann also dem ursprünglichen System nicht angehören. Nun war aber B *irgend* ein von A_0, A_1, $\cdots$, A_{l-1} verschiedener Punkt der Geraden. Es ergibt sich hiermit, daß der Zyklus $A_0A_1 \cdots A_{l-1}$ bereits alle Punkte des ursprünglichen Systems umfaßt, so daß also $l = n$ ist; zugleich sieht man, daß jeder Punkt B der Geraden, der dem ursprünglichen System nicht angehört, auf einer der oben definierten Strecken A_0A_1, A_1A_2, $\cdots$, $A_{n-1}A_0$ liegen muß. Daß kein Punkt auf zwei dieser Strecken, etwa auf $A_\alpha A_\beta$ und $A_\gamma A_\delta$, zugleich liegen kann, folgt daraus, daß ein solcher Punkt (Postulat II) in dem System, das durch seine Hinzufügung entsteht, die Punkte A_α, A_β, A_γ, A_δ zu Nachbarpunkten und somit, je nachdem die Intervalle $A_\alpha A_\beta$ und $A_\gamma A_\delta$ einen Endpunkt gemein haben oder nicht, mindestens drei oder mindestens vier Nachbarpunkte besitzen müßte, was unmöglich ist.

Bedenkt man noch, daß nach dem vorigen zwei im Zyklus nicht aufeinanderfolgende Punkte nicht benachbart sein können, daß man ferner von jedem der gegebenen Punkte aus infolge der doppelten Möglichkeit den ersten Nachbarpunkt zu bestimmen, wenn $n \geqq 3$ ist, zwei entgegengesetzte Zyklen erhält, und daß diese beiden Zyklen dieselben sind, von welchem Punkt des Systems man auch ausgeht, so ergibt sich:

5) *n auf der Geraden gegebene Punkte lassen sich in einem Zyklus*

$A_0 A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_0$ so ordnen, daß je zwei im Zyklus aufeinanderfolgende Punkte und nur zwei solche benachbart sind; es haben dann von den Strecken A_0A_1, A_1A_2, $\cdots$, $A_{n-1}A_0$, die keinen der gegebenen Punkte enthalten, keine zwei einen Punkt gemein, und diese Strecken erfüllen mit den Punkten A_0, A_1, $\cdots$, A_{n-1} selbst zusammen die ganze Gerade. Es gibt, wenn $n \geqq 3$ ist, genau zwei solcher zyklischer Anordnungen der Punkte A, die einander entgegengesetzt sind, und die man erhält, wenn man von irgend einem der gegebenen Punkte ausgeht und dann in der beschriebenen Weise zu Nachbarpunkten fortschreitet. Es sollen die Punkte A als in der zyklischen Ordnung $A_0A_1 \cdots A_{n-2}A_{n-1}$ oder $A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_1A_0$ liegend bezeichnet werden. Selbstverständlich wird durch $A_0A_1A_2 \cdots A_{n-2}A_{n-1}$, $A_1A_2 \cdots A_{n-2}A_{n-1}A_0$, $A_2 \cdots A_{n-2}A_{n-1}A_0A_1$ usw. derselbe Zyklus dargestellt.

Tritt zu den Punkten A noch ein von ihnen verschiedener $n+1^{\text{ter}}$ Punkt B hinzu, so gibt es nach dem vorigen zwei im Zyklus der A aufeinanderfolgende Punkte A_α und A_β so, daß die Strecke $A_\alpha A_\beta$, auf der kein Punkt A liegt, den Punkt B enthält. Z. B. soll B in der Strecke A_0A_1 enthalten sein. Da nun keine zwei der Strecken $A_0A_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_0$ einen Punkt gemein haben, und somit A_0A_1 die einzige von den Strecken ist, die B enthält, so ist ersichtlich, daß die Paare A_0B, BA_1, A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_0$ Paare benachbarter Punkte des erweiterten Systems sind, und somit die $n+1$ Punkte im Zyklus $A_0BA_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}$ liegen. Man erkennt nun allgemein die Gültigkeit des Satzes:

6) *Tritt zu n verschiedenen Punkten ein $n+1^{\text{ter}}$ von diesen verschiedener hinzu, so entsteht der eine der Zyklen, in denen die $n+1$ Punkte liegen, aus dem einen Zyklus, in dem die n Punkte gelegen sind, dadurch, daß das neue Element zwischen zwei aufeinanderfolgenden eingeschaltet wird.*

Sind nun A_μ und A_ν irgend zwei nicht benachbarte aus dem System der n Punkte A_0, A_1, $\cdots$, A_n, und sind A', A'', $\cdots$, $A^{(k-1)}$ diejenigen der Punkte, die man der Reihe nach trifft, wenn man in dem einen der obigen beiden Zyklen der n Punkte, der C heißen mag, von A_μ nach A_ν übergeht,*) so sind die Paare $A_\mu A'$, $A'A''$, $A''A'''$, $\cdots$, $A^{(k-1)}A_\nu$ im ursprünglichen System und somit auch in dem System S benachbart, das nur aus A_μ, A_ν, A', A'', $\cdots$, $A^{(k-1)}$ allein besteht. Konstruiert man nun in diesem System S mit den Punkten A_μ, A' beginnend einen Zyklus, so kommt $A_\mu A' A'' A''' \cdots A^{(k-1)} A_\nu$ heraus, woraus man sieht, daß auch A_ν und A_μ im System S benachbart sind. Es liegen somit $A', A'', \cdots, A^{(k-1)}$ sämtlich auf einer und derselben Strecke $A_\mu A_\nu$. Ebenso liegen die Punkte B', B'', $\cdots$, $B^{(l-1)}$, die man trifft, wenn man in dem

*) Das ist keine Bewegung in der Geraden, sondern ein Fortschreiten in der gegebenen Folge der unsere Punkte vorstellenden Zeichen.

Zyklus C von A_ν nach A_μ übergeht, auch auf einer und derselben Strecke $A_\mu A_\nu$, die aber die Ergänzung der vorigen sein muß, weil sonst eine Strecke $A_\mu A_\nu$ von Punkten des ursprünglichen Systems frei sein müßte; dies widerspräche dem Umstand, daß A_μ und A_ν im ursprünglichen System nicht benachbart sein sollten. Es ergibt sich also:

7) *Die Punkte* $A', A'', \cdots, A^{(k-1)}$, *die man in der aufgeführten Reihenfolge in einem der beiden Zyklen von n Punkten beim Übergang von* A_μ *nach* A_ν *trifft, liegen alle auf einer und derselben Strecke* $A_\mu A_\nu$, *und diejenigen, die man in demselben Zyklus beim Übergang von* A_ν *nach* A_μ *trifft, liegen auf der Ergänzungsstrecke. Die Punkte* $A_\mu A' A'' \cdots A^{(k-1)} A_\nu$ *liegen für sich in dem Zyklus, in dem sie soeben genannt worden sind.*

Es läßt sich zugleich eine gewisse Umkehrung des Lehrsatzes 7) in dem folgenden Satze aufstellen:

8) *Gelten die beiden zyklischen Ordnungen* $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1} A_0$ *und* $A_0 A' A'' \cdots A^{(k-1)} A_1$, *jede für die Lage der in ihr aufgeführten Punkte, und liegen die Punkte* $A', A'', \cdots, A^{(k-1)}$ *in derjenigen Strecke* $A_0 A_1$, *welche die Punkte* $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ *nicht enthält, so sind die sämtlichen Punkte in dem Zyklus*

$$A_0 A' A'' \cdots A^{(k-1)} A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1}$$

gelegen.

Um dies einzusehen, betrachte man den Zyklus $A_0 A' A'' \cdots A^{(k-1)} A_1$. Die Strecken $A_0 A', A'A'', \cdots, A^{(k-1)} A_1$, die $A_0, A', A'', \cdots, A^{(k-1)}, A_1$ nicht enthalten, haben keinen Punkt gemein mit der Strecke $A_0 A_1$, die $A', A'', \cdots, A^{(k-1)}$ nicht enthält (Satz 5)). Dies ist aber nach Voraussetzung die Strecke $A_0 A_1$, die $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$ in sich schließt. Die genannten Strecken $A_0 A', A'A'', \cdots, A^{(k-1)} A_1$ enthalten also gar keinen von den sämtlichen Punkten, die erwähnt worden sind. Ebenso enthalten auch die Strecken $A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_{n-1} A_0$, die keinen der Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_0$ in sich schließen, auch keinen der anderen Punkte, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 4.

Der relative Begriff „zwischen“.

Wenn drei Punkte A, B, C voneinander und von einem Punkt F verschieden sind, und B auf derjenigen Strecke AC gelegen ist, auf der F nicht liegt, so soll gesagt werden, daß *in Beziehung auf den Fluchtpunkt F der Punkt B zwischen A und C* gelegen sei. Mit Rücksicht auf den Satz 7) muß man dann in jedem der beiden Zyklen der vier genannten Punkte beim Übergang von A nach C den einen und von C nach A den anderen der beiden Punkte B und F treffen, so daß also $ABCF$ und

$FCBA$ die beiden Zyklen sind. Daraus, daß irgend welche vier Punkte stets in zwei Zyklen, die einander entgegengesetzt sind, und nicht in einem dritten Zyklus geordnet werden können, ersieht man, daß in bezug auf einen bestimmten Fluchtpunkt *von drei Punkten einer und nur einer zwischen den beiden anderen gelegen ist.* Es folgt aus Postulat I, daß in Beziehung auf den Fluchtpunkt F *zwischen A und B mindestens ein Punkt sich befindet.*

Nun seien n Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_n$ gegeben, die voneinander und von F verschieden sind, und es soll in bezug auf den Fluchtpunkt F weder zwischen A_1 und A_2, noch zwischen A_2 und A_3 usw., noch zwischen A_{n-1} und A_n einer der Punkte A gelegen sein, d. h. es soll Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ geben, auf denen weder der Punkt F, noch einer der Punkte A liegt. Wir wollen in diesem Fall sagen, daß die Punkte A *in Beziehung auf den Fluchtpunkt F in der Ordnung $A_1A_2\cdots A_n$ gelegen sind.* Die Punkte liegen dann natürlich auch in der Ordnung $A_nA_{n-1}\cdots A_2A_1$. Bildet man den Zyklus, in dem die Punkte A zusammen mit dem Punkt F gelegen sind, und beginnt mit A_1 und A_2, so erhält man, da der Zyklus nach Erschöpfung aller Punkte und nicht vorher schließt (vgl. § 3), $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nF$. Nun zeigt sich mit Rücksicht darauf, daß zwei und nur zwei zyklische Anordnungen der $n+1$ Punkte existieren und diese einander entgegengesetzt sind, daß n Punkte, für $n \geqq 2$, in bezug auf einen von ihnen verschiedenen Fluchtpunkt stets in zwei und nur zwei Ordnungen liegen, und daß diese einander entgegengesetzt sind. Nach Satz 7) liegen auch die Punkte $A_{\mu+1}, A_{\mu+2}, \cdots, A_n$ alle auf derselben Strecke $A_\mu F$, und die Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{\mu-1}$ auf der Ergänzungsstrecke.

Greift man drei Punkte $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ so heraus, daß $\alpha<\beta<\gamma$ ist, so ersieht man aus der zyklischen Ordnung $A_1A_2\cdots A_nF$, da man beim Übergang von A_α nach A_γ den Punkt A_β und beim Übergang von A_γ zu A_α den Punkt F trifft, nach Satz 7), daß in bezug auf F als Fluchtpunkt A_β *zwischen A_α und A_γ liegt.* Es liegt also (s. o.) A_γ nicht zwischen A_α und A_β, und A_α nicht zwischen A_β und A_γ. Greift man nunmehr eine ganze Reihe

$$9) \qquad A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta, \cdots, A_\omega$$

von Punkten heraus, so erkennt man, daß keiner der Punkte 9) in bezug auf F zwischen A_α und A_β oder zwischen A_β und A_γ usw. gelegen ist. Es liegen also die Punkte 9) in der Ordnung, in der sie aufgeführt worden, d. h. also *in der Ordnung, in der sie in der Folge $A_1A_2\cdots A_n$ vorgefunden werden,* wenn wie vorhin F der Fluchtpunkt ist.

Tritt noch ein neuer Punkt B hinzu, und erwägt man die Ordnung der $n+1$ Punkte, so müssen also in dieser die n Punkte A untereinander

geradeso geordnet erscheinen, wie wenn sie für sich allein vorhanden wären. Der Punkt B liegt daher, in bezug auf F als Fluchtpunkt, mit den A zusammen in einer der Ordnungen $BA_1A_2\cdots A_n$, $A_1BA_2\cdots A_n$, $A_1A_2BA_3\cdots A_n$, $\cdots$, $A_1A_2\cdots A_nB$. Dies kann auch aus Satz 6) gefolgert werden. Da (s. o.) in der ersten und letzten der genannten Ordnungen B nicht zwischen A_1 und A_n liegt, was in den anderen Fällen eintritt, und alle die genannten Fälle sich ausschließen, so erkennt man auch, daß, immer in Beziehung auf F als Fluchtpunkt, jeder zwischen A_1 und A_n gelegene Punkt entweder zwischen A_1 und A_2 oder zwischen A_2 und A_3 usw. oder zwischen A_{n-1} und A_n liegt, und daß diese Möglichkeiten sich gegenseitig ausschließen. Weiß man andererseits, daß B z. B. zwischen A_2 und A_3 gelegen ist, so ergibt sich ebenso leicht, daß $A_1A_2BA_3\cdots A_n$ die Ordnung der $n+1$ Punkte sein muß, und es liegt B auch zwischen A_1 und A_n.

Sind nun irgend welche beliebige Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_n$ gegeben, wobei nicht einmal vorausgesetzt sein soll, daß sie alle verschieden sind, wobei aber, immer in bezug auf *einen und denselben Fluchtpunkt* F, der Punkt A_2 zwischen A_1 und A_3, A_3 zwischen A_2 und A_4 usw., schließlich A_{n-1} zwischen A_{n-2} und A_n gelegen sein soll, worin also auch liegt, daß A_1, A_2, A_3 voneinander, A_2, A_3, A_4 voneinander verschieden sind usw., so konstruiere man die Ordnung, in der die untereinander verschiedenen von den Punkten A in bezug auf F gelegen sind. In dieser Ordnung muß nun entweder A_1 vor A_2, und A_2 vor A_3, oder A_2 vor A_1, und A_3 vor A_2 kommen, und es muß das Entsprechende von den Punkten A_2, A_3, A_4, von $A_3A_4A_5$ usw. gelten. Da man die Ordnung auch in das Entgegengesetzte verkehren kann, so darf man annehmen, daß A_1 vor A_2 kommen soll; es ergibt sich dann sofort, daß A_2 vor A_3, dies vor A_4 usw. kommt, so daß $A_1A_2A_3\cdots A_n$ notwendig die Ordnung ist, in der die Punkte liegen, womit auch gesagt ist, daß tatsächlich die n Punkte sämtlich voneinander verschieden sind.

Der Bequemlichkeit wegen soll auch der Ausdruck gebraucht werden, daß zwei Punkte in Beziehung auf den Fluchtpunkt F *zu verschiedenen Seiten eines Punkts B liegen*, wenn eben mit Beziehung auf F der Punkt B zwischen jenen beiden liegt, diese also in verschiedenen Strecken BF enthalten sind, und daß beliebig viele Punkte *auf derselben Seite von B* gelegen sind in bezug auf F als Fluchtpunkt, wenn die Punkte alle derselben Strecke BF angehören. Es hat aber auch einen Sinn zu sagen, daß in bezug auf F als Fluchtpunkt A *auf derselben Seite von B liege wie A' von B'*. Dies soll heißen, daß in der Ordnung, in der die sämtlichen Punkte A, B, A', B' in bezug auf F liegen, entweder gleichzeitig A vor B, und A' vor B', oder gleichzeitig A nach B, und A' nach B'

kommt. Dabei können von den Punkten A, B, A', B' auch welche zusammenfallen, nur ist A als von B verschieden, und A' als von B' verschieden gedacht. Die gegebene Bestimmung ist eine unzweideutige, da jede der beiden vorhandenen Anordnungen, die einander entgegengesetzt sind, dasselbe ergibt. Hat man nun drei Paare von je zwei verschiedenen Punkten AB, $A'B'$, $A''B''$, so gilt in der Tat, daß, wenn in bezug auf einen Fluchtpunkt F der Punkt A auf derselben Seite von B liegt wie A' von B', und A' auf derselben Seite von B' liegt wie A'' von B'', daß dann A auch auf derselben Seite von B liegt wie A'' von B''. Um dies einzusehen, muß man bedenken, daß z. B. A, B, A', B' für sich in derselben Ordnung liegen, in der sie auftreten, wenn sie noch mit A'' und B'' in bezug auf F als Fluchtpunkt zusammen geordnet werden (s. o.). Ebenso erkennt man, daß A auf derselben Seite von B liegt, wie A'' von B'', wenn A nicht auf derselben Seite von B liegt, wie A' von B', und A' nicht auf derselben Seite von B', wie A'' von B'', usw. Damit ist nun die eingeführte Begriffsbestimmung völlig gerechtfertigt. Drei Punkte A, B, C, unter denen A auf derselben Seite von B liegt wie B von C, müssen, alles in bezug auf F als Fluchtpunkt, in der Ordnung ABC, also auch in der Ordnung CBA liegen, und man erkennt, daß dann auch A auf derselben Seite von C liegt, wie A von B, und B von C.

Es ergibt sich nun auch, daß, wenn gewisse Punkte A für einen Fluchtpunkt in der Ordnung $A_1A_2A_3\cdots$, und gewisse Punkte B für denselben Fluchtpunkt in der Ordnung $B_1B_2B_3\cdots$ gelegen sind, wobei auch Punkte A mit Punkten B zusammenfallen können, entweder jeder Punkt A auf der gleichen Seite von jedem in der obigen Anordnung nachfolgenden Punkt A liegt wie jeder Punkt B von jedem in der Anordnung der B nachfolgenden Punkt, oder jeder Punkt A auf der entgegengesetzten Seite jedes nachfolgenden Punkts A liegt wie jeder Punkt B von einem seiner nachfolgenden. Man sagt im ersten Fall, die beiden Anordnungen seien gleichartig (gleichgerichtet), im zweiten Fall, sie seien ungleichartig (entgegengesetzt gerichtet). Die beiden Anordnungen, in denen für einen gegebenen Fluchtpunkt n gegebene Punkte liegen, sind immer ungleichartig.*)

*) Man kann auch irgend zwei *zyklische* Anordnungen, in deren jeder drei oder mehr Punkte gelegen sind, als gleichartig beziehungsweise ungleichartig definieren. Zu diesem Zweck muß man die Verschiedenen von den in den beiden Zyklen vorkommenden Punkten in einen einzigen Zyklus ordnen und die Resultate von § 3 anwenden.

§ 5.

Andere Begründungen der Anordnungstatsachen der Geraden.

Man kann die eben behandelten Anordnungstatsachen auch auf den Begriff des Punkttripels gründen, indem man folgendermaßen definiert:

Unter einem *Punkttripel* sollen drei *verschiedene* Punkte verstanden werden, die *in einer bestimmten Ordnung* aufgeführt sind. Nun sollen folgende Tatsachen postuliert werden:

α) Es gibt auf einer projektiven Geraden zwei Arten von Punkttripeln, so daß jedes Tripel einer und nur einer Art angehört,*) daß ferner ABC mit BCA stets von derselben, und dann BAC immer von der andern Art ist.

β) Zu zwei verschiedenen Punkten A und C lassen sich stets zwei von ihnen verschiedene B und B' so finden, daß die Tripel ABC und $AB'C$ von verschiedener Art sind.

γ) Wenn ABC und BDC Tripel von derselben Art sind, so ist ADC ein Tripel von der gleichen Art, worin nach der Definition auch liegen soll, daß D von A verschieden ist.

δ) Sind ABC und ADC von derselben Art, und sind B und D voneinander verschieden, so ist ABD stets von der Art von BDC.

Aus dem Postulat α) ergibt sich, daß von den Tripeln, die aus den Punkten A, B, C gebildet werden können, die drei: ABC, BCA, CAB von einer und derselben Art, und die folgenden: BAC, ACB, CBA von der andern Art sind. Nun definiere man folgendermaßen: Die sämtlichen von A und C verschiedenen Punkte der Geraden, für die das Tripel ABC von der Art eines vorgegebenen Tripels PQR ist, bilden ein bestimmtes System von Punkten, das als *Strecke* AC bezeichnet werden soll.**) Es ergibt sich auch aus dieser Definition mit Rücksicht auf die Postulate α) und β), daß zwei verschiedene Strecken AC existieren, von denen man jede als Ergänzungsstrecke der andern bezeichnen kann, wobei jeder von A und C verschiedene Punkt der Geraden einer und nur einer der Strecken angehört. Die beiden Strecken CA stimmen mit den beiden Strecken AC überein.

Nun sollen drei verschiedene Punkte A, B, C angenommen werden. Es soll bewiesen werden, *daß ein von B verschiedener Punkt D derjenigen*

*) Das Entsprechende hierzu bei der gewöhnlichen Geraden bildet eine Darstellung der Anordnungstatsachen, die sich auf zwei Arten von Punktpaaren gründet. Man vergl. G. Vailati, Rivista di Mat. vol. II, p. 71 und meine Arbeit in den Sächs. Ber. 1901, S. 39.

**) Vergl. F. Enriques, R. Istituto Lombardo Rend. ser. II, vol. XXVII, p. 557, wo übrigens das Punkttripel nicht den Grundbegriff bildet.

Strecke AC, die B enthält, entweder in der Strecke AB, die C nicht enthält, oder in der Strecke CB, die A nicht enthält, liegen muß. Dabei genügt es, zu zeigen, daß ein Punkt D der genannten Art, falls er der Strecke AB, die C nicht enthält, nicht angehört, notwendig in der Strecke CB, die A nicht enthält, gelegen sein muß. Da nun vorausgesetzter Maßen der Punkt D mit B auf derselben Strecke AC liegt, so sind (vgl. die Definition der Strecke) die Tripel ADC und ABC von derselben Art, also nach δ) auch ABD und BDC untereinander, und somit auch ADB und CDB untereinander von gleicher Art. Falls aber, wie wir jetzt uns denken wollten, D auch der Strecke AB, die C enthält, angehört, so ist ADB von derselben Art wie ACB. Es sind also die drei Tripel ADB, CDB und ACB von einer und derselben Art, und es ergibt jetzt die Betrachtung der beiden letzten dieser drei Tripel, daß CDB und CAB von verschiedener Art sein müssen. Somit liegt D auf derjenigen Strecke CB, die A nicht enthält, w. z. b. w.

Nunmehr wollen wir zeigen, *daß die Punkte der Strecke AB, die C nicht enthält, und die der Strecke CB, die A nicht enthält, sämtlich der Strecke AC angehören, die B enthält.* Es genügt dabei, den Nachweis für die Punkte der Strecke CB, die A nicht enthält, zu führen (der andere Teil des Beweises ist völlig analog). Für einen solchen Punkt D sind die Tripel BAC und BDC von verschiedener, und also ABC und BDC von gleicher Art, weshalb nach dem Postulat γ) auch ADC von der Art der beiden letzten Tripel ist. Damit aber, daß ADC und ABC von derselben Art sind, ist gesagt, daß D auf der Strecke AC liegt, die B enthält, w. z. b. w.

Das Resultat der letzten Betrachtung kann aber auch so ausgesprochen werden: Es war vorausgesetzt, daß D auf der Strecke BC lag, die A nicht enthält, und es wurde gefunden, daß D dann *nicht* auf der Strecke AC liegen konnte, die B *nicht* enthält. Da man nun in der Voraussetzung, ohne ihren Inhalt zu ändern, B und C miteinander vertauschen kann, so kann man diese Vertauschung auch in der Folgerung machen und erhält: *Ein Punkt der Strecke BC, in der A nicht liegt, kann nicht der Strecke AB, in der C nicht liegt, angehören.*

Die drei jetzt bewiesenen Tatsachen ergeben zusammengefaßt das Postulat II von § 1 (S. 170), das sich demnach aus den über die Tripel vorausgesetzten Tatsachen ableiten läßt. Natürlich kann man auch umgekehrt aus den obigen Postulaten I und II die von den Tripeln in diesem Paragraphen angenommenen Tatsachen ableiten. Man muß dabei zuerst definieren, wann zwei Tripel ABC und $A'B'C'$ als von derselben Art oder von verschiedener angesehen werden sollen.*)

*) Vergl. S. 178 Anm.

Die formulierten Tatsachen von den Tripeln kann man als eine dem Wesen der vorliegenden Untersuchung angepaßte Fassung des Umstandes ansehen, daß die Punkte der projektiven Geraden so durchlaufen werden können, daß man mit einem beliebigen beginnt und schließlich zu diesem zurückkehrt, nachdem man jeden anderen gerade einmal berührt hat, daß man dann die Punkte auch in umgekehrter Folge durchlaufen kann u. s. f.*)

Eine weitere Behandlungsart der Anordnungstatsachen besteht darin, daß die in der gewöhnlichen Geometrie für den Begriff des „Zwischen" geltenden Axiome**) in sinngemäßer Weise auf die Begriffe des „Sichtrennens" und „Sichnichttrennens" zweier Punktepaare auf der projektiven Geraden übertragen werden.***)

§ 6.

Die hier zu postulierenden Tatsachen der harmonischen Lage.

Hinsichtlich der harmonischen Lage sollen folgende Tatsachen gefordert werden:

Postulat III. *Zu drei Punkten A, B, C, die nicht alle drei zusammenfallen, gibt es einen durch sie eindeutig bestimmten vierten D, so daß die beiden Paare AC (CA) und BD (DB) zueinander harmonisch sind. Fallen von den drei gegebenen Punkten zwei zusammen, so fällt auch D mit diesen beiden zusammen; im anderen Fall sind die vier Punkte verschieden*†), *und zwar liegen B und D auf verschiedenen Strecken AC.*

---

*) Man kann aber auch den Begriff einer zyklisch geordneten und in einem gewissen Sinne dichten (im Sinn von Vahlen, Abstrakte Geometrie S. 9) Menge definieren, indem man ihn auf den Begriff einer einfach geordneten (vergl. G. Cantor, Zur Lehre vom Transfiniten, 1890, S. 68) Menge zurückführt. Dies hat Enriques (Ist. Lomb. a. a. O. p. 554 ff. und Vorlesungen über projektive Geometrie, deutsche Ausgabe von Fleischer, 1903, S. 16) getan.

**) Man vergl. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, S. 5 ff.; Burkhardt, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1895, S. 2; Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1899, S. 6 und Proceedings of the London Math. Soc. vol. XXXV, p. 51; Moore, Transactions of the American Math. Soc. vol. 3, p. 143 ff.; Veblen, ebenda vol. 5, p. 344 ff., wobei noch zu bemerken ist, daß die in den drei letzten Arbeiten mit Hilfe des ebenen Axioms der Anordnung erreichten Vereinfachungen des Axiomsystems hier, wo die Gerade losgelöst von der Ebene betrachtet wird, sich nicht anbringen lassen.

***) Vergl. Vailati, Rivista d. Mat. vol. V, p. 75 und p. 183 und A. Padoa, ebenda vol. VI, p. 35.

†) Hier muß dies in der Tat vorausgesetzt werden. Fano hat ursprünglich die besondere Annahme eingeführt, daß vier verschiedene harmonische Punkte existieren (Giornale di Matematiche vol. 30, p. 115 und p. 126). Dies vorauszusetzen ist jedoch dann nicht nötig, wenn man die (projektiven) Axiome der Verknüpfung

Fallen A, B, C alle drei zusammen, so sind AC und BD für jede beliebige Lage des Punktes D harmonisch.

Wenn zwei Punktepaare harmonisch genannt werden, so soll dies also so gemeint sein, daß sowohl die Punkte eines Paares untereinander, als auch die beiden Paare vertauscht werden können, ohne daß dadurch der Inhalt der Aussage verändert wird. Die beiden Punkte eines Paares werden auch *konjugiert* genannt. Es ergibt sich ferner aus III mit Rücksicht auf den Satz 2), daß die Paare AC und BD sich gegenseitig trennen, weshalb auch der Ausdruck gebraucht wird, daß diese Paare sich *harmonisch trennen*. Außerdem sollen noch die Ausdrücke benutzt werden, daß in Beziehung auf B als Fluchtpunkt D der *harmonische Mittelpunkt* von A und C sei, daß B und D durch *harmonische Spiegelung* in Beziehung auf A und C ineinander übergehen, daß A, B, C, D in der eben genannten Ordnung*) *vier harmonische Punkte* seien, oder daß D der vierte harmonische Punkt sei zu A, B und C. Daß die vier Punkte in der Ordnung $ABCD$ harmonisch sind, ist also gleichbedeutend damit, daß sie z. B. in der Ordnung $BCDA$ harmonisch sind.

Neben dem eben aufgestellten Postulat sollen noch die folgenden angenommen werden:

Postulat IV. *Sind die Punkte A, B, C, D voneinander verschieden, und ist sowohl das Paar AC, als das Punktepaar $A'C'$ mit BD harmonisch, so liegen, falls A' von A und C verschieden ist, A' und C' in derselben Strecke AC.*

Postulat V. *Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte, und ist sowohl AC mit BD, als auch das Punktepaar AC' mit dem Paar $B'D$ harmonisch, so liegt, falls B' von A und B verschieden ist, C' in derjenigen Strecke AC, die D nicht enthält, oder in der anderen, je nachdem B' in der Strecke AB, die D nicht enthält, oder in der anderen Strecke AB gelegen ist.*

---

und Anordnung des Raumes fordert. Man vergl. hinsichtlich des Beweises dafür, daß der vierte harmonische zu drei verschiedenen Punkten selbst von diesen verschieden ist, und daß die konjugierten Paare sich trennen, Enriques, R. Istituto Lombardo, Rendiconti ser. II, vol. XXVII, p. 560 und Fano, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. IX, 1895, p. 79 (Brief an Enriques). M. Pieri (Torino Mem. vol. XXXXVIII, p. 24ff. und Torino Atti vol. 39, p. 315 Anm.) hat Postulate aufgestellt, die bestimmt sind, die Anordnungsaxiome überflüssig zu machen. Dabei tritt wieder die Voraussetzung auf, daß der vierte harmonische zu drei verschiedenen Punkten ein von diesen verschiedener ist, und es kommen dazu noch Postulate, welche die Existenz eines gemeinsamen harmonischen Punktepaares zu zwei Punktepaaren betreffen. Dabei ist zu beachten, daß die harmonische Lage bei Pieri keinen Grundbegriff vorstellt, sondern auf Grund der Tatsachen der Verknüpfung durch die Vierecksfigur definiert wird.

*) Vergl. S. 164 unten Anm. **).

Diese beiden Tatsachen haben im wesentlichen dieselbe Bedeutung wie die folgenden mehr anschaulichen Aussagen, die auf den hier vermiedenen Bewegungsbegriff gegründet sind und die vielfach in geometrischen Untersuchungen herangezogen werden*): *Ist B der harmonische Mittelpunkt von A und C in Beziehung auf den festen Fluchtpunkt D, so bewegen sich bei festgehaltenem B die Punkte A und C gegeneinander,***) *bei festgehaltenem A aber die Punkte B und C gleichlaufend miteinander.*

Da in der vorliegenden Arbeit eine unabhängige Herleitung der Geometrie der projektiven Geraden gegeben werden soll, muß noch eine Tatsache vorausgesetzt werden:

Postulat VI (Schließungssatz). *Ist das Paar der verschiedenen Punkte MN sowohl mit AA', als mit BB', mit CC' und mit DD' harmonisch, und ist AC mit BD harmonisch, so ist es auch $A'C'$ mit $B'D'$.*

Man könnte dies auch so ausdrücken: Aus vier harmonischen Punkten $ABCD$ erhält man vier ebensolche, wenn man sie alle in Beziehung auf dieselben beiden verschiedenen Punkte M und N „harmonisch spiegelt". Läßt man in VI die Punkte D und D' miteinander und mit N zusammenfallen, so ergibt sich:

10) *Ist das Paar der verschiedenen Punkte M und N sowohl mit AA', als mit BB' und CC' harmonisch, und ist AC harmonisch mit BN, so ist auch $A'C'$ harmonisch mit $B'N$.****)

Dies kann auch so ausgedrückt werden:

11) *Wenn AA', BB' und CC' in Beziehung auf denselben Fluchtpunkt N einen gemeinsamen harmonischen Mittelpunkt M haben, der zugleich von N verschieden ist, wenn ferner B der harmonische Mittelpunkt von AC ist, so ist, immer für denselben Fluchtpunkt N, der Punkt B' der harmonische Mittelpunkt von $A'C'$.*

§ 7.

Harmonische Spiegelung einer geordneten Reihe von Punkten.

Wir wollen nun ausführlich beweisen, daß das Postulat IV zusammen mit den vor ihm eingeführten Postulaten den Satz ergibt:

12) *Werden zwei verschiedene Punkte A und B in bezug auf zwei untereinander verschiedene Punkte M und N nach A' und B' harmonisch gespiegelt, so sind auch A' und B' voneinander verschieden, und es liegt,*

*) Vergl. den schon zitierten Beweis von Zeuthen und Lüroth bei Klein, Mathematische Annalen Bd. 7, S. 535.

**) Man vergl. übrigens die ausführlichen Beweise in § 7 und § 10 (Satz 30)).

***) Wäre das Zusammenfallen von Punkten in den Postulaten nicht mit berücksichtigt worden, so würde der Satz 10) nicht in dieser Weise gefolgert werden können.

falls M von A und B verschieden ist, in Beziehung auf den Fluchtpunkt M der Punkt A' auf der entgegengesetzten Seite von B', wie A von B.

Daß A' und B' nicht zusammenfallen können, ergibt sich daraus, daß sonst nach III auch der vierte harmonische Punkt zu M, A', N mit dem vierten harmonischen zu M, B', N zusammenfallen müßte. Die besonderen Fälle, in denen die Voraussetzungen von 12) es wirklich zulassen, daß einige der genannten Punkte sich decken, sind nun nach Postulat III ohne weiteres zu überblicken; es mag nur auf einen von ihnen durch die nebenstehende Figur 1, die natürlich nicht als Beweis-

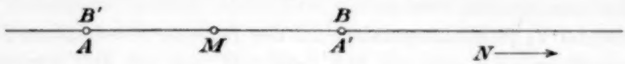


Fig. 1.

mittel dienen soll, hingewiesen sein. Für den Fall, daß A, A', B, B', M, N sechs verschiedene Punkte sind, muß der Beweis aber ausgeführt werden. Da sowohl AA', als BB' mit MN harmonisch ist, und somit nach Postulat IV die Punkte B und B' auf derselben Strecke AA' liegen, so müssen im System der Punkte A, A', B, B' die Punkte A und A' Nachbarpunkte sein, so daß eine der beiden zyklischen Ordnungen $AA'BB'$ oder $AA'B'B$ für die eben genannten vier Punkte sicher gelten muß. Nun liegen M und N nach Postulat III auf verschiedenen Strecken AA'. Dabei kann man, da die Rolle der Punkte M und N nachträglich sich noch vertauschen ließe, zunächst annehmen, daß M der Punkt sei, der auf derjenigen Strecke AA' gelegen ist, die B und B' nicht enthält. Man kommt dann (Satz 6)) auf die zyklische Ordnung $AMA'BB'$ oder $AMA'B'B$. Weil ferner die Punkte M und N auch auf verschiedenen Strecken BB' gelegen sind, so ergibt sich entweder $AMA'BNB'$ oder $AMA'B'NB$ als eine richtige zyklische Ordnung der sechs Punkte. Relativ zum Fluchtpunkt M ergibt sich also die — nicht zyklische — Anordnung $A'BB'A$ oder die Anordnung $A'B'BA$ der vier Punkte unter sich. Vertauscht man aber vorher die Buchstaben M und N, so ergibt sich nachher in bezug auf M als Fluchtpunkt die Ordnung $B'AA'B$ oder $BAA'B'$. Unter allen Umständen ergibt sich also der Satz 12) als richtig (man vergleiche den Schluß von § 4).

Bedeutet jetzt

13) $$A_1, A_2, A_3, \cdots$$

eine Anordnung, in der die Punkte A in bezug auf M als Fluchtpunkt liegen, und ist N ein von M verschiedener Punkt, so ergibt die harmonische Spiegelung der Reihe 13) in bezug auf M und N eine neue Reihe

14) $$A_1', A_2', A_3', \cdots$$

In der Reihe 13) liegt nun (§ 4) in bezug auf M als Fluchtpunkt jeder Punkt auf derselben Seite jedes in dieser Reihe nachfolgenden Punktes, und es muß sich dies nach Satz 12) auf die Reihe 14) in der Weise übertragen (§ 4), daß hier jeder Punkt auf der umgekehrten Seite eines nachfolgenden Punktes liegt, wie ein Punkt von 13) zu einem ihm in seiner Reihe nachfolgenden. Das Resultat bleibt bestehen, wenn der Punkt N selbst in der Reihe 13) vorkommt. Man erhält also:

15) *Sind M und N zwei verschiedene Punkte, und wird M als Fluchtpunkt angenommen, so spiegelt sich eine in Beziehung auf den Fluchtpunkt der Lage nach geordnete Folge von Punkten harmonisch in bezug auf M und N in eine ebenfalls in bezug auf M geordnete Folge. Die beiden Folgen sind ungleichartig.*

Es sei nun ein System von Punkten gegeben, in das jetzt die beiden verschiedenen Punkte M und N aufgenommen worden sind, und es sollen die sämtlichen Punkte in der zyklischen Ordnung

16) $$M, A_1, A_2, \cdots A_k, N, B_1, B_2, \cdots B_l$$

gelegen sein. Durch harmonische Spiegelung in bezug auf M und N sollen aus den Punkten 16) respektive die Punkte

17) $$M, A_1', A_2', \cdots A_k', N, B_1', B_2', \cdots B_l'$$

hervorgehen. Da nun A_1 und A_1' auf verschiedenen Strecken MN liegen, und für A_2 und A_2', für A_3 und A_3' usw., ebenso für B_1 und B_1' usw. dasselbe gilt, da ferner $A_1, A_2, \cdots A_k$ auf der einen, $B_1, B_2, \cdots B_l$ auf der anderen Strecke MN sich befinden (Satz 7)), so liegen $A_1', A_2', \cdots A_k'$ alle auf einer und derselben Strecke MN, und $B_1', B_2', \cdots B_l'$ auf der Ergänzungsstrecke. Aus der zyklischen Ordnung 16) ergibt sich nach 7), daß die Punkte $MA_1A_2 \cdots A_kN$ unter sich in der zyklischen Ordnung, in der sie aufgeführt worden sind, liegen. Somit sind auch $A_1A_2 \cdots A_kN$ in bezug auf den Fluchtpunkt M in der eben genannten — nicht zyklischen — Ordnung gelegen (§ 4). Nach 15) liegen also auch $A_1', A_2', A_3', \cdots, A_k', N$ in der Ordnung, in der sie eben aufgeführt worden sind in bezug auf denselben Fluchtpunkt M, und es gilt deshalb die zyklische Ordnung $MA_1'A_2' \cdots A_k'N$ für die Lage der in ihr aufgeführten Punkte. Ebenso wird bewiesen, daß die Punkte $NB_1'B_2' \cdots B_l'M$ unter sich in der soeben genannten zyklischen Ordnung liegen. Mit Rücksicht darauf, daß die Punkte A' auf der Strecke MN liegen, die die Punkte B' nicht enthält, ergibt sich aus den beiden zyklischen Ordnungen

$$MA_1'A_2' \cdots A_k'N \quad \text{und} \quad NB_1'B_2' \cdots B_l'M$$

nach 8), daß die Punkte M und N mit den sämtlichen Punkten A' und B' in dem Zyklus

$$MA_1'A_2'\cdots A_k'NB_1'B_2'\cdots B_l'$$

gelegen sind.*) D. h. also:

18) *Werden in Beziehung auf zwei verschiedene Punkte irgend welche n Punkte harmonisch gespiegelt, so ergeben die beiden zyklischen Ordnungen der n Punkte die zyklischen Ordnungen, in der die Spiegelpunkte liegen.*

Zeichnet man noch einen von den Punkten 16) und den entsprechenden von 17) als Fluchtpunkte aus, so läßt sich das Resultat auch in folgender Form aussprechen:

19) *Spiegelt man irgend welche Punkte und irgend einen von ihnen verschiedenen Fluchtpunkt harmonisch in bezug auf irgend zwei voneinander verschiedene Punkte, so liegen die Spiegelpunkte jener Punkte in Beziehung auf den Spiegelpunkt des Fluchtpunktes in der entsprechenden Ordnung, wie jene Punkte selbst in Beziehung auf den Fluchtpunkt selbst.*

§ 8.

Bemerkungen zu dem Hilfssatz von Darboux.

Hieran schließen sich unmittelbar einige Bemerkungen, die den schon erwähnten Satz von Darboux**) betreffen. Der Beweis dieses Satzes, der nicht auf den bis jetzt eingeführten Postulaten I bis VI, sondern auf den Postulaten I bis IV und dem hier erst später eingeführten Stetigkeitsaxiom (§ 12) beruht, soll nicht ausführlich wiedergegeben werden. Der Satz besagt, daß zu vier verschiedenen Punkten P, Q, P', Q', die so beschaffen sind, daß die Paare PQ und $P'Q'$ sich nicht trennen, stets zwei Punkte gefunden werden können, die sowohl von P und Q, als von P' und Q' harmonisch getrennt sind. Die Bezeichnung der vier Punkte soll so gewählt sein, daß sie im Zyklus $P'PQQ'$ liegen. Der Grundgedanke der Darbouxschen Beweisführung beruht nun darauf, daß zu einem Punkt X' der Strecke $P'Q'$, der P und Q angehören, ein zugeordneter Punkt Y so gesucht wird, daß $X'Y$ mit $P'Q'$ harmonisch ist. Dieser Punkt Y liegt dann in der Ergänzungsstrecke $P'Q'$, in der P und Q nicht gelegen sind. Nachher wird X so bestimmt, daß XY mit PQ harmonisch ist. X muß dann in der Strecke PQ liegen, die P' und Q' nicht enthält. Nunmehr macht Darboux von der Vorstellung der Bewegung Gebrauch. Indem X' immer in derselben Richtung von P' über P und Q nach Q' sich bewegt, bewegt sich X in der gleichen Richtung und durchläuft einen Teil der vorhin

*) Es ließe sich dabei zeigen, daß die beiden zyklischen Anordnungen 16) und 17) ungleichartig sind; man vergl. S. 178 Anm.

**) Mathematische Annalen Bd. 17, S. 58.

genannten Strecke PQ, weshalb schließlich X von X' überholt wird. Daraus wird geschlossen, daß X' an mindestens einer Stelle in dem genannten Teil der Strecke PQ mit X zusammenfällt. Damit ist dann der Beweis für die Existenz eines Paares von Punkten erbracht, die voneinander und von P, Q, P', Q' verschieden sind und zugleich so, daß das Paar sowohl mit PQ als mit $P'Q'$ harmonisch ist. Diesen Beweis hat Enriques ohne die Vorstellung der Bewegung auf Grund des Stetigkeitsaxioms geführt. Enriques hat nämlich gezeigt, daß zwei Strecken, von denen die eine in der anderen enthalten ist, und deren Punkte ein-eindeutig aufeinander bezogen sind, einen Punkt entsprechend gemein haben müssen unter der Bedingung, daß der stetigen Folge der Punkte der einen Strecke die Punkte der anderen Strecke in gleichfalls der Lage nach geordneter Weise und zwar in unserem Fall in der Erstreckung nach derselben Richtung entsprechen.*) Für Enriques folgt dann, daß die eben ausgesprochene Bedingung in dem vorliegenden Fall für die Strecke $P'Q'$ und einen Teil der Strecke PQ bei der Zuordnung von X zu X' erfüllt ist, daraus, daß auf jeder Geraden zwei „natürliche", zyklische Anordnungen für die Gesamtheit aller Punkte existieren, und daß jede dieser zyklischen Anordnungen bei der Projektion auf irgendeine andere Gerade eine der natürlichen zyklischen Anordnungen dieser ergibt. Wir würden hier folgendermaßen zu schließen haben. Die harmonische Spiegelung der Punkte P' und Q' in bezug auf die Punkte P und Q ergebe die Punkte P_0 und Q_0; es liegen dann diese beiden Punkte in der Strecke PQ, die P' und Q' nicht enthält, und da zugleich der Zyklus $PP'Q'Q$ in PP_0Q_0Q gespiegelt, und somit nach Satz 18) durch PP_0Q_0Q auch ein wirklicher Zyklus dargestellt wird, so ergibt sich nach 8) die zyklische Anordnung

20) $$QQ'P'PP_0Q_0.$$

Denkt man sich jetzt zwei verschiedene Lagen X_1' und X_2' des Punktes X', denen die Lagen Y_1 und Y_2 von Y, und die Lagen X_1 und X_2 von X entsprechen, so liegen Y_1 und Y_2 beide in der Strecke $P'Q'$, die P und Q nicht enthält (s. o.). Man kann also die Bezeichnung so einrichten, daß die Punkte

21) $$P'Y_1Y_2Q'$$

in dem Zyklus, in dem sie soeben genannt worden sind, liegen. Da nun der Zyklus 20) umgekehrt in der Folge $Q'QQ_0P_0PP'$ gelesen werden kann, so ergibt sich daraus und aus 21) nach Satz 8), daß

22) $$Q'QQ_0P_0PP'Y_1Y_2$$

---

*) Vergl. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 27, 1894, p. 562 und 563.

ein wirklicher, den Lagen der Punkte entsprechender Zyklus ist. Aus diesem nehme man nun die Punkte

23) $$P P' Y_1 Y_2 Q',$$

die gleichfalls unter sich so im Zyklus liegen (vgl. 7)), heraus. Wird jetzt der Zyklus 21) harmonisch in Beziehung auf P und Q gespiegelt, so muß sich nach 18) ein wirklicher Zyklus ergeben und dieser ist

24) $$P P_0 X_1 X_2 Q_0.$$

Es sind somit die Punkte X_1 und X_2 in der Strecke $P_0 Q_0$, die P nicht enthält, gelegen (Satz 7)), und dies ist wegen des Zyklus 22) die Strecke $P_0 Q_0$, die keinen der Punkte P, P', Y_1, Y_2, Q', Q enthält. Daraus aber, wie aus dem Zyklus 22) und dem in 24) enthaltenen Zyklus $Q_0 X_2 X_1 P_0$, folgt nach Satz 8) die Richtigkeit der zyklischen Anordnung

25) $$Q_0 X_2 X_1 P_0 P P' Y_1 Y_2 Q' Q.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man Q' zum Fluchtpunkt nimmt (§ 4), die — nicht zyklische — Ordnung $Q Q_0 X_2 X_1 P_0 P P' Y_1 Y_2$, und es ist ersichtlich, daß in Beziehung auf diesen Fluchtpunkt X_2 auf der umgekehrten Seite von X_1 liegt, wie Y_2 von Y_1. Dieses Resultat bleibt auch bestehen, wenn die Indizes 1 und 2 unter die beiden Punkte Y nicht so, wie am Anfang angegeben war, sondern in umgekehrter Weise verteilt werden; es können deshalb jetzt auch X_1 und X_2 irgend zwei Punkte der Strecke $P_0 Q_0$, die Q' nicht enthält, vorstellen. Spiegelt man jetzt Y_1 und Y_2 harmonisch in bezug auf P' und Q', so erhält man X_1' und X_2', und es liegt nach 12) in Beziehung auf unseren Fluchtpunkt Q' der Punkt X_2' auf der umgekehrten Seite von X_1', wie Y_2 von Y_1. Infolgedessen ist X_2' auf derselben Seite von X_1', wie X_2 von X_1 gelegen. Da nun X alle Lagen in der Strecke $P_0 Q_0$, die den Fluchtpunkt nicht enthält, und X' alle Lagen in der den Fluchtpunkt nicht enthaltenden Strecke $P' Q'$ annimmt, so ist eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Strecke $P' Q'$ und der in ihr enthaltenen Strecke $P_0 Q_0$ gegeben. Nennt man einen Punkt einem zweiten vorangehend, den zweiten dem ersten folgend, wenn in bezug auf den Fluchtpunkt Q' der erste Punkt auf derselben Seite des zweiten liegt, wie P_0 von Q_0, so entspricht ein Punkt von $P_0 Q_0$ und ein ihm folgender Punkt derselben Strecke einem Punkt von $P' Q'$ und einem darauf folgenden Punkt dieser Strecke $P' Q'$. Damit ist der Ausgangspunkt der Enriquesschen Beweisführung gewonnen. Da nun hier abgesehen von den auf den Postulaten I und II beruhenden allgemeinen Anordnungstatsachen und der Stetigkeit nur die Resultate des letzten Paragraphen benutzt worden sind, die bloß auf den Postulaten I bis IV beruhen, so *ist der Satz von Darboux eine Konsequenz aus diesen Postulaten und dem Stetigkeitsaxiom allein.*

§ 9.
Harmonische Punktfolgen.

In diesem Paragraphen und in den beiden folgenden wird wieder ganz vom Stetigkeitsaxiom (Postulat VII) abgesehen.

Eine Reihe von Punkten

26) $$\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$$

soll eine *harmonische Punktfolge* heißen *in Beziehung auf den Fluchtpunkt F*, wenn zwei aufeinanderfolgende Punkte der Reihe existieren, die voneinander und von F verschieden sind, und wenn allgemein für $k \gtreqless 0$ gilt, daß in bezug auf den Fluchtpunkt F der Punkt A_k der harmonische Mittelpunkt von A_{k-1} und A_{k+1} ist (vgl. § 6). Eine solche Punktfolge kann auf beiden Seiten abbrechen oder auf einer oder auch auf beiden Seiten ins Unendliche ausgedehnt sein. Kehrt man in einer harmonischen Folge die Ordnung, in der die Punkte aufgeführt sind, um, so erhält man eine für denselben Fluchtpunkt harmonische Folge. Weiß man nun z. B., daß A_0 und A_1 voneinander und von F verschieden sind, so ist nach III auch A_2 von diesen Punkten verschieden, und es liegt, immer in bezug auf F als Fluchtpunkt, A_1 „zwischen" A_0 und A_2 (§ 4). Ebenso liegt A_2 zwischen A_1 und A_3 usw., A_0 zwischen A_1 und A_{-1} usw. Es ergibt sich hieraus nach § 4, S. 177, daß alle Punkte der harmonischen Folge voneinander*) und vom Fluchtpunkt verschieden sind, daß sie in Beziehung auf den Fluchtpunkt in der Ordnung liegen (§ 4), in der sie aufgeführt worden sind, daß $A_k, A_{k+1}, A_{k+2} \cdots$ sämtlich auf derselben Strecke A_kF gelegen sind, und *die ganze auf beiden Seiten ins Unendliche ausgedehnte Folge durch den Fluchtpunkt und durch irgend zwei aufeinanderfolgende ihrer Punkte bestimmt ist.*

Es muß nun folgender Satz bewiesen werden**):

27) *Bedeutet k eine beliebige ganze Zahl* $\gtreqless 0$, *und l eine beliebige positive ganze Zahl, so ist in der harmonischen Folge* $\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$, *die sich auf den Fluchtpunkt F bezieht, allgemein der Punkt* A_k *in bezug auf F der harmonische Mittelpunkt von* A_{k-l} *und* A_{k+l}.

---

*) Daß eine harmonische Folge sich schließen kann, wenn man die räumlichen Axiome der Verknüpfung, aber nicht die der Anordnung annimmt, hat zuerst G. Fano gezeigt (Giorn. d. Mat. vol. XXX, p. 119 ff.).

**) Der Beweis beruht hier auf dem Satz 11), d. h. also auf dem postulierten Schließungssatz VI. In anderen Darstellungen der Theorie werden naturgemäßerweise die Tatsachen der Ebene benutzt; man vergl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 1. Bd. 1893, S. 110 g, wo ein vollständiger Beweis gegeben

Zum Beweis bezeichne man allgemein mit A'_{k+l} einen solchen Punkt, für den A_k der harmonische Mittelpunkt ist von A_{k-l} und A'_{k+l}, immer in bezug auf denselben einen Punkt F, der von Anfang an zum Fluchtpunkt gewählt war. Es ist nun unmittelbar ersichtlich, daß A'_{k+0} mit A_k, und A'_{k+1} mit A_{k+1} zusammenfällt. Da nun für den Fluchtpunkt F die Paare A_kA_k, $A_{k-1}A_{k+1}$, $A_{k-2}A'_{k+2}$ denselben Mittelpunkt A_k haben, und zugleich A_{k-1} der Mittelpunkt von A_k und A_{k-2} ist, so ist nach 11) auch A_{k+1} der Mittelpunkt von A_k und A'_{k+2}. Nun ist aber auch A_{k+1} der Mittelpunkt von A_k und A_{k+2}, und es muß somit, da nach III zu drei verschiedenen Punkten, die in bestimmter Ordnung gegeben sind, nur ein vierter harmonischer existiert, A'_{k+2} mit A_{k+2} zusammenfallen. Es ist also A_k der harmonische Mittelpunkt von A_{k-2} und A_{k+2}. Betrachtet man nun ebenso die Paare $A_{k-1}A_{k+1}$, $A_{k-2}A_{k+2}$, $A_{k-3}A'_{k+3}$, von denen wieder jedes den harmonischen Mittelpunkt A_k hat, so ergibt sich auf dieselbe Weise, daß A'_{k+3} mit A_{k+3} zusammenfällt, und deshalb A_k der Mittelpunkt von A_{k-3} und A_{k+3} ist. Indem man so fortfährt, zeigt man, daß allgemein A'_{k+l} und A_{k+l} identisch, und deshalb für den Fluchtpunkt F der Punkt A_k der harmonische Mittelpunkt von A_{k-l} und A_{k+l} ist, w. z. b. w.

Nun ergibt sich unmittelbar noch der Satz:

28) *Ist in bezug auf den Fluchtpunkt F die Folge* $\cdots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\cdots$ *eine harmonische, so gilt dies auch von der Folge* $\cdots A_{k-2l}A_{k-l}A_kA_{k+l}A_{k+2l}\cdots$ *in Beziehung auf denselben Fluchtpunkt. Dabei bedeutet k eine beliebige ganze Zahl* ($k \gtreqless 0$), *und l eine positive von Null verschiedene Zahl.*

Die harmonische Folge $\cdots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\cdots$ soll nun samt ihrem Fluchtpunkt F in Beziehung auf zwei Punkte M und N, die natürlich voneinander verschieden sein müssen, harmonisch gespiegelt werden, wodurch der Punkt F' und die Folge $\cdots A'_{-2}A'_{-1}A_0'A_1'A_2'\cdots$ entstehen mag. Es sind dann nach 12) die Punkte dieser Folge voneinander und von F' verschieden. Da ferner in bezug auf F der Punkt A_k der harmonische Mittelpunkt von A_{k-1} und A_{k+1} ist, läßt sich aus dem Schließungssatz (Postulat VI) unmittelbar ersehen, daß A'_k der harmonische Mittelpunkt von A'_{k-1} und A'_{k+1} ist in Beziehung auf den Fluchtpunkt F'; somit ist

---

ist, ferner Lindemann-Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, 2. Bd., 1. Teil, 1891, S. 436 bis 441, und Klein, Nichteuklidische Geometrie I, autogr. Vorl. 1889—1890, 2. Abdruck 1893, S. 351, 352, in welchen Werken nur der Fall $l = 2$, beziehungsweise noch $l = 3$, behandelt ist, weiter Amodeo, Atti della R. Acc. d. Sc. di Torino, 26. Bd. 1890—1891, S. 756, 757. Der Beweis von de Paolis (a. a. O. p. 496) macht vom Fundamentalsatz Gebrauch; auch benutzt er noch die Involution oder vielmehr die Tatsache, daß A, B, C, D harmonische Punkte sind, wenn $ABCD \barwedge ADCB$.

für diesen Fluchtpunkt die Folge $\cdots A'_{-2} A'_{-1} A_0' A_1' A_2' \cdots$ eine harmonische, und es ergibt sich:

29) *Jede harmonische Folge spiegelt sich harmonisch in Beziehung auf irgend zwei verschiedene Punkte M und N in eine gleichfalls harmonische Folge, und zwar ist der Fluchtpunkt der zweiten Folge der Spiegelpunkt des ersten Fluchtpunkts in bezug auf M und N.*

§ 10.

Hilfssatz von den harmonischen Folgen.

Es soll jetzt ein Hilfssatz aufgestellt werden, bei dessen Beweis das Postulat V eine Rolle spielt. Dieses Postulat wird vorher in eine andere Form gebracht. Es waren in V drei Punkte A, B, C gedacht, die voneinander und vom Punkt D verschieden waren, und es war in Beziehung auf D als Fluchtpunkt der Punkt B der harmonische Mittelpunkt von A und C. Ferner waren noch B' und C' so gedacht, daß, wieder in bezug auf D als Fluchtpunkt, der Punkt B' der harmonische Mittelpunkt war von A und C'. Nun soll auch in bezug auf D als Fluchtpunkt die Ordnung der anderen Punkte betrachtet werden. Machen wir jetzt zuerst die Annahme, daß B und B' auf entgegengesetzten Seiten von A liegen, womit auch gesagt sein soll, daß B' von A und vom Fluchtpunkt verschieden ist, so ergibt sich mit Hilfe des Postulats III die Ordnung $C'B'ABC$ (vgl. § 4). Man erkennt aus dieser Ordnung, daß auf Grund der gemachten Annahmen das Postulat V (S. 182) schon aus den anderen (I, II, III) folgt, und somit dieses Postulat, in dem Fall, daß B und B' zu verschiedenen Seiten von A liegen, keinen wesentlichen Inhalt besitzt. Ferner erkennt man, daß C' auf derselben Seite von C wie B' von B gelegen ist.

Wir verfolgen jetzt die andere Annahme, daß B und B' auf derselben Seite von A gelegen sind. Es zeigt sich, daß dann die Punkte B, C, B', C' alle auf der gleichen Seite von A liegen. Es liegen daher auch z. B. C und C', wenn sie verschieden sind, so, daß entweder C' zwischen A und C, oder C zwischen A und C' gelegen ist (§ 4). Die Aussage des Postulats V kann daher jetzt so formuliert werden, daß, wenn B' von B, und somit auch C' von C verschieden ist, von zwei Fällen einer eintreten muß: entweder es liegt B' zwischen A und B, und zugleich C' zwischen A und C, oder es liegt B zwischen A und B', und zugleich C zwischen A und C'. Wir wollen die Ordnung aller Punkte für den ersten Fall herstellen. Man kann diese Ordnung unter allen Umständen mit A beginnen lassen. Zählt man jetzt die Ordnungen, die nach den gemachten Angaben möglich sind, kombinatorisch auf, so erhält man $AB'BC'C$ oder $AB'C'BC$, oder es fällt

C' mit B zusammen, wobei dann die anderen Punkte wieder in der Ordnung $AB'BC$ liegen. Es ergibt sich also immer die Tatsache, daß C auf derselben Seite von C liegt, wie B' von B (§ 4). Dieselbe Tatsache ergibt sich aber auf analoge Weise in dem zweiten Fall.

Die eben gefundene Tatsache hatte sich auch früher unter der ersten Annahme ergeben und sie besteht auch, wenn B' mit A zusammenfällt, oder wenn jetzt zugelassen wird, daß B mit A zusammenfallen kann. Man findet somit als neue Fassung des Postulats V:

30) *Der harmonische Mittelpunkt von A und C liegt auf derselben Seite von dem harmonischen Mittelpunkt von A und C', wie C von C', es sei denn, daß die beiden Mittelpunkte zusammenfallen, was dann und nur dann geschieht, wenn C' mit C zusammenfällt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die harmonischen Mittelpunkte sich auf den Punkt als Fluchtpunkt beziehen, in bezug auf den die Ordnung der Punkte betrachtet wird, und daß die anderen Punkte alle vom Fluchtpunkt verschieden sind.*

Nunmehr kann der folgende **Hilfssatz von den harmonischen Folgen** bewiesen werden:

31) *Es seien* $\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$ *und* $\cdots B_{-2} B_{-1} A_0 B_1 B_2 \cdots$ *zwei für denselben Fluchtpunkt F harmonische Folgen, und es sei in Beziehung auf den Fluchtpunkt F der Punkt B_1 zwischen A_0 und A_1 gelegen, so liegt auch allgemein für jede positive oder negative ganze Zahl k der Punkt B_k zwischen A_0 und A_k.*

Nach § 9 liegen die Punkte $A_1, A_2, \cdots,$ immer in bezug auf F als Fluchtpunkt, auf einer und derselben Seite von A_0, und ebenso auch $B_1, B_2, \cdots$ untereinander auf der gleichen Seite von A_0, weshalb, da B_1 zwischen A_0 und A_1 angenommen ist, alle Punkte $A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ auf derselben Seite von A_0 gelegen sind. Wir wollen diese Seite die positive nennen. Für A_k und B_k besteht nun, wenn sie verschieden sind, mit A_0 zusammen die Ordnung $A_0 B_k A_k$ oder die Ordnung $A_0 A_k B_k$ (§ 4), und es liegt also B_k zwischen A_0 und A_k, oder A_k zwischen A_0 und B_k, je nachdem B_k auf der negativen oder positiven Seite von A_k liegt. Somit ist für die positiven ganzen Zahlen k das zu Beweisende damit gleichbedeutend, daß B_k auf der negativen Seite von A_k liegt, womit auch gesagt ist, daß B_k von A_k verschieden ist. Nun ist B_1 vorausgesetztermaßen zwischen A_0 und A_1 gelegen, und es liegt also B_1 auf der negativen Seite von A_1. Es ist aber B_1 der harmonische Mittelpunkt von A_0 und B_2, wobei unser Punkt F wieder den Fluchtpunkt vorstellt, und A_1 ist der harmonische Mittelpunkt von A_0 und A_2. Es ergibt sich also aus der neuen Fassung des Postulats V, d. h. aus 30), daß B_2 auf der negativen Seite von A_2 gelegen ist. Um nun dieses Resultat zu verallgemeinern, setzen wir einmal voraus, es sei für alle positiven ganzen Zahlen k, die kleiner oder gleich

2ν sind, wobei ν eine bestimmte positive ganze Zahl bedeutet, bereits bewiesen, daß B_k auf der negativen Seite von A_k liegt. Unter dieser Voraussetzung kann gezeigt werden, daß dasselbe auch für $k = 2\nu + 1$ und für $k = 2\nu + 2$ gilt.

Der Beweis für $k = 2\nu + 2$ wird zuerst geführt. Da $\nu \geqq 1$ zu denken ist, hat man $\nu + 1 \leqq 2\nu$. Es ist also als bereits bewiesen anzusehen, daß $B_{\nu+1}$ auf der negativen Seite von $A_{\nu+1}$ liegt. Nun ist nach Satz 27) der Punkt $B_{\nu+1}$ der harmonische Mittelpunkt von A_0 und $B_{2\nu+2}$, und der Punkt $A_{\nu+1}$ der Mittelpunkt von A_0 und $A_{2\nu+2}$. Es muß also nach 30) auch $B_{2\nu+2}$ von $A_{2\nu+2}$ verschieden und zwar auf der negativen Seite von $A_{2\nu+2}$ gelegen sein.

Der Beweis für $k = 2\nu + 1$ soll durch die Figur 2 anschaulich gemacht werden, die aber nicht als Beweismittel angesehen werden darf und die eine mögliche, aber nicht in allen Stücken notwendige Anordnung der

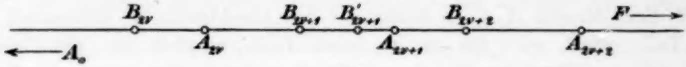


Fig. 2.

Punkte darstellt. Wir führen den harmonischen Mittelpunkt von $A_{2\nu+2}$ und $B_{2\nu}$ ein, der $B'_{2\nu+1}$ heißen soll. Der Mittelpunkt von $A_{2\nu+2}$ und $A_{2\nu}$ ist der Punkt $A_{2\nu+1}$. Es muß also nach 30) der Punkt $B'_{2\nu+1}$ auf derselben Seite von $A_{2\nu+1}$ liegen, wie $B_{2\nu}$ von $A_{2\nu}$; das ist aber, wie wir vorausgesetzt haben, die negative Seite. Ferner muß, wieder nach 30), der harmonische Mittelpunkt $B_{2\nu+1}$ von $B_{2\nu}$ und $B_{2\nu+2}$ auf der negativen Seite liegen von dem Mittelpunkt $B'_{2\nu+1}$ von $B_{2\nu}$ uud $A_{2\nu+2}$, da ja oben $B_{2\nu+2}$ als auf der negativen Seite von $A_{2\nu+2}$ gelegen nachgewiesen wurde. Es liegt somit $B_{2\nu+1}$ auf der negativen Seite von $B'_{2\nu+1}$, und dieser Punkt auf der negativen Seite von $A_{2\nu+1}$, also auch $B_{2\nu+1}$ auf der negativen Seite von $A_{2\nu+1}$ (vgl. § 4).

Es ist jetzt bewiesen, daß für alle positiven $k \leqq 2\nu + 2$ der Punkt B_k auf der negativen Seite von A_k liegt, vorausgesetzt, daß dies für alle $k \leqq 2\nu$ bereits angenommen werden darf. Da die Tatsache aber für $k = 2$ bereits festgestellt ist, so gilt sie sicher für alle positiven ganzen Zahlen k. Für diese Zahlen liegt also auch (s. o.) allgemein B_k zwischen A_0 und A_k.

Nun ist sowohl das Paar $A_{-1}A_1$, als das Paar $B_{-1}B_1$ mit dem Paar A_0F harmonisch, weshalb nach Postulat IV die Punkte B_1 und B_{-1} auf derselben Strecke $A_{-1}A_1$ liegen müssen. Es liegt aber B_1 zwischen A_0 und A_1, also auch zwischen A_{-1} und A_1, d. h. auf der Strecke $A_{-1}A_1$, die F nicht enthält. Somit muß dies von B_{-1} auch gelten, und es liegt dieser Punkt, da er im Vergleich zu B_1 auf der entgegengesetzten Seite von A_0 gelegen ist, zwischen A_0 und A_{-1}. Nun gilt von den Folgen

$A_0A_{-1}A_{-2}\cdots$ und $A_0B_{-1}B_{-2}\cdots$ alles das, was in der vorigen Betrachtung von $A_0A_1A_2\cdots$ und $A_0B_1B_2\cdots$ gegolten hatte. Man kommt also durch die analoge Schlußweise zu dem Resultat, daß für $l>0$ der Punkt B_{-l} zwischen A_0 und A_{-l} liegt. Folglich gilt der Satz 31) allgemein, sowohl für einen positiven wie für einen negativen Index k.

§ 11.

Eindeutigkeit der harmonischen Teilung.

Sind drei verschiedene Punkte A_0, A_1 und F gegeben, und liegen zu ihnen die $n-1$ Punkte B', B'', $\cdots$, $B^{(n-1)}$ so, daß die Folge

$$A_0B'B''\cdots B^{(n-1)}A_1$$

für den Fluchtpunkt F harmonisch ist, so liegen die Punkte B alle auf der Strecke A_0A_1, die F nicht enthält (vgl. § 9 u. § 4), und wir sagen, daß diese Strecke A_0A_1 in bezug auf den Fluchtpunkt F *harmonisch in n Teile geteilt* sei. Ob es in jedem Falle möglich ist, die Punkte B', B'', $\cdots$, $B^{(n-1)}$ der Bedingung gemäß zu bestimmen, mag vorderhand dahingestellt sein; es läßt sich aber leicht der Satz einsehen:

32) *Die harmonische n-Teilung der den Punkt F nicht enthaltenden Strecke A_0A_1 in Beziehung auf F als Fluchtpunkt ist, falls sie überhaupt existiert, durch die Punkte A_0, A_1 und F und die Zahl n eindeutig bestimmt.*

Angenommen nämlich, es wäre eine zweite harmonische n-Teilung derselben Strecke für denselben Fluchtpunkt F durch die Punkte C', C'', $\cdots$, $C^{(n-1)}$ gegeben, so würde, da C' und B' beide auf der betrachteten Strecke A_0A_1, die F nicht enthält, liegen müßten, entweder C' zwischen A_0 und B', oder B' zwischen A_0 und C' gelegen sein, immer mit Bezug auf den Punkt F als Fluchtpunkt. Nun würde man den Satz 31) auf die Folgen $A_0B'B''\cdots$ und $A_0C'C''\cdots$ anwenden können, und es würde sich ergeben, daß entweder $C^{(n)}$ zwischen A_0 und $B^{(n)}$, oder $B^{(n)}$ zwischen A_0 und $C^{(n)}$ liegen müßte. Beides widerspricht aber, da $B^{(n)}$ und $C^{(n)}$ mit A_1 zusammenfallend zu denken sind, den ursprünglichen Voraussetzungen.*)

*) Der Beweis des Satzes 31) beruht auch auf dem Umstand (vergl. S. 193), daß in der harmonischen Folge $A_0A_1A_2A_3\cdots$ der Punkt $A_{\nu+1}$ der harmonische Mittelpunkt von A_0 und $A_{2\nu+2}$ ist; das wurde aber (vergl. den Beweis von Satz 27)) mit Hilfe des Schließungssatzes gezeigt. Dieser ist also hier vorausgesetzt.

Die Existenz der Teilung wird, wie schon bemerkt, später nachgewiesen werden. In solchen Untersuchungen, die unsere Theorie im Zusammenhang mit den Tatsachen der Ebene behandeln, ergibt sich die Existenz der harmonischen n-Teilung einer Strecke AB für den Fluchtpunkt F dadurch, daß man auf irgend einer Geraden

Nun ergibt sich noch:

33) *Wenn in einer auf den Fluchtpunkt F sich beziehenden harmonischen Folge* $\cdots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\cdots$ *die Strecken* $\cdots$, $A_{-2}A_{-1}$, $A_{-1}A_0$, A_0A_1, A_1A_2, $\cdots$, *die F nicht enthalten, alle in bezug auf F in die gleiche*

---

irgend eine harmonische Folge für irgend einen Punkt F' dieser Geraden als Fluchtpunkt konstruiert und dann, eventuell mehrmals, so projiziert, daß der erste Punkt der Folge in A, der $n+1^{te}$ in B, und F' in F übergeführt wird. Daß für dieselbe Zahl n nicht eine zweite Teilung derselben Strecke für denselben Fluchtpunkt vorhanden sein kann, ergibt sich dann aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Man vergleiche hierzu de Paolis a. a. O. p. 494, 495. De Paolis gibt nachher (Nr. 20) noch eine zweite Konstruktion, die lediglich auf dem Aufsuchen von vierten harmonischen Punkten beruht, und zeigt damit, daß die Teilpunkte dem aus A, B und F gebildeten allgemeinen harmonischen Punktsystem (vergl. hier § 14) angehören. Es wird aber die Übereinstimmung des bei dieser Konstruktion zuletzt erhaltenen Punktes mit dem ersten Teilpunkt der harmonischen n-Teilung und damit auch von neuem die eindeutige Bestimmtheit dieses Teilpunktes mit Hilfe eines Satzes von der Involution bewiesen. Da dieser Satz mit Hilfe des Fundamentalsatzes gezeigt wird, und de Paolis (a. a. O., vergl. den ersten Teil der Abhandlung) sich den Fundamentalsatz für die kontinuierliche Gerade formuliert denkt, so erscheint die Beweisführung zunächst als vom Stetigkeitsaxiom abhängig. Die Bemerkung von Fano (Giornale di Matematiche vol. 30, p. 127 Anm.), der zufolge die Betrachtung von de Paolis so gewendet werden kann, daß sie nur die von Fano benutzten Voraussetzungen erheischt, zu denen das Stetigkeitsaxiom nicht gehört, wird in § 30 (erste Anm.) besprochen werden.

Bei Amodeo (Atti della R. Accad. d. Sc. di Torino vol. XXVI, p. 757) wird die Eindeutigkeit der Teilung mit den Worten begründet: „Evidentemente il punto b_1 è unico; poichè ogni altra analoga costruzione può ricondursi per proiezione alla precedente." Hier muß also entweder auf den für die kontinuierliche Gerade geltenden oder auf einen spezieller formulierten Fundamentalsatz (vergl. § 36 dieser Arbeit, insbesondere Satz 118)) oder auf die hier in der ersten Anm. von § 30 genauer analysierte Schlußweise von Fano Bezug genommen werden.

Eine besondere Behandlung der harmonischen Teilung, die auch von den Tatsachen der Ebene ausgeht, findet sich bei F. Klein in den autographierten Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie I, ausgearbeitet von Schilling, 2. Abdruck 1893, S. 338 (1. Abdruck 1892). Es werden dort die ganzzahligen Punkte 0, 1, 2, $\cdots$ der Skala durch die Beziehung abgeleitet, die auch bei Killing (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 1. Bd., 1893, S. 107) wieder benutzt ist, daß die Geradenpaare $P0$, $O1$; $P1$, $O2$; $P2$, $O3$; $\cdots$ sich auf einer durch den Punkt ∞ der Skala gehenden Geraden schneiden, wenn die Punkte P und O in der Ebene der Skala außerhalb der Geraden der Skala mit dem Punkt ∞ in gerader Linie gewählt sind. Nachdem dann gezeigt worden ist, daß noch andere in der Figur auftretende Kreuzungspunkte sich in Geraden anordnen, werden für die Punkte $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ Konstruktionen gegeben. Für den Punkt $\frac{1}{3}$ wird allerdings, strenge genommen, nicht nachgewiesen, daß er seiner Zahlbezeichnung entspricht, d. h. daß eine harmonische Punktfolge, die den Punkt 0 zum ersten und diesen Punkt $\frac{1}{3}$ zum zweiten Punkt

Zahl n von Teilen harmonisch geteilt sind, so entsteht wieder eine für F als Fluchtpunkt harmonische Folge:

$$\cdots A_{-1} A'_{-1} A''_{-1} \cdots A_{-1}^{(n-1)} A_0 A'_0 A''_0 \cdots A_0^{(n-1)} A_1 A'_1 A''_1 \cdots A_1^{(n-1)} A_2 \cdots$$

Zum Beweis bezeichne man A_0 und A_0' gleichzeitig auch noch mit B_0 und B_0' und bestimme durch diese beiden Punkte eine Folge:

$$34)\quad \cdots B_{-1} B'_{-1} B''_{-1} \cdots B_{-1}^{(n-1)} B_0 B'_0 B''_0 \cdots B_0^{(n-1)} B_1 B'_1 B''_1 \cdots B_1^{(n-1)} B_2 \cdots$$

so, daß diese harmonisch ist. Da nun auch $A_0 A_0' A_0'' \cdots A_0^{(n-1)} A_1$ nach dem Begriff der harmonischen Teilung eine harmonische Folge ist und diese in ihren ersten beiden Punkten mit $B_0 B_0' B_0'' \cdots B_0^{(n-1)} B_1$ übereinstimmt, so ergibt sich zunächst das Zusammenfallen von B_1 mit A_1. Es ist aber nach 28) auch die aus 34) herausgehobene Folge

$$\cdots B_{-2} B_{-1} B_0 B_1 B_2 \cdots$$

eine in bezug auf den Fluchtpunkt F harmonische, und da diese Folge in den beiden aufeinanderfolgenden Punkten B_0, d. h. A_0, und B_1, d. h. A_1, mit der Folge $\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$ übereinstimmt, so fällt allgemein B_k mit A_k zusammen. Weil ferner sowohl die Punkte $B_k' B_k'' \cdots B_k^{(n-1)}$, als auch die Punkte $A_k' A_k'' \cdots A_k^{(n-1)}$ eine harmonische n-Teilung der Strecke $A_k A_{k+1}$, d. h. $B_k B_{k+1}$, die F nicht enthält, hervorbringen, so ist auch allgemein der Punkt $B_k^{(\nu)}$ mit $A_k^{(\nu)}$ identisch, d. h. es stimmt die in 33) genannte, durch Einschaltung hergestellte Folge mit 34) überein und ist somit harmonisch.*)

Daß die harmonische n-Teilung in jedem Fall existiert, wird sich im dritten Abschnitt in § 25 bis § 29 als eine bloße Folge der Postulate I bis VI ergeben. Ein anderer Beweis dieser Existenz, der aber noch das Stetigkeitsaxiom voraussetzt, ist in den Entwicklungen des zweiten Abschnitts (§ 16 bis § 18) enthalten.

---

hat, als vierten Punkt wieder den alten Punkt 1 erhält. Setzt man aber die Tatsache voraus, daß ein Punkt $\frac{1}{3}$ existiert, der eine harmonische Punktfolge der eben genannten Eigenschaft hervorbringt, so kann man die aus ihm sich ergebende Punktfolge $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \cdots$ an Stelle der ursprünglichen Skala $0, 1, 2, \cdots$ setzen und nun mit Hilfe der Tatsache, daß jene anderen Kreuzungspunkte sich in Geraden anordnen, beweisen, daß der Punkt $\frac{1}{3}$ sich wirklich durch die von Klein beschriebene Konstruktion ergeben muß, womit dann auch die Eindeutigkeit der Teilung bewiesen ist. Die Betrachtung wäre dann noch auf die allgemeine n-Teilung auszudehnen.

*) Vergl. auch de Paolis a. a. O., p. 496, Nr. 27.

§ 12.

Postulat der Stetigkeit. Existenz der Grenzpunkte.

Das Stetigkeitsaxiom, das wir hier einführen, das wir aber bei der zweiten Lösung unserer Aufgabe im dritten Abschnitt nicht von Anfang an benutzen werden, ist nichts anderes als die projektive Formulierung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms.*) Wir fassen das Axiom so:

Postulat VII (Stetigkeitsaxiom). *Sind die Punkte einer Strecke MN so in zwei Klassen eingeteilt, daß jeder Punkt der Strecke einer und nur einer der Klassen angehört, jede Klasse mindestens einen Punkt enthält, und für jeden Punkt A der ersten und jeden Punkt B der zweiten Klasse A und N in verschiedene Strecken MB fallen, so existiert in der Strecke MN ein Punkt X von der Art, daß die Strecke MX, die N nicht enthält, lauter Punkte der ersten, und die Strecke XN, die M nicht enthält, lauter Punkte der zweiten Klasse in sich schließt.*

Aus diesem Postulat kann die Existenz der beiden Grenzpunkte abgeleitet werden, die in der Geometrie dieselbe Rolle spielen, wie die Bolzano-Weierstraßsche obere und untere Grenze von Zahlgrößen in der Analysis. Es seien in einer Strecke MN Punkte Z, eventuell in unendlicher Zahl, definiert. Der einfacheren Ausdrucksweise wegen sei in der Ergänzungsstrecke der Strecke MN ein Punkt F gewählt, in bezug auf den als Fluchtpunkt die Worte „zwischen“, „Ordnung“ usw. überall, wo sie im folgenden vorkommen, zu verstehen sind (vgl. § 4). Man weise jetzt jeden Punkt A der Strecke MN einer ersten Klasse zu, wenn zwischen M und A kein Punkt Z liegt. Jeder Punkt B von MN, der die Eigenschaft hat, daß zwischen M und B ein Punkt Z gelegen ist, komme in die zweite Klasse; ein solcher Punkt B existiert auch immer. Würde nun für zwei Punkte A und B der ersten, beziehungsweise zweiten Klasse die Ordnung $MBAN$ bestehen, so würde, da es zwischen M und B einen Punkt Z gibt, auch die Ordnung $MZBAN$ bestehen (vgl. § 4); dies steht aber mit der Eigenschaft von A im Widerspruch. Somit muß die Ordnung $MABN$ gelten, d. h. es liegen stets A und N in verschiedenen Strecken MB. Falls also nicht etwa bloß Punkte der zweiten Klasse existieren, ist das Postulat VII anwendbar, und es muß in MN einen Punkt X geben, der die beiden Klassen trennt. Es ist nun leicht zu erkennen, daß *zwischen M und X kein Punkt Z liegen kann*, weil man sonst auf einen Punkt A, der der Ordnung $MZAX$ entspräche, geführt würde; das wäre aber mit der Eigenschaft der Punkte A im Widerspruch.

*) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872, S. 18.

Da ferner jeder solche Punkt, der zwischen X und N gewählt ist, zu den Punkten B gehören muß, so ergibt sich nach einiger Überlegung, daß *zwischen jedem solchen Punkt und X ein Punkt Z gelegen sein muß, es sei denn, daß X selbst zu den Punkten Z gehört.* Es hat also X die Eigenschaft eines Grenzpunkts und zwar ist X der Grenzpunkt der Punkte Z „auf der Seite von M". Gehören alle Punkte der Strecke der zweiten Klasse an, so ist M selbst der Grenzpunkt. Ebenso liegt gleichfalls ein Grenzpunkt „auf der Seite von N".

§ 13.

Satz vom Fluchtpunkt der harmonischen Folgen.

Nunmehr soll bewiesen werden:

35) **Satz vom Fluchtpunkt.***) *Eine auf den Fluchtpunkt F sich beziehende, ohne Ende fortgesetzte harmonische Folge $A_0 A_1 A_2 \cdots$ hat in einer Strecke FM, in der alle Punkte der Folge liegen, den Punkt F selbst zum einen Grenzpunkt.*

Der Beweis hierfür ist bereits von Killing geführt worden**); er mag der Vollständigkeit wegen hier noch einmal Platz finden. Dabei wird die *Existenz* eines Grenzpunkts vorausgesetzt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es wird das Stetigkeitsaxiom (Postulat VII) mit benutzt. Der Fluchtpunkt soll mit F bezeichnet werden. Wir brauchen nur den Fall zu betrachten (vgl. die Definition S. 189), in dem A_0, A_1 und F verschiedene Punkte sind; es sind in diesem Fall auch $A_0, A_1, A_2, \cdots$ und F lauter verschiedene Punkte (§ 9). Die Punkte unserer harmonischen Folge liegen in bezug auf F, auf welchen Punkt alle Angaben, die die Anordnung betreffen, zu beziehen sind, in der Ordnung, in der sie aufgeführt worden sind, und alle Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ liegen in derselben Strecke A_0F. Man nehme jetzt an, der Grenzpunkt dieser Punkte in der Strecke A_0F auf der Seite von F sei U, und es sei U von F selbst verschieden Dies

---

*) Vergl. S. 166, erste Anm.

**) Vergl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 1. Bd., 1893, S. 113 unten. In der Tat ist dies derselbe Beweis. Killing bezeichnet drei Punkte mit 0, 1, ∞ und zeigt, daß die Punkte, die dann die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^\nu}, \cdots$ erhalten, den Punkt 0 zum Grenzpunkt haben; vertauscht man aber die Punkte 0 und ∞, so erhalten die genannten Punkte die Zahlen $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^\nu, \cdots$, und ihr Grenzpunkt heißt jetzt ∞. Die bewiesene Tatsache bedeutet also dasselbe, wie daß die Punkte $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ oder, was wegen der bekannten Anordnungsverhältnisse (vergl. § 16) wiederum gleichbedeutend ist, daß die Punkte $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ den Punkt ∞ zum Grenzpunkt haben. Vergl. auch Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. Bd., 1. Teil, 1891, S. 436 und 446.

wäre auf einen Widerspruch hinauszuführen. Zunächst erkennt man, daß U mit keinem der Punkte A zusammenfallen kann. Nun sei V der von F durch A_0 und U harmonisch getrennte Punkt; man hat dann, in bezug auf F, die Ordnung $A_0 V U$. Da nach der Bedeutung von U zwischen U und irgend einem zwischen A_0 und U gelegenen Punkt Punkte A gefunden werden müssen, so kann man A_k zwischen V und U annehmen; man hat dann die Ordnung $A_0 V A_k U$. Da aber A_k der harmonische Mittelpunkt von A_0 und A_{2k} ist, und V soeben als harmonischer Mittelpunkt von A_0 und U bestimmt worden ist, so folgt aus dem Postulat V, beziehungsweise aus 30), mit Rücksicht darauf, daß V zwischen A_0 und A_k gelegen ist, daß U zwischen A_0 und A_{2k} liegen muß. Man hätte also die Ordnung $A_0 V A_k U A_{2k}$, was aber der Eigenschaft von U, Grenzpunkt zu sein, widerspricht. Es kann also U nicht von F verschieden sein, w. z. b. w.*)

Jetzt bilde man die nach beiden Seiten unbegrenzte Folge

$$\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots.$$

Da die Punkte $A_{-1} A_0 A_1 F$ harmonisch sind, so liegen A_{-1} und A_1 auf verschiedenen Strecken $A_0 F$, und man erkennt nun (vgl. § 9), daß die eine — erste — Strecke $A_0 F$ die Punkte A_1, A_2, A_3, $\cdots$, die andere Strecke $A_0 F$ die Punkte A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, $\cdots$ sämtlich enthält. Liegt nun M z. B. auf der ersten Strecke $A_0 F$, so enthält nach dem eben Bewiesenen die Strecke FM, die A_0 nicht enthält, Punkte A mit positivem Index. Die Strecke FM, die A_0 enthält, schließt aber nach Postulat II die Strecke FA_0, die M nicht enthält, d. h. die zweite Strecke FA_0, in sich und enthält deshalb alle die Punkte A, die einen negativen Index besitzen. Man erkennt so schließlich, daß der Fluchtpunktssatz in die Form gebracht werden kann:

36) *Eine nach beiden Seiten unbegrenzte, auf den Fluchtpunkt F sich beziehende harmonische Folge* $\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$ *hat in jeder Strecke FM Punkte.*

---

*) Wie schon oben gesagt worden ist, hat auch Pasch (a. a. O. S. 125, 126) einen Beweis des Satzes vom Fluchtpunkt angegeben, der auf dem Stetigkeitsaxiom beruht; dabei benutzt Pasch seinen Begriff der Äquivalenz von Strecken (a. a. O., S. 121—123), der sich aus den projektiv gefaßten Axiomen der Verknüpfung und Anordnung des Raumes ableiten läßt, über dessen Eigenschaften wir aber im Zusammenhang der vorliegenden Arbeit an dieser Stelle nicht verfügen. Pasch nennt zwei Strecken AB und $A'B'$ dann äquivalent, wenn in bezug auf den gewählten Fluchtpunkt (Grenzpunkt) der harmonische Mittelpunkt von A und B' mit dem harmonischen Mittelpunkt von A' und B zusammenfällt. Diesen Äquivalenzbegriff benutzt auch Balser (Mathematische Annalen Bd. 55, S. 296 ff.).

§ 14.

Allgemeines harmonisches Punktsystem. Dichtigkeit. Beweis von Zeuthen und Lüroth.

Man bilde jetzt ein Punktsystem auf folgende Weise. Es werden drei verschiedene Punkte A, B, C angenommen; dann fügt man einen vierten hinzu, der aus den angenommenen bei irgend einer Anordnung als vierter harmonischer entsteht; nachher fügt man wieder einen Punkt hinzu, der aus irgend welchen dreien der schon vorhandenen Punkte sich auf irgend eine Weise als vierter harmonischer Punkt bestimmt, dann irgend einen vierten harmonischen Punkt aus irgend welchen dreien der jetzt vorhandenen Punkte u. s. f. Jeder Punkt, der auf diese Weise durch irgend eine Zahl von Operationen erhalten werden kann, gehört zu dem Punktsystem, das definiert werden soll und das als *allgemeines harmonisches Punktsystem* bezeichnet werden mag. Eine andere Art von Punktsystemen, die der dyadisch harmonischen, wird nachher angegeben werden.

Es sei A_0 irgend ein Punkt des allgemeinen harmonischen Punktsystems; es kann nun auch mit A_0 als Fluchtpunkt eine harmonische Folge gebildet werden, in der zwei andere Punkte unseres Systems als aufeinanderfolgende enthalten sind. Man erkennt leicht, daß diese Folge mit allen ihren Punkten dem System angehört. Daraus folgt, daß das System jedenfalls unendlich viele verschiedene Punkte enthält, und mit Rücksicht auf den in der Form 36) gefaßten Fluchtpunktssatz, daß in jeder Strecke A_0N Punkte des Systems vorhanden sein müssen. Dasselbe läßt sich auch bei dem nachher zu behandelnden dyadisch harmonischen Punktsystem einsehen. Es folgt aber hieraus zunächst für keines der Systeme, daß in *jeder beliebigen* Strecke MN der Geraden Punkte des Systems sich finden.*)

Lüroth und Zeuthen haben aber den Satz gezeigt:

37) *Jedes allgemeine harmonische Punktsystem besitzt in jeder Strecke mindestens einen Punkt, d. h. es ist in der Geraden „überalldicht“.***)

---

*) Balser (a. a. O. S. 299) konnte das Resultat mit Hilfe des Paschschen Begriffs der Streckenäquivalenz (vergl. die Anm. S. 199) auf *jede beliebige* Strecke MN übertragen. Dagegen sind die Entwicklungen von Killing (a. a. O. S. 113) und Lindemann (a. a. O. S. 446) insofern unvollständig, als sie die Tatsache, daß ein dyadisch harmonisches Punktsystem in jeder Strecke Punkte besitzt, mit einem bloßen Hinweis auf den Satz vom Fluchtpunkt erledigen.

**) Hinsichtlich des Begriffs „überalldicht“ vergl. G. Cantor, Mathematische Annalen Bd. 15, S. 2.

Wir wollen dies kurz als die *Tatsache der Dichtigkeit**) für das allgemeine harmonische Punktsystem bezeichnen. Der Lüroth-Zeuthensche Beweis, der von Klein mitgeteilt worden ist, benutzt außer den Axiomen der Anordnung *und dem Stetigkeitsaxiom* noch unsere Postulate III, IV und V, von denen die beiden letzten dort mit Hilfe einer Bewegungsvorstellung ausgedrückt erscheinen.**) Das Stetigkeitsaxiom ist, wie dabei Klein hervorgehoben hat ***), insofern benutzt, als für den Fall, daß das Punktsystem nicht überalldicht wäre, die Existenz von Grenzpunkten (vgl. § 12 dieser Arbeit) angenommen wird. Der Beweis erscheint im folgenden in einer modifizierten, übersichtlicheren Form.†)

Angenommen, das konstruierte allgemeine harmonische Punktsystem wäre nicht überalldicht, so könnte man sich eine Strecke MN denken, die von Punkten des Systems frei wäre und die nachher als erste Strecke MN bezeichnet werden soll. Man könnte es zugleich so einrichten, daß in der Ergänzungsstrecke, die nachher die zweite Strecke MN heißen soll, die Punkte M und N selbst die Grenzpunkte des Punktsystems sind. Nun sei F ein dem harmonischen System angehörender, nicht etwa mit M oder N zusammenfallender Punkt. Auf diesen Punkt F als Fluchtpunkt sollen sich im folgenden stets die Worte „zwischen“, „auf derselben

*) Vahlen nennt (Abstrakte Geometrie, 1905, S. 9) eine solche Punktmenge mit Beziehung auf die Gesamtheit der Punkte der Geraden „relativ dicht“ und nennt eine Punktmenge schon dann „dicht“, wenn nur in jeder Strecke, deren Endpunkte durch Punkte *der Menge* gebildet werden, mindestens ein Punkt der Menge vorkommt.

**) Mathematische Annalen Bd. 7, S. 535: „Si A et B divisent harmoniquement CD, A et B restant fixes, C et D ne pourront se mouvoir que dans des sens inverses entre eux; mais si A et C restent fixes, B et D ne pourront se mouvoir que dans le même sens.“

***) a. a. O. S. 534. Daß der ursprüngliche v. Staudtsche Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie eine Lücke besitzt, und deshalb das Stetigkeitsaxiom oder etwas Ähnliches herangezogen werden muß, hat Klein bereits im 6. Band der Mathematischen Annalen (1873), S. 140 bemerkt.

†) Eine andere Modifikation des Zeuthen-Lürothschen Beweises findet sich bei de Paolis a. a. O. p. 492. Balser hat a. a. O., wie schon bemerkt wurde, gezeigt, daß die Tatsache der Dichtigkeit des allgemeinen harmonischen Punktsystems mit Hilfe des Paschschen Begriffs der Streckenäquivalenz aus dem Satz vom Fluchtpunkt abgeleitet werden kann. Daraus, wie die Äquivalenz von Pasch in der Ebene begründet wird (Vorlesungen über Neuere Geometrie, 1882, S. 121—123), ergibt sich nun, daß man mit Hilfe der Tatsachen der Verknüpfung und Anordnung der Ebene und des Desarguesschen Satzes von den perspektivischen Dreiecken, welche Tatsachen alle in projektiver Formulierung zu denken sind, aus dem Satz vom Fluchtpunkt (d. h. dem projektiv gefaßten archimedischen Axiom) die Tatsache der Dichtigkeit des allgemeinen harmonischen Punktsystems ableiten kann. Man vergl. hierzu noch den letzten Paragraphen (§ 37) dieser Arbeit.

Seite“ usw. beziehen. F liegt auf der zweiten Strecke MN. Bestimmt man jetzt G als harmonischen Mittelpunkt von M und N, mit Bezug auf F als Fluchtpunkt (Fig. 3), so liegt G auf der ersten Strecke MN,

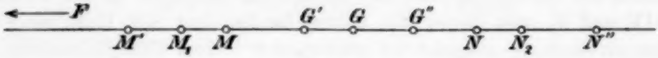


Fig. 3.

die F nicht enthält, d. h. G liegt zwischen M und N. Man nehme jetzt zwei Punkte: G' zwischen M und G und G'' zwischen G und N, im übrigen beliebig an. Es ergibt sich (vgl. § 4) die Ordnung $MG'GG''N$, und wenn M als auf der negativen Seite von N liegend angesehen wird, so ist in der eben erwähnten Folge jeder Punkt auf der negativen Seite jedes ihm nachfolgenden Punktes gelegen. Wenn man nun M' so annimmt, daß G' der harmonische Mittelpunkt von N und M' ist, immer in Beziehung auf den Fluchtpunkt F, so folgt, da G der harmonische Mittelpunkt von N und M war, aus 30), daß M' auf derselben Seite von M, wie G' von G, d. h. auf der negativen Seite von M liegt. Wird jetzt noch N'' so bestimmt, daß G'' der harmonische Mittelpunkt von M und N'' ist, so muß N'' auf der positiven Seite von N gelegen sein. Jetzt soll noch M_1 zwischen M' und M, und N_2 zwischen N und N'' auf sonst beliebige Weise gewählt werden; es ergibt sich so die Folge $M'M_1MG'GG''NN_2N''$ (vgl. § 4), in der jeder Punkt auf der negativen Seite jedes nachfolgenden liegt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß der harmonische Mittelpunkt von M_1 und N_2 zwischen G' und G'' gelegen ist. Es ist nämlich (Fig. 4) nach 30) der Mittelpunkt G_{12} von M_1 und N_2 auf der positiven Seite von dem

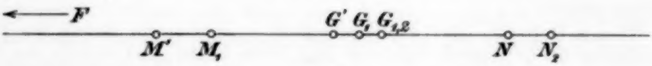


Fig. 4.

Mittelpunkt G_1 von M_1 und N gelegen, da N_2 sich auf der positiven Seite von N befindet. Es liegt ferner, gleichfalls nach 30), der Mittelpunkt G_1 von N und M_1 auf der positiven Seite des Mittelpunkts G' von N und M', weil M_1 auf der positiven Seite von M' gelegen ist. Somit muß auch G_{12} auf der *positiven Seite von* G' liegen. Da man aber ebenso von der anderen Seite her beweisen kann, daß G_{12} auf der negativen Seite des harmonischen Mittelpunkts G_2 von N_2 und M, und daß G_2 auf der negativen Seite von G'' liegt, so ist *derselbe Punkt* G_{12} zugleich auf der *negativen Seite von* G'' gelegen. G_{12} liegt somit (§ 4) zwischen G' und G''.

Nun waren M und N die Grenzpunkte des allgemeinen harmonischen Punktsystems, dessen Punkte, abgesehen etwa von M und N selbst, in der zweiten Strecke MN gelegen waren. In dieser zweiten Strecke liegt auch der Punkt M'. Es muß also nach § 12, wenn nicht etwa M selbst ein Punkt des allgemeinen harmonischen Systems ist, in der Strecke $M'M$, in der N nicht liegt, Punkte dieses Systems geben. Dies heißt aber mit Rücksicht auf die festgestellte Ordnung, daß es „zwischen" M' und M solche Punkte gibt. Man kann also dann M_1 so wie oben und zugleich als Punkt des harmonischen Punktsystems wählen; gehört aber M selbst dem System an, so modifiziert man die obige Betrachtung dahin, daß man M_1 mit M zusammenfallen läßt. Ebenso nimmt man N_2 als Punkt des allgemeinen harmonischen Punktsystems, eventuell mit N zusammenfallend, an. Da nun auch F als Punkt des Systems angenommen war, so muß der vierte harmonische Punkt G_{12} von M_1, F und N_2 gleichfalls dem System angehören. Nun war G_{12} als zwischen G' und G'' liegend nachgewiesen, und die eventuell anzubringenden Modifikationen bewirken in dieser Hinsicht keine Änderung. Es ergibt sich hieraus (vgl. § 4) die Ordnung $MG'G_{12}G''N$, und es wäre also G_{12} auf der ersten Strecke MN gelegen, die doch von Punkten des Systems frei vorausgesetzt war. Es ist also ein Widerspruch eingetreten. Damit ist bewiesen, daß eine solche von Systempunkten freie Strecke MN nicht existieren kann.

Die Figuren sollten den Überblick erleichtern; es sind jedoch alle Schlüsse bloße Folgerungen der aufgestellten Postulate gewesen.

§ 15.

Dichtigkeit des dyadisch harmonischen Punktsystems.

Es soll noch ein anderes Punktsystem folgendermaßen definiert werden. Man gehe von drei verschiedenen Punkten A_1, A_2 und F aus, suche dazu auf irgend eine Art einen vierten harmonischen Punkt A_3, dann zu zweien der Punkte A_1, A_2, A_3 und dem Punkt F einen vierten harmonischen, wieder auf irgend eine Art. Dieser letzte Punkt wird, wenn er ein neuer ist, auch den Punkten A zugezählt, und man fährt nun so fort, indem man zu den Punkten A stets einen solchen zufügt, der als vierter harmonischer aus zwei schon vorhandenen Punkten A und stets demselben Punkt F bestimmt wird. Das so sich ergebende System der Punkte A soll (man vgl. den nächsten Paragraphen) ein *dyadisch harmonisches Punktsystem* mit dem Punkt F als Fluchtpunkt heißen. Der Fluchtpunkt gehört selbst dem System nicht an. Es läßt sich nun zeigen:

38) *Jedes dyadisch harmonische System ist überalldicht.*

Wäre nämlich in der Strecke MN kein Punkt dieses Systems vorhanden, so daß alle Systempunkte, außer eventuell M und N selbst, in der Ergänzungsstrecke MN liegen, wo zugleich (s. o.) M und N die Grenzpunkte der Punkte des Systems sein sollen, so könnte man, falls der Fluchtpunkt F in der Ergänzungsstrecke liegt, genau den obigen Beweis wiederholen; es ist nur jetzt der in jenem Beweis mit F bezeichnete Punkt der Fluchtpunkt und nicht mehr ein Punkt des Systems. Ist aber der Fluchtpunkt F auf der ursprünglichen Strecke MN gelegen oder fällt er etwa mit M oder mit N zusammen, so nehme man auf der ursprünglichen Strecke MN einen von F verschiedenen Punkt K an. Die aus A_0 und A_1 mit Hilfe des Fluchtpunkts F gebildete harmonische Folge $\cdots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\cdots$ gehört nun dem dyadisch harmonischen System an, und es liegt nach dem Fluchtpunktssatz (Satz 36)) auch in *der* Strecke FK, die in der ursprünglichen Strecke MN enthalten ist, mindestens ein Punkt der genannten Folge. Dies widerspricht aber dem Umstand, daß MN von Punkten des dyadisch harmonischen Systems frei sein sollte. Es kann also eine solche Strecke nicht vorkommen.

Zweiter Abschnitt.

Konstruktion der Zahlenskala auf Grund fortgesetzter harmonischer Zweiteilung.

§ 16.

Dyadische Punkte.

Es seien irgend welche drei verschiedene Punkte A_0, A_1 und F gegeben. Man bezeichne A_0 mit 0, A_1 mit 1, konstruiere dann aus A_0 und A_1 in bezug auf den Fluchtpunkt F die harmonische Punktfolge $\cdots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\cdots$ und bezeichne allgemein A_k mit k. Ferner bezeichne man für jede ganze Zahl $k \gtreqless 0$ denjenigen Punkt, der in bezug auf den Fluchtpunkt F der harmonische Mittelpunkt der Punkte k und $k+1$ ist, mit $\frac{2k+1}{2}$. Es bilden jetzt nach Satz 33) die Punkte $\cdots, -1, -\frac{1}{2}$, $0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$, d. h. wenn wir die Zahlen der Punkte anders schreiben, die Punkte $\cdots, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \cdots$ wieder eine harmonische Punktfolge. Man bezeichne weiter allgemein mit $\frac{2k+1}{4}$ den harmonischen Mittelpunkt der Punkte $\frac{k}{2}$ und $\frac{k+1}{2}$; dann ist auch $\cdots, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \cdots$

eine harmonische Punktfolge, und man erkennt, wenn man so fortfährt, daß *jeder Zahl von der Form* $\frac{k}{2^\nu}$, *wo* $k \gtreqless 0$ *und ganz ist, d. h. also jeder „dyadischen“ Zahl auf eindeutige Weise ein Punkt zugeordnet wird.* Die so erhaltenen Punkte, die auch als *dyadische Punkte* bezeichnet werden sollen, liegen untereinander in bezug auf F als Fluchtpunkt in derselben Ordnung, wie ihre Zahlen dem algebraischen Wert nach aufeinanderfolgen. Dies soll heißen, daß irgend eine Anzahl μ herausgegriffener Punkte nach der Begriffsbestimmung von § 4 in derselben Ordnung, in der ihre μ Zahlen aufeinanderfolgen, gelegen sind, und es ergibt sich dies daraus, daß die μ Zahlen als Brüche mit gemeinsamem Nenner 2^ν dargestellt werden können, weshalb die μ Punkte einer der soeben beschriebenen harmonischen Folgen angehören (vgl. § 9 und § 4). *Es liegt darin auch, daß verschiedenen dyadischen Zahlen verschiedene Punkte entsprechen.*

Genügen die drei dyadischen Zahlen

$$\frac{k}{2^\nu},\ \frac{l}{2^\nu},\ \frac{m}{2^\nu}$$

der Bedingung $m + k = 2l$, so ist von den entsprechenden drei Punkten, die der harmonischen Folge $\cdots, \frac{-2}{2^\nu}, \frac{-1}{2^\nu}, \frac{0}{2^\nu}, \frac{1}{2^\nu}, \frac{2}{2^\nu}, \cdots$ angehören, nach Satz 27) der Punkt $\frac{l}{2^\nu}$ der harmonische Mittelpunkt der beiden anderen. Dies kann man sofort so umkehren:

39) *Dem Punkt, der in Beziehung auf den Fluchtpunkt F harmonischer Mittelpunkt zweier dyadischer Punkte ist, kommt als Zahl das arithmetische Mittel der Zahlen der beiden anderen Punkte zu.**)

---

*) Die Entwicklungen von § 16 bis 18 sind denen analog, die Hilbert in § 30 bis 37 der Arbeit gegeben hat, in der nach dem Vorgang von Lie die Geometrie aus Bewegungsaxiomen aufgebaut wird (Math. Annalen Bd. 56, S. 414ff.). Unserem harmonischen Mittelpunkt entspricht bei Hilbert ein gewöhnlicher Mittelpunkt, der durch eine „Halbdrehung“ (a. a. O. § 23) definiert wird. Der Satz 39) unseres Textes entspricht dem Satz von § 31 bei Hilbert: „Durch eine Halbdrehung um den zur Zahl a gehörigen Punkt geht jeder Punkt x in den Punkt $2a - x$ über.“ Dabei bedeuten a und x dyadische Zahlen. Ist speziell $a = 2$, und $x = 1$, so heißt dies, daß der Punkt 1 durch Halbdrehung um 2 in 3 übergeht. Da nun Hilbert (§ 30) den Punkt -1 aus $+1$ durch Halbdrehung um 0, dann 2 und 3 durch Halbdrehung um 1 aus 0, beziehungsweise -1 entstehen läßt, so ist damit die Tatsache ausgesagt, daß von den Punkten $-1, 0, +1, 2, 3$ der Punkt 2 Mittelpunkt von 1 und 3 sein muß, wenn 0 Mittelpunkt ist von -1 und $+1$, und 1 der Mittelpunkt ist gleichzeitig von 0 und 2 und von -1 und 3. Das entspricht aber einem Spezialfall unseres Satzes 11), der als Fundamentalsatz von den Mittelpunkten angesehen werden kann, und den wir hier unmittelbar aus dem Postulat VI, d. h. dem Schließungssatz, gezogen haben. Bei Hilbert ist die genannte Tatsache durch den Umstand

Es ist insbesondere der harmonische Mittelpunkt zweier dyadischer Punkte stets selbst ein solcher Punkt, wenn, wie vorausgesetzt ist, stets derselbe Punkt F als Fluchtpunkt angenommen wird. Hieraus folgt noch, daß das im Sinn von § 15 aus A_0 und A_1 und dem Fluchtpunkt F bestimmte *dyadisch harmonische Punktsystem identisch ist mit der Gesamtheit der dyadischen Punkte*, die aus A_0 und A_1 und dem Fluchtpunkt F konstruiert sind. Somit ist auch die Gesamtheit der den dyadischen Zahlen entsprechenden Punkte, wenn alle die aufgeführten Postulate I bis VII zugrunde gelegt werden, überalldicht.*)

§ 17.

Definition der Koordinate eines beliebigen Punktes.

Es sei nun ein beliebiger, von F verschiedener Punkt X gegeben. Der Einfachheit wegen mag gesagt werden, daß ein Punkt M auf der negativen, beziehungsweise positiven, Seite eines Punktes N liege, wenn

---

begründet gedacht, daß die sämtlichen möglichen Bewegungen im Raum eine Gruppe ausmachen.

In der Tat läßt sich auch daraus allgemein der Satz von den Mittelpunkten ableiten. Man nehme zu diesem Zwecke die Punkte $A_3 A_2 A_1 A_0 A_1' A_2' A_3'$ so an, daß A_0 gleichzeitig von A_1 und A_1', von A_2 und A_2' und von A_3 und A_3' der Mittelpunkt, und A_2 der von A_3 und A_1 ist. Wenn nun H_0 und H_2 die Halbdrehungen (Hilbert § 23) um A_0, beziehungsweise A_2 bedeuten, und man die Drehungen H_0, H_2, H_0 hintereinander ausführt, so werden die Punkte $A_1' A_2' A_3'$ zuerst in $A_1 A_2 A_3$, dann in $A_3 A_2 A_1$ und schließlich in $A_3' A_2' A_1'$ übergeführt. Da nun die Bewegungen eine Gruppe bilden, und infolgedessen auch eine solche Bewegung existieren muß, die durch das Produkt $H_0 H_2 H_0$ der drei Halbdrehungen vorgestellt ist, da diese Bewegung ferner A_2' ungeändert läßt und A_1' und A_3' miteinander vertauscht, so liegt damit eine Halbdrehung vor, und es ist A_2' der Mittelpunkt von A_1' und A_3' (Hilbert, § 23 und 24). Auf der Hilbertschen Grundlage gilt die letzte Betrachtung auch dann, wenn die Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen.

*) Lindemann (Vorlesungen über Geometrie, unter besonderer Benutzung der Vorträge von Clebsch, 2. Bd., 1. Teil, 1891, S. 441) geht gleich nach der Einführung der dyadischen Punkte zu der Formel $x = px' + q$ über, die die neue Zahl x' eines Punktes mit der alten Zahl x desselben Punktes verknüpft, falls die Punkte 0 und 1 an diejenigen Stellen verlegt worden sind, denen zuerst die Zahlen q und $p + q$ zukommen. Dabei bedeuten p, q und x' dyadische Zahlen. Es ist aber zu bemerken, daß auch unter dieser Einschränkung der Beweis der erwähnten Formel den Satz 28) unseres Textes für *jede* Zahl l, nicht nur für 2 und seine Potenzen voraussetzt. Ist z. B. $q = 0$, und $p = 3$, so wird die Formel zu $x = 3x'$ und besagt unter anderem, daß, nachdem der alte Punkt 3 zum Punkt 1 gemacht worden ist, die früheren Punkte $\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots$ die Zahlen $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ erhalten, und dies heißt eben, daß die früheren Punkte $\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots$ eine harmonische Folge bilden. Das ist aber der Satz 28) für $l = 3$.

in bezug auf den Fluchtpunkt F der Punkt M auf der gleichen Seite von N liegt, wie A_0 von A_1, beziehungsweise wie A_1 von A_0 (vgl. den Schluß von § 4). Durch den Punkt X werden nun die dyadischen Punkte in zwei Klassen geteilt, indem in die erste Klasse diejenigen, die auf der negativen Seite von X gelegen sind, in die zweite Klasse die anderen kommen, zu denen eventuell der Punkt X, falls er dyadisch ist, selbst gehören kann. Es liegt dann (§ 4) jeder dyadische Punkt der ersten Klasse auf der negativen Seite jedes dyadischen Punkts der zweiten, d. h. auf der gleichen Seite, auf der der Punkt 0 in bezug auf den Punkt 1 liegt. Es folgt daraus mit Rücksicht auf die Resultate des vorigen Paragraphen, daß die Zahl eines Punkts der ersten Klasse stets algebraisch kleiner ist als die Zahl eines Punkts der zweiten Klasse. Nun sind auch zwei Klassen dyadischer Zahlen gegeben, die im Gebiet aller positiven und negativen dyadischen Zahlen einen „Schnitt"*) ausmachen. Man beachte dabei, daß infolge der Dichtigkeit der dyadischen Punkte, ja schon infolge des Fluchtpunktssatzes (Satz 36)) jede der Klassen wirklich Zahlen enthält. Durch den Schnitt wird eine die beiden Klassen trennende Zahlgröße x definiert, die dyadisch, nichtdyadisch rational oder irrational sein kann und die dem Punkt X zugeordnet werden soll.

Ist neben X noch ein zweiter Punkt X_1 gegeben, der auf der positiven Seite von X liegen, und dem die Zahl x_1 zugeordnet sein soll, so gibt es wegen der Dichtigkeit der dyadischen Punkte einen dyadischen Punkt Λ, der in Beziehung auf den Fluchtpunkt F zwischen X und X_1 gelegen ist. Es liegt nun Λ auf der positiven Seite von X und auf der negativen Seite von X_1. Somit ist Λ für die durch X hervorgebrachte Einteilung der dyadischen Punkte ein Punkt der zweiten, für die durch X_1 bewirkte Einteilung ein Punkt der ersten Klasse**), woraus sich mit Rücksicht auf die beiden Einteilungen (Schnitte) der dyadischen Zahlen ergibt, daß $x_1 > x$ sein muß. Es gehören also zu verschiedenen Punkten verschiedene Zahlen, und es sind die Zahlen wie die zugehörigen Punkte geordnet. Man erkennt noch, daß $x > 0$, beziehungsweise $x < 0$ ist, je nachdem der Punkt X auf der positiven, beziehungsweise negativen Seite von A_0 liegt, und daß nach der neuen Festsetzung jedem dyadischen Punkt wieder diejenige dyadische Zahl zukommt, der er ursprünglich zugeordnet war.

*) Der Ausdruck dürfte unmittelbar verständlich sein im Hinblick auf den Dedekindschen Begriff des Schnitts, der allerdings ursprünglich eine Einteilung der *positiven rationalen* Zahlen bedeutet.

**) Dies genügt, um zu zeigen, daß $x_1 > x$ ist. Es sind nämlich die Festsetzungen so getroffen worden, daß keine zwei Schnitte vorkommen können, die dieselbe dyadische Zahl λ vorstellen und sich nur dadurch unterscheiden, daß λ selbst das eine Mal zur ersten, das andere Mal zur zweiten Klasse gehört. Die Tatsachen der Arithmetik werden natürlich hier als bekannt vorausgesetzt.

Die letzten Resultate würden auch bestehen bleiben, wenn man nur neben den Postulaten I bis VI noch die Tatsache der Dichtigkeit der dyadischen Punkte fordern wollte, ohne das Stetigkeitsaxiom vorauszusetzen.*) Für das jetzt Folgende muß aber die Stetigkeit vorausgesetzt werden. Es sei irgend eine Zahlgröße x gegeben, und es sollen die sämtlichen Punkte der Geraden mit Beziehung auf x in zwei Abteilungen verteilt werden. In die erste Abteilung kommt ein Punkt, wenn es einen von ihm verschiedenen, auf seiner positiven Seite gelegenen dyadischen Punkt gibt, dessen Zahl kleiner als x ist; der zweiten Abteilung werden alle anderen Punkte zugewiesen. Da sich aus einer einfachen Überlegung ergibt, daß die dyadischen Punkte, deren Zahlen kleiner als x sind, selbst der ersten Abteilung, und die dyadischen Punkte, deren Zahlen $\geqq x$ sind, der zweiten Abteilung angehören, so existieren Punkte beider Abteilungen. Man beweist leicht, daß ein Punkt der zweiten Abteilung nicht auf der negativen Seite eines Punkts der ersten gelegen sein kann. Faßt man nun die den Punkt F nicht enthaltende Strecke ins Auge, die durch einen dyadischen Punkt mit einer Zahl $< x$ und durch einen dyadischen Punkt mit einer Zahl $> x$ gebildet wird, so ist auch eine Einteilung der Punkte dieser Strecke gegeben, und es führt das Stetigkeitsaxiom VII auf die Existenz eines Punktes X. Dieser gehört, wie sich leicht zeigen läßt, der zweiten Abteilung an, und man erkennt, indem man die einzelnen Fälle erwägt, daß jeder andere Punkt, der der zweiten Abteilung auf der ganzen Geraden angehört, von jedem Punkt der ersten Abteilung durch X und F getrennt wird. Daraus folgt nun auch, daß die beiden Klassen dyadischer Punkte, die durch den Punkt X nach dem am Anfang dieses Paragraphen beschriebenen Verfahren hervorgebracht werden, nichts anderes sind als die Gesamtheit der dyadischen Punkte, deren Zahlen $< x$, und die Gesamtheit derjenigen, deren Zahlen $\geqq x$ sind (s. o.). Geht man also nachträglich wieder von X aus, so ergibt sich für diesen Punkt durch das frühere Verfahren gerade die Zahl x, von der wir jetzt eben ausgegangen waren.

Ordnet man noch dem Punkt F das Symbol ∞ zu, so erhält man den Satz:

40) *Zwischen der Gesamtheit der Punkte der Geraden und der Gesamtheit der reellen Zahlgrößen, einschließlich des Symbols ∞, läßt sich eine ein-eindeutige Zuordnung definieren, bei der die dyadischen Punkte in der geschilderten Weise den dyadischen Zahlen entsprechen und in Beziehung*

*) Wir haben allerdings die Dichtigkeit der dyadischen Punkte mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms bewiesen; man könnte aber auch z. B. nur die rationalen Punkte (s. den Schluß von § 35) als vorhanden annehmen, in welchem Fall die Tatsache der Dichtigkeit der dyadischen Punkte ohne das Stetigkeitsaxiom bestehen würde.

auf den mit ∞ bezeichneten Punkt die anderen Punkte so wie ihre Zahlen geordnet liegen.

Man erkennt, daß die Zuordnung der Zahlen zu den Punkten *durch das beschriebene Verfahren völlig bestimmt* ist, wenn die drei Punkte gegeben sind, denen die Zahlen 0, 1 und ∞ zukommen sollen. Diese drei Punkte dürfen beliebig gewählt werden. Die Zahl eines Punkts wird auch seine *Koordinate* genannt.

§ 18.

Die Koordinate des harmonischen Mittelpunkts.

Jetzt seien die von F verschiedenen Punkte X, Y, Z mit den Zahlen x, y, z in der Weise, daß Y in bezug auf den Fluchtpunkt F harmonischer Mittelpunkt von X und Y ist, und sonst beliebig gegeben. Es soll gezeigt werden, daß $2y = x + z$. Man nehme zu diesem Zwecke zwei dyadische Punkte Ξ und Z so an, daß Z auf derselben Seite von Z liegt, wie Ξ von X (vgl. § 4); z. B. soll Ξ auf der negativen Seite von X d. h. auf derselben Seite, wie der Punkt 0 vom Punkt 1, gelegen sein. Neben dem Mittelpunkt Y von X und Z denke man sich nun noch den Mittelpunkt Y' von Ξ und Z und den Mittelpunkt H von Ξ und Z (Fig. 5),

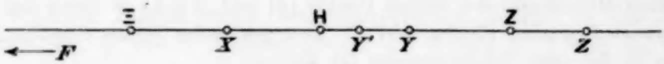


Fig. 5.

alles in Beziehung auf F als Fluchtpunkt. Es ergibt sich jetzt aus 30), daß Y' auf der negativen Seite von Y, und H auf der negativen Seite von Y' sich befinden muß. Hieraus folgt (§ 4), daß auch H sich auf der negativen Seite von Y befindet. Sind nun ξ, η, ζ die zu Ξ, H, Z gehörenden Zahlen, die alle drei dyadisch sind (Satz 39), so hat man die Relation $2\eta = \xi + \zeta$, und es ist vermöge der Lage von H zu Y zugleich $\eta < y$. Somit ist $2y > \xi + \zeta$. Da nun ξ *jede* dyadische Zahl $< x$, und ζ *jede* dyadische Zahl $< z$ bedeuten kann, so folgt daraus, daß $2y \geqq x + z$ sein muß. Auf ganz analoge Weise zeigt man aber auch die Ungleichung $2y \leqq x + z$. Es muß also $2y = x + z$ sein, und man erhält den Satz:

41) *Wenn von irgend drei Punkten der eine in bezug auf den Fluchtpunkt ∞ der harmonische Mittelpunkt der beiden anderen ist, so ist die Koordinate des ersten das arithmetische Mittel der Koordinaten der beiden anderen.**)

*) Hinsichtlich des Falls, daß die Tatsache der Dichtigkeit nicht vorausgesetzt werden soll, vergleiche man § 37.

§ 19.
Änderung der Punkte 0 und 1.

Jetzt sollen an Stelle der Punkte A_0 und A_1 zwei neue, B_0 und B_1, mit 0 und 1 bezeichnet werden, während der Fluchtpunkt F derselbe bleibt; B_0 und B_1 sind voneinander und von F verschieden und sonst beliebig zu denken. Es ergibt sich nun eine neue Zahlbenennung, und es möge allgemein der Punkt, dem jetzt die Zahlgröße x zugeordnet ist, durch $[x]$ vorgestellt werden. Die Punkte B_0 und B_1 mögen früher die Zahlen b_0 und b_1 erhalten haben. Konstruiert man nun aus B_0 und B_1 die harmonische Punktfolge $\cdots B_{-2}B_{-1}B_0B_1B_2\cdots$, so sind dies nach Satz 41) in der früheren Zahlbenennung die Punkte:

$$\cdots b_0-2(b_1-b_0),\ b_0-1(b_1-b_0),\ b_0,\ b_0+1(b_1-b_0),\ b_0+2(b_1-b_0),\ \cdots.$$

Es fällt also der Punkt, dem früher die Zahl $b_0+k(b_1-b_0)$ zukam ($k \gtreqless 0$, ganz), mit B_k zusammen. B_k muß aber jetzt die Zahl k erhalten, weshalb für eine ganze Zahl k der Punkt $[k]$ mit dem Punkt $b_0+k(b_1-b_0)$ der alten Benennung identisch ist.

Nach dem Verfahren von § 16 bedeutet nun $\left[\frac{2k+1}{2}\right]$ den harmonischen Mittelpunkt der beiden Punkte $[k]$ und $[k+1]$ in bezug auf den zugrunde liegenden Fluchtpunkt F. Den genannten beiden Punkten sind aber in der alten Zahlbenennung die Zahlen

$$b_0+k(b_1-b_0) \quad \text{und} \quad b_0+(k+1)(b_1-b_0)$$

zugeordnet. Das arithmetische Mittel $b_0+\frac{2k+1}{2}(b_1-b_0)$ dieser Zahlen kommt also nach 41) in der alten Zahlbenennung jenem harmonischen Mittelpunkt, d. h. dem Punkt $\left[\frac{2k+1}{2}\right]$, zu. Es ist also für jedes ϱ, das die Form $\frac{m}{2}$ (m ganz) besitzt, gleichgültig, ob ϱ ganzzahlig ist oder nicht, der Punkt $[\varrho]$ mit dem Punkt $b_0+\varrho(b_1-b_0)$ alter Benennung identisch. Ganz ebenso findet man weiter, daß für jede Zahl ϱ von der Form $\frac{m}{4}$, und schließlich, daß für jedes dyadische ϱ der Punkt $[\varrho]$, d. h. derjenige, dem bei der neuen Benennung die Zahl ϱ zukommt, mit dem Punkt $b_0+\varrho(b_1-b_0)$ der alten Benennung identisch ist.

Nun sei in der neuen Benennung x' die nichtdyadische Zahlgröße eines sonst beliebigen Punkts. Jede dyadische Zahl, die algebraisch kleiner als x' ist, werde mit σ', jede solche, die algebraisch größer als x' ist, mit τ' bezeichnet. Es liegen dann (vgl. § 17) in bezug auf den Fluchtpunkt F alle Punkte $[\sigma']$ auf einer und derselben Seite von $[x']$, und alle Punkte $[\tau']$

auf der anderen Seite. Da nun in der alten Benennung dem Punkt $[\sigma']$ die Zahl $b_0 + \sigma'(b_1 - b_0)$, und dem Punkt $[\tau']$ die Zahl $b_0 + \tau'(b_1 - b_0)$ zukommt, so liegt wegen der Anordnung der Punkte mit Rücksicht auf Satz 40) die Zahl x, die dem Punkt $[x']$ nach der alten Benennung zugeordnet ist, zwischen allen Zahlen $b_0 + \sigma'(b_1 - b_0)$ einerseits und allen Zahlen $b_0 + \tau'(b_1 - b_0)$ andererseits. Es ist aber $b_0 + x'(b_1 - b_0)$ die einzige Zahlgröße, die so gelegen ist, und es ergibt sich somit:

42) *Werden unter Belassung des Fluchtpunkts die Punkte* 0 *und* 1 *in diejenigen Stellen verlegt, denen vorher die Zahlgrößen* b_0 *und* b_1 *zugeordnet waren, so besteht zwischen der neuen Zahl* x' *und der alten Zahl* x *eines und desselben ganz beliebigen Punkts der Geraden die Relation*

$$x = b_0 + x'(b_1 - b_0).$$

§ 20.

Änderung der Punkte 0, 1, ∞ durch eine harmonische Spiegelung.

Die Punkte A_0, A_1 und F sollen durch harmonische Spiegelung in bezug auf zwei Punkte M und N, die natürlich voneinander verschieden sein müssen, in B_0, B_1 und G übergehen; dies soll heißen, daß jedes der Paare A_0B_0, A_1B_1, FG mit MN harmonisch ist. Jetzt soll neben der ursprünglichen Zahlbenennung eine neue gedacht werden, in der den Punkten B_0, B_1 und G beziehungsweise die Zahlen 0, 1 und ∞ zugeordnet sind, und es soll wieder der Punkt, dem in der neuen Benennung die Zahl x zukommt, mit $[x]$ bezeichnet werden. Man bilde die harmonische Folge der in der alten Benennung mit

43) $$\cdots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \cdots$$

bezeichneten Punkte. Spiegelt man nun in Beziehung auf M und N, so ergeben die Punkte 0, 1 und der Fluchtpunkt F die Spiegelpunkte B_0, B_1 und G, und es möge die ganze Folge 43) durch die Spiegelung die Folge

44) $$\cdots B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \cdots$$

hervorbringen; es muß dann nach 29) die letzte Folge in Beziehung auf G als Fluchtpunkt eine harmonische sein. Es fällt also der Punkt, dem die Zahl k zukommt (k ganz), wenn B_0, B_1 und G mit 0, 1 und ∞ bezeichnet werden, mit B_k zusammen, so daß die Folge 44) auch durch

45) $$\cdot\ \cdot, [-3], [-2], [-1], [0], [+1], [+2], [+3], \cdots$$

vorgestellt werden kann.

Bildet man nun aus 43) durch Einschaltung der Halbierungspunkte die Folge

46) $$\cdots, \frac{-4}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \cdot\ \ ,$$

die nach 33) auch harmonisch sein muß, so ergibt sich aus ihr durch die Spiegelung eine nach 29) für den Fluchtpunkt G harmonische Folge, von der jedes andere Glied mit einem Punkt von 45) übereinstimmt. Es ist daher das Spiegelbild von 46) durch die Folge

$$47)\quad \cdots, \left[\frac{-4}{2}\right], \left[\frac{-3}{2}\right], \left[\frac{-2}{2}\right], \left[\frac{-1}{2}\right], [0], \left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{2}{2}\right], \left[\frac{3}{2}\right], \left[\frac{4}{2}\right], \cdots$$

dargestellt (§ 16). Ist somit ϱ eine Zahl von der Form $\frac{m}{2}$, wo m ganz ist, so sind die Punkte ϱ und $[\varrho]$ Spiegelbilder. Da nun in den Folgen 46) und 47) wieder alle Intervalle harmonisch halbiert werden, und dieselben Schlüsse daran geknüpft werden können usw., so ergibt sich, daß für jede dyadische Zahl ϱ der Punkt $[\varrho]$ das Spiegelbild des Punkts ϱ der alten Benennung ist.

Nun sei x eine beliebige nichtdyadische Zahlgröße, und man bezeichne mit σ alle dyadischen Zahlen, die algebraisch kleiner, und mit τ alle dyadischen Zahlen, die algebraisch größer als x sind. Der Punkt x, d. h. der Punkt, dem in der alten Benennung die Zahl x zukam, liegt in bezug auf den Fluchtpunkt F zwischen der Gesamtheit der Punkte σ und der Gesamtheit der Punkte τ. Somit liegt nach 19) der Spiegelpunkt von x, der neuerdings die Zahl x' bekommen haben soll und der also mit $[x']$ zu bezeichnen ist, in Beziehung auf den neuen Fluchtpunkt G zwischen den Spiegelpunkten der Punkte σ und denen der Punkte τ, d. h. zwischen den Punkten, deren neue Zahlen die σ, und denen, deren neue Zahlen die τ sind. Es muß daher die Zahl x' zwischen den σ und den τ gelegen sein, und da x die einzige Zahl ist, die so liegt, so ist $x' = x$; es ist somit $[x]$ der Spiegelpunkt von x, und man erhält den Satz:

48) *Werden die Punkte* 0, 1, ∞ *durch eine harmonische Spiegelung geändert, so bekommt nachher jeder Punkt die Zahl, die vorher sein Spiegelpunkt gehabt hat.*

§ 21.

Vertauschung der Punkte 0 und ∞.

Nun soll ermittelt werden, was geschieht, wenn der Punkt A_0, dem zuerst die Zahl 0 zugewiesen war, zum Punkt ∞, und der Punkt F, dem zuerst das Symbol ∞ zugewiesen war, zum Punkt 0 gemacht wird, während der Punkt A_1, so wie vorher, mit 1 bezeichnet bleibt. Zunächst ist dadurch, daß im Anfang A_0, A_1, F beziehungsweise mit 0, 1, ∞ bezeichnet waren, eine *erste Zahlbenennung* für die sämtlichen Punkte der Geraden nach dem obigen Verfahren bestimmt. Dabei komme einem Punkt X, der auf derjenigen Strecke A_0F, auf der A_1 liegt, beliebig gewählt sein mag, die Zahl x zu. Man denke sich jetzt einmal eine *zweite Zahlbenennung*

dadurch definiert, daß die Punkte A_0, X, F der Reihe nach mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden. Bedeuten ξ und ξ' die beiden Zahlen, die irgend einem Punkt in der ersten, beziehungsweise zweiten Zahlbenennung zukommen, so gilt nach 42) die Formel

$$\xi = 0 + \xi'(x - 0).$$

Setzt man hierin $\xi = 1$, so ergibt sich, daß der Punkt A_1 durch die zweite Benennung die Zahl $\xi' = \frac{1}{x}$ erhält. Nun gibt es, da nach Voraussetzung A_1 und X auf derselben Strecke A_0F gelegen sind, nach dem Hilfssatz von Darboux (vgl. § 8)*) zwei Punkte Y und Z so, daß YZ sowohl mit A_0F, als mit A_1X harmonisch ist, so daß also in Beziehung auf Y und Z die Punkte A_0, X, F sich der Reihe nach in F, A_1, A_0 spiegeln. Bestimmt man jetzt eine *dritte Zahlbenennung* dadurch, daß man die Punkte F, A_1, A_0 in der Ordnung, in der sie aufgeführt sind, mit 0, 1, ∞ bezeichnet, so sind die Punkte 0, 1, ∞ dieser dritten Benennung die Spiegelpunkte der Punkte 0, 1, ∞ der zweiten Benennung. Somit bekommt nach Satz 48) in der dritten Benennung der Punkt X die Zahl, die sein Spiegelpunkt A_1 in der zweiten erhalten hat, d. h. die Zahl $\frac{1}{x}$. Dies gilt nun für jeden Punkt X, der mit A_1 auf derselben Strecke A_0F liegt, da für jeden anderen solchen Punkt X derselbe Beweis mit anderen Punkten Y und Z geführt werden kann. Es gilt also für die durch F, A_1 und A_0 völlig bestimmte dritte Zahlbenennung, daß jedem Punkt der genannten Strecke A_0F der reziproke Wert der Zahl zukommt, die demselben Punkt bei der ersten Benennung zugeordnet war.

Liegt ein Punkt $\overline{X}$ auf der anderen Strecke A_0F, auf der A_1 nicht liegt, so gilt für den Punkt X, der von $\overline{X}$ durch A_0 und F harmonisch getrennt ist, die vorige Betrachtung. Für den Fluchtpunkt F ist der Punkt A_0 der harmonische Mittelpunkt von X und $\overline{X}$; da nun in der ersten Zahlbenennung F die Zahl ∞, und A_0 die Zahl 0 erhalten hat, so wird, falls bei dieser Benennung wieder x die Zahl von X ist, $\overline{X}$ dabei nach 41) die Zahl $-x$ bekommen. Wird aber A_0 als Fluchtpunkt angesehen, so ist F der harmonische Mittelpunkt der beiden Punkte X und $\overline{X}$. In der dritten Zahlbenennung war F mit 0, und A_0 mit ∞ bezeichnet, und es erhält nach dem vorhin gefundenen Resultat bei dieser Benennung X die Zahl $\frac{1}{x}$; somit muß dabei der Punkt $\overline{X}$ die Zahl $-\frac{1}{x}$ bekommen. Weil aber in der ersten Benennung dem Punkt $\overline{X}$ die Zahl $-x$ zugeordnet war, erhält man in allen Fällen das Resultat:

*) Da der Beweis dieses Hilfssatzes auf die Stetigkeit gegründet wird, so ist hier das Stetigkeitsaxiom benutzt.

49) *Vertauschen die mit* 0 *und* ∞ *bezeichneten Punkte ihre Rolle, während der Punkt* 1 *derselbe bleibt, so kommt nachher jedem Punkt der Geraden der reziproke Wert der früheren Zahl zu.*

§ 22.

Beliebige Änderung der Grundpunkte.

Es handelt sich noch um den Fall, daß statt der ursprünglichen Punkte A_0, A_1, F irgend drei, natürlich voneinander verschiedene Punkte B_0, B_1, G mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden sollen. Diesen Punkten B_0, B_1, G seien bei der ursprünglichen Zahlbenennung die Zahlen b_0, b_1, b_∞ zugeordnet gewesen, von denen auch eine gleich ∞ sein kann. Kommt nun irgend einem Punkt X zuerst die Zahl x und nachher für die neuen Grundpunkte die Zahl y zu, so ist der Zusammenhang von x und y zu ermitteln. Ist zunächst $b_\infty = \infty$, d. h. fällt der Punkt G mit F zusammen, so ist nach 42)

50) $$x = b_0 + y(b_1 - b_0).$$

In jedem anderen Fall ist b_∞ eine endliche Zahl, und G ein von F verschiedener Punkt.

Ist nun G von F verschieden, so wähle man noch einen von beiden verschiedenen Punkt C. Diesem Punkt soll in der ursprünglichen Zahlbenennung die Zahl c zukommen; es ist dann c endlich und verschieden von b_∞. Führt man eine neue Zahlbenennung für die Punkte der Geraden ein, bei der beziehungsweise G, C, F mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden, und bekommt der oben gedachte Punkt X nunmehr die Zahl x', so ist nach 42)

$$x = b_\infty + (c - b_\infty)x'.$$

Vertauscht man jetzt bei den Punkten G, C, F die Rollen von G und F, d. h. bezeichnet man nunmehr F, C, G beziehungsweise mit 0, 1, ∞, so ergibt sich wieder eine neue Zahlbenennung der Punkte der Geraden, bei der X die Zahl x'' bekommen soll. Nach 49) muß

$$x'' = \frac{1}{x'}$$

sein, so daß sich ergibt:

51) $$x'' = \frac{c - b_\infty}{x - b_\infty}.$$

Insbesondere wird für den Punkt B_0, für den $x = b_0$ ist,

52) $$x_0'' = \frac{c - b_\infty}{b_0 - b_\infty},$$

und für den Punkt B_1, für den $x = b_1$ ist,

53) $$x_1'' = \frac{c - b_\infty}{b_1 - b_\infty}.$$

Dabei dürfte auch z. B. b_0 die Zahl ∞ bedeuten, in welchem Fall x_0'' gleich 0 gesetzt werden müßte. Indem man nun unverändert G mit ∞ bezeichnet sein läßt, kann man erreichen, daß B_0 und B_1 mit 0 und 1 bezeichnet werden. Dann erhält man aber die Grundpunkte B_0, B_1, G, die eingeführt werden sollten, und es ist somit y die Zahl, die nun dem Punkt X zukommt. Da die Punkte B_0 und B_1 vorhin die Zahlen x_0'' und x_1'' erhalten hatten, so ergibt sich nach 42) für den letzten Übergang die Formel

$$x'' = x_0'' + (x_1'' - x_0'')\,y,$$

und es ist also mit Rücksicht auf 51), 52) und 53)

$$\frac{c - b_\infty}{x - b_\infty} = \frac{c - b_\infty}{b_0 - b_\infty} + \left[\frac{c - b_\infty}{b_1 - b_\infty} - \frac{c - b_\infty}{b_0 - b_\infty}\right] y.$$

Da b_∞ hier endlich ist, b_0 und b_1, von denen eines unendlich sein kann, voneinander und von b_∞ verschieden sind, und c endlich und von b_∞ verschieden ist, so sind die Brüche der rechten Seite endlich und der Klammerwert von Null verschieden. Man kann nun auch mit $c - b_\infty$ wegdividieren und erhält:

54) $$y = \frac{\dfrac{1}{x - b_\infty} - \dfrac{1}{b_0 - b_\infty}}{\dfrac{1}{b_1 - b_\infty} - \dfrac{1}{b_0 - b_\infty}}.$$

Dieser Ausdruck kann unter den gemachten Voraussetzungen nicht illusorisch werden. Die aus ihm sich ergebende einfachere Formel

55) $$y = \frac{b_\infty - b_1}{b_0 - b_1} : \frac{b_\infty - x}{b_0 - x}$$

ist, wenn $b_0 = \infty$ ist, nicht im eigentlichen Sinn zu gebrauchen, sondern muß dann erst durch Grenzübergang definiert werden. Es zeigt eine nähere Prüfung, daß die Beweisführung für die Formel 54) auch für den Fall, daß $x = \infty$ ist, gültig bleibt; ebenso ist die Formel für $x = b_\infty$, in welchem Fall $y = \infty$ ist, richtig.

Es ergibt sich also, daß eine Änderung der Grundpunkte in allen Fällen durch eine lineare Transformation der Koordinate ausgedrückt ist; diese lineare Transformation hat dann und nur dann die gebrochene Form, wenn der Punkt ∞ geändert worden ist. Daß umgekehrt jede lineare Transformation eine der Formen 50) oder 54), beziehungsweise 55), besitzt, ist aus analytischen Gründen leicht einzusehen, und es stellt deshalb auch jede lineare Transformation eine Änderung der Grundpunkte vor.

§ 23.
Doppelverhältnis.

Unter dem *Doppelverhältnis* $(ABCX)$ von vier Punkten, die verschieden sein sollen, werde die Zahl verstanden, die dem Punkt X dann zukommt, wenn A mit ∞, B mit 1, und C mit 0 bezeichnet wird.*) Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten ist also durch die vier Punkte und ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt und von 0, 1, ∞ verschieden; es nimmt ferner jeden anderen reellen Zahlenwert für eine und nur eine Stelle X an, wenn man A, B und C voneinander verschieden und sonst irgendwie angenommen hat. Ist speziell X von B durch A und C harmonisch getrennt, so muß, da A der Fluchtpunkt ist, und B und C mit 1 und 0 bezeichnet sind, X die Zahl -1 erhalten; es ist in diesem Fall und nur in diesem das Doppelverhältnis gleich -1. Ferner bekommt allgemein X eine positive, beziehungsweise negative Zahl, je nachdem X in bezug auf den Fluchtpunkt A auf derselben Seite von 0, d. h. C, wie 1, d. h. B, oder auf der entgegengesetzten gelegen ist, d. h. je nachdem X und B durch A und C nichtgetrennt oder getrennt sind. Es ergibt sich also:

56) *Das Doppelverhältnis ist dann und nur dann gleich* -1, *wenn die Punkte in der betreffenden Anordnung harmonisch sind, und es ist positiv oder negativ, je nachdem der zweite Punkt vom vierten nichtgetrennt, beziehungsweise getrennt ist durch den ersten und dritten.*

Kommen den Punkten A, B, C, X für irgend drei Grundpunkte be-

---

*) Killing (Einführung in die Grundlagen der Geometrie 1. Bd., S. 107) knüpft die Definition des Doppelverhältnisses gleich an die Bestimmung der ganzzahligen und der dyadischen Punkte an. Seine Definition hat im Grund denselben Sinn wie die von uns im Text gegebene. Es folgt aus ihr, da bei Killing unser Satz 28) zur Verfügung steht, ohne Voraussetzung der Tatsache der Dichtigkeit, daß die Formel $(P_\infty P_\alpha P_0 P_{\alpha\nu}) = \nu$ gültig ist, *falls* α *und* ν *dyadische Zahlen vorstellen.* Dies bedeutet, daß der Punkt, der zuerst die Zahl $\alpha\nu$ erhalten hatte, die neue Zahl ν bekommt, wenn der Punkt α zum Punkt 1 gemacht wird, d. h. daß die hier auf S. 206 Anm. angeführte Formel $x = px' + q$ für $q = 0$ und für ein dyadisches p und x' richtig ist. Killing, der übrigens die Punkte im Doppelverhältnis anders ordnet, führt den Beweis der Formel $(P_\infty P_\alpha P_0 P_{\alpha\nu}) = \nu$ allerdings nur für ganzzahlige α und ν aus (S. 110 h)). Nachdem die Formel für dyadische Zahlen gezeigt ist, wäre auch der Übergang zu beliebigen Zahlgrößen strenger durchzuführen, wobei unser Hilfssatz 31) benutzt werden kann. Nachher, wenn die Formel allgemein bewiesen ist, ergibt sich, wenn man über die Tatsachen der Ebene verfügt, nach der Anordnung von Killing die die Vertauschung der Punkte P_0 und P_∞ betreffende Relation daraus, daß sich die Punkte $P_\infty P_\alpha P_0 P_\beta$ durch mehrfaches Projizieren beziehungsweise in $P_0 P_\beta P_\infty P_\alpha$ überführen lassen (a. a. O. S. 115).

ziehungsweise die endlichen Zahlen b_∞, b_1, b_0, x zu, so ist die Zahl y, die dem Punkt X dann zugeordnet ist, wenn A mit ∞, B mit 1, und C mit 0 bezeichnet wird, durch die Formel 55) dargestellt, *so daß also das Doppelverhältnis der vier Punkte den Ausdruck*

57) $$(b_\infty b_1 b_0 x) = \frac{b_\infty - b_1}{b_0 - b_1} : \frac{b_\infty - x}{b_0 - x}$$

erhält. Für den Fall, daß eine der Zahlen b_∞, b_1, b_0, x gleich ∞ ist, ergibt sich aus der Formel 50), beziehungsweise aus Formel 54), mit Rücksicht auf den Umfang ihrer Gültigkeit der Wert y des Doppelverhältnisses, und man erkennt dann, daß in einem solchen Fall der betreffende Grenzwert des Ausdrucks 57) das Doppelverhältnis vorstellt. *Erklärt man also durch den Ausdruck* 57), *beziehungsweise durch seine Grenzwerte das Doppelverhältnis der vier Zahlen b_∞, b_1, b_0, x, von denen eine gleich ∞ sein kann, so gilt, daß das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten stets gleich dem Doppelverhältnis der Zahlen ist, die in bezug auf irgend welche drei Grundpunkte den vier Punkten zukommen.*

Darin, daß das Doppelverhältnis der vier Punkte unabhängig ist von den drei Grundpunkten, auf die die Zahlen der vier Punkte bezogen sind, liegt auch die analytische Tatsache, daß der Ausdruck 57) gegenüber der linear gebrochenen Substitution invariant ist.

§ 24.

Die Zahlenverteilung auf der Geraden ist nach Wahl der Punkte 0, 1, ∞ durch ihre Eigenschaften bestimmt.

Durch das Verfahren von § 16 und § 17 ist eine Zahlbenennung der Punkte der Geraden oder eine Verteilung der reellen Zahlen über die Gerade gegeben, sobald die Punkte 0, 1 und ∞ gewählt sind. Es ist die Frage, inwieweit nach der Wahl der Punkte 0, 1, ∞ die Zahlenverteilung, abgesehen von dem Verfahren, durch das sie hergestellt worden ist, durch ihre Eigenschaften bestimmt ist. Die genannte Zahlenverteilung bedeutete eine ein-eindeutige Zuordnung sämtlicher Punkte der Geraden zu den sämtlichen reellen Zahlen mit Einschluß des Symbols ∞. Die Verteilung genügte der Bedingung, daß beliebig viele, vom Punkt ∞ verschiedene Punkte in bezug auf diesen ihren Zahlen entsprechend geordnet liegen (§ 4 und § 17). Dies soll als die *erste Bedingung* bezeichnet werden. Die Zahlenverteilung genügt nach 41) auch der *zweiten Bedingung*, daß für den Punkt, der vom Punkt ∞ durch zwei andere harmonisch getrennt ist, die Zahl das arithmetische Mittel ist von den Zahlen der beiden anderen Punkte. *Durch diese beiden Bedingungen ist die Verteilung der Zahlen be-*

reits bestimmt. Es ergeben sich nämlich, sobald die Punkte 0, 1, ∞ gewählt sind, nacheinander die Punkte 2, 3, 4, $\cdots$, dann $-1, -2, -3, \cdots$ durch die zweite Bedingung. Nachher ergeben sich durch dieselbe Bedingung die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \cdots$ usw., und schließlich alle dyadischen Punkte. Nachdem diese alle bestimmt sind, ergibt sich nach der ersten Bedingung die einem beliebigen Punkt X zuzuordnende Zahl x dadurch, daß sie die beiden Klassen der dyadischen Zahlen voneinander trennen muß, die den dyadischen Punkten der einen und der anderen Seite des Punkts X angehören; die „Seite" ist mit Beziehung auf den mit ∞ bezeichneten Punkt zu verstehen.

Die konstruierte Zahlenverteilung genügt aber, wie in § 23 nachgewiesen worden ist, auch der *dritten Bedingung*, daß vier verschiedenen Punkten, wenn sie harmonisch sind, Zahlen zukommen, die in der entsprechenden Anordnung das Doppelverhältnis -1 ergeben. Diese dritte Bedingung enthält, wie man sofort sieht, die zweite; sie zieht aber, wenn alle früheren Postulate I bis VII vorausgesetzt werden, auch die Erfüllung der ersten Bedingung schon nach sich. Um dies einzusehen, muß man auf die Darbouxsche Betrachtung*) zurückgreifen. Es seien R, S, T drei voneinander und vom Punkt ∞ verschiedene Punkte, und es sei R von ∞ durch S und T *nicht* getrennt. Unter diesen Umständen müssen nach dem Satz von Darboux zwei Punkte X und Y existieren, die gleichzeitig durch R und ∞ und durch S und T harmonisch getrennt werden, und es sind dann die sechs Punkte ∞, R, S, T, X, Y voneinander verschieden. Bedeuten r, s, t, x, y die verschiedenen Zahlen der mit den entsprechenden großen Buchstaben benannten Punkte, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{r-x}{r-y} = -1$$

und

$$\frac{s-x}{t-x} : \frac{s-y}{t-y} = -1.$$

Die vorkommenden Differenzen sind von Null verschieden. Die erhaltenen Gleichungen lassen sich nun in die Formen

58) $$x + y = 2r$$

und

59) $$2xy = (s+t)(x+y) - 2st$$

setzen, und diese ergeben

60) $$xy = rs + rt - st.$$

---

*) Vergl. § 8 der vorliegenden Arbeit.

Aus den Gleichungen 58) und 60) folgt aber, daß x und y die beiden Wurzeln der Gleichung in ξ:

61) $$\xi^2 - 2r\xi + rs + rt - st = 0$$

sein müssen. Da demnach diese Gleichung zwei reelle und verschiedene (s. o.) Wurzeln hat, muß ihre Diskriminante $4(r-s)(r-t)$ positiv sein. Es kann somit die Zahl r nicht zwischen s und t liegen. Wir haben also gefunden, daß, wenn der Punkt R vom Punkt ∞ durch S und T nicht getrennt wird, die Zahl r nicht zwischen den Zahlen s und t liegen kann.

Nun sei S, in Beziehung auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt, zwischen R und T angenommen. Es ist dann weder R von ∞ durch S und T, noch der Punkt T von ∞ durch R und S getrennt (§ 4). Nach dem vorigen kann also jetzt weder die Zahl r zwischen den Zahlen s und t, noch t zwischen r und s gelegen sein. Somit ist s die der algebraischen Ordnung nach mittlere der drei Zahlen. Es liegen also drei voneinander und vom Punkt ∞ verschiedene Punkte in bezug auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt in der Ordnung ihrer Zahlen. Hieraus ergibt sich aber (§ 4) für beliebig viele Punkte, daß sie in bezug auf den Punkt ∞ in der Ordnung liegen, in der ihre Zahlen der algebraischen Größe nach aufeinander folgen. Ist also die dritte der aufgeführten Bedingungen erfüllt, so ist es auch die erste, und da die zweite Bedingung ohnedies in der dritten enthalten ist, so muß, nachdem die Grundpunkte gewählt sind, die Zahlenverteilung auch schon durch die dritte Bedingung allein bestimmt sein. Man erhält jetzt durch Zusammenfassung:

62) *Werden für eine Gerade die sämtlichen Postulate* I *bis* VII *gefordert, so läßt sich, nachdem drei verschiedene, im übrigen beliebige Punkte mit* 0, 1, ∞ *bezeichnet worden sind, eine und nur eine ein-eindeutige Zuordnung der Punkte der Geraden zu den sämtlichen reellen Zahlen so vornehmen, daß die erste und die zweite Bedingung erfüllt sind. Diese Zuordnung besitzt dann auch die anderen früher gefundenen Eigenschaften und genügt insbesondere auch der dritten Bedingung. Umgekehrt ist die ein-eindeutige Zuordnung der Punkte und der Zahlen nach der Verfügung über die Punkte* 0, 1 *und* ∞ *auch schon durch die dritte Bedingung allein völlig bestimmt.*

Dritter Abschnitt.

Konstruktion der Zahlenskala auf Grund der allgemeinen harmonischen n-Teilung.

§ 25.

Vorläufige Behandlung der rationalen Punkte.

Im zweiten Abschnitt ist bei der Behandlung der meisten Fragen das Stetigkeitsaxiom benutzt worden, in der Weise, daß auch die Resultate, die die rationalen Punkte betreffen, im allgemeinen nicht unabhängig vom Stetigkeitsaxiom bewiesen worden sind.*) In diesem dritten Abschnitt, der unabhängig von den Resultaten des zweiten aufgebaut werden wird, sollen zunächst die Sätze für die rationalen Punkte bloß auf Grund der Postulate I bis VI erledigt werden; nachher wird (§ 33) die Tatsache der Dichtigkeit der rationalen Punkte, zunächst als Postulat, eingeführt, und erst ganz zuletzt noch das Stetigkeitsaxiom vorausgesetzt, von dem ja dann wieder im Zusammenhang mit den anderen Postulaten die Tatsache der Dichtigkeit als Folge erscheint.

Nach dem Satz 32) in § 11 ist die harmonische n-Teilung, sofern sie überhaupt möglich ist, eindeutig bestimmt. Dies soll heißen, daß nach Festsetzung der Punkte A_0, A_1 und F und nach Wahl einer positiven ganzen Zahl n höchstens *ein* Punkt B_1 so existieren kann, daß in der aus A_0 und B_1 konstruierten, auf F als Fluchtpunkt sich beziehenden harmonischen Punktfolge (§ 9)

63) $$A_0 B_1 B_2 B_3 \cdots$$

der Punkt A_1 als $n+1^{\text{ter}}$ Punkt auftritt. Bezeichnet man die Punkte A_0, A_1 und F durch 0, 1 und ∞, so wird man passend B_1 mit $\frac{1}{n}$ bezeichnen, und wir wissen also, daß jedenfalls nicht mehr als ein Punkt $\frac{1}{n}$ existieren kann. Als Punkt $\frac{m}{n}$ soll, wenn der Punkt $\frac{1}{n}$ existiert, für $m \geqq 0$ der $m+1^{\text{te}}$ Punkt der Folge 63) bezeichnet werden; zugleich mag diese Folge als harmonisch auch nach links fortgesetzt werden, und es sollen die sich hier anschließenden Punkte der Ordnung nach die Zahlen $\frac{-1}{n}$, $\frac{-2}{m}$, $\cdots$ erhalten. Ist n eine negative ganze Zahl, so ist $\frac{m}{n}$ durch $\frac{-m}{-n}$ zu erklären. Man erkennt nun durch eine einfache Überlegung, daß $\frac{m}{n}$ *stets der Punkt ist, der dann, wenn der Punkt* $\frac{1}{n}$ *mit* 1 *bezeichnet*

*) Vergl. § 21.

würde, bei sich gleichbleibendem Fluchtpunkt und Nullpunkt, die Zahl m *erhalten müßte*, und daß dies für $m \gtreqless 0$ und für $n \gtrless 0$ gilt. Ferner folgt aus Satz 27) in § 9, daß von den aus unserer harmonischen Folge herausgegriffenen Punkten $\frac{-m}{n}$, 0, $\frac{+m}{n}$ der mittlere in bezug auf unseren mit ∞ bezeichneten Fluchtpunkt harmonischer Mittelpunkt der beiden anderen ist.

Es ist eine Folge der gegebenen Begriffsbestimmungen, daß der Punkt $\frac{n}{n}$ nichts anderes ist als der Punkt 1; hinsichtlich des Punkts $\frac{m}{n}$ ist aber zu bemerken, daß es zunächst zu seiner Festlegung nötig ist, die Zahlen m und n einzeln anzugeben, und daß bewiesen werden muß, daß z. B. der Punkt $\frac{8}{6}$ mit dem Punkt $\frac{4}{3}$ zusammenfällt. Zu diesem Zweck werde jetzt angenommen, daß *für jede Wahl der Punkte* 0, 1, ∞ *und für die beiden bestimmten ganzen positiven Zahlen* n_1 *und* n_2 die Punkte $\frac{1}{n_1}$ und $\frac{1}{n_2}$ existieren. Es werde nun, immer in bezug auf den Fluchtpunkt F, die Strecke $A_0 A_1$ harmonisch in n_1 Teile geteilt, die so entstehende harmonische Punktfolge nach beiden Seiten ohne Ende fortgesetzt, und jede Strecke zwischen zwei benachbarten Punkten dieser Folge harmonisch in n_2 Teile geteilt. Es ergibt sich aus dem Satz 33) in § 11, daß so schließlich eine wiederum harmonische Punktfolge entsteht. Diese soll mit

$$64) \qquad \cdots C_{-3} C_{-2} C_{-1} A_0 C_1 C_2 C_3 \cdots$$

bezeichnet werden, so daß also der Punkt $C_{n_1 n_2}$ mit A_1 zusammenfällt. Dabei ist die Folge

$$65) \qquad \cdots C_{-3n_2} C_{-2n_2} C_{-n_2} A_0 C_{n_2} C_{2n_2} C_{3n_2} \cdots$$

die aus der harmonischen Teilung von $A_0 A_1$ in n_1 Teile hervorgegangene harmonische Punktfolge, und es ist in dieser der n_1^{te} auf A_0 rechts folgende Punkt der Punkt A_1. Wenn jetzt A_0 mit 0, und A_1 mit 1 bezeichnet wird, so erkennt man, daß mit Rücksicht auf die Folge 65) der Punkt C_{n_2} mit $\frac{1}{n_1}$, und $C_{m_1 n_2}$ mit $\frac{m_1}{n_1}$ zu bezeichnen ist, während in der Folge 64) der Punkt C_1 die Zahl $\frac{1}{n_1 n_2}$, und deshalb $C_{m_1 n_2}$ die Zahl $\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}$ erhält. *Die beiden Brüche* $\frac{m_1}{n_1}$ *und* $\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}$ *stellen also denselben Punkt dar; insbesondere ist auch der Punkt* m_1 *derselbe wie der Punkt* $\frac{m_1 n_2}{n_2}$. Sind die beiden formell verschiedenen Brüche $\frac{m_1}{n_1}$ und $\frac{m_2}{n_2}$ arithmetisch einander gleich, d. h. besteht die Gleichung $m_1 n_2 = n_1 m_2$, so ist nach dem soeben

Bewiesenen der Punkt $\frac{m_1}{n_1}$ derselbe wie der Punkt $\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}$, d. h. wie der Punkt $\frac{n_1 m_2}{n_1 n_2}$, der wiederum nach dem vorher Bewiesenen mit dem Punkt $\frac{m_2}{n_2}$ übereinstimmt. *Jene beiden gleichen Brüche stellen also in der Tat denselben Punkt vor.*

Wir haben schon gesehen, daß der Punkt C_1 die Zahl $\frac{1}{n_1 n_2}$ bekam; *es existiert somit der Punkt $\frac{1}{n_1 n_2}$ immer und für jede Wahl der Grundpunkte* 0, 1, ∞, *wenn die Punkte $\frac{1}{n_1}$ und $\frac{1}{n_2}$ für jede Wahl der Grundpunkte existieren.*

Aus der Folge 64) und daraus, daß C_1 die Zahl $\frac{1}{n_1 n_2}$ erhalten hat, ergibt sich, daß C_{m_1} mit $\frac{m_1}{n_1 n_2}$ bezeichnet werden muß. Ferner bekam oben C_{n_2} die Zahl $\frac{1}{n_1}$. Da nun die Folge $A_0 C_1 C_2 \cdots C_{n_2}$ durch harmonische n_2-Teilung der den Punkt F, d. h. den Punkt ∞, nicht enthaltenden Strecke $A_0 C_{n_2}$ entstanden ist, muß C_1 die Zahl $\frac{1}{n_2}$ bekommen, wenn man jetzt unter Belassung der Punkte 0 und ∞ den Punkt C_{n_2}, d. h. den früheren Punkt $\frac{1}{n_1}$, mit 1 bezeichnet. Es erhält dann, wenn man wieder zu der nach rechts und links unendlich ausgedehnten Folge 64) übergeht, der Punkt C_{m_1} für $m_1 \gtreqless 0$ die Zahl $\frac{m_1}{n_2}$. *Es ist also der Punkt $\frac{m_1}{n_1 n_2}$ derjenige, der nachher die Zahl $\frac{m_1}{n_2}$ erhält, wenn der frühere Punkt $\frac{1}{n_1}$ mit* 1 *bezeichnet wird.*

In § 29 wird bewiesen werden, daß für jede ganze positive Zahl n der Punkt $\frac{1}{n}$ existiert. Es gehört somit auch zu jedem bestimmten Bruch $\frac{m}{n}$, wo $m \gtreqless 0$ sein kann, ein bestimmter Punkt. Nach dem vorhin Bewiesenen gehört aber zu zwei Brüchen, die dieselbe Rationalzahl darstellen, derselbe Punkt. Dies kann mit Hilfe der Definition der Punkte, die zu Brüchen mit negativen Nennern gehören, auch auf solche Brüche ausgedehnt werden. Es ergeben sich somit jetzt die „rationalen Punkte" in der Weise, daß zu jeder rationalen Zahl *ein* bestimmter Punkt gehört. Da mehrere Rationalzahlen durch Brüche mit demselben positiven Nenner

$$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \frac{m_3}{n}, \ldots, \frac{m_\nu}{n}$$

dargestellt werden können, so erscheinen die entsprechenden Punkte dann als aus einer und derselben harmonischen Folge herausgegriffen, und man erkennt aus dieser Folge, daß die Punkte in bezug auf den Punkt ∞ als

Fluchtpunkt so wie ihre Zahlen geordnet liegen (§ 9). Insbesondere kommen verschiedenen Rationalzahlen verschiedene Punkte zu, und es liegt ein rationaler Punkt auf derselben Seite des Punkts 0 wie der Punkt 1 oder nicht, je nachdem seine Zahl positiv oder negativ ist.

Es ergibt sich aus einer einfachen Überlegung, daß die in diesem Paragraphen gegebene Definition des Punkts $\frac{m}{n}$ für den Fall, daß n eine Potenz von 2 ist, mit der im zweiten Abschnitt in § 16 gegebenen Definition des einer dyadischen Zahl zugeordneten Punkts übereinstimmt.

§ 26.

Eine spezielle Änderung der Punkte 0 und 1.

Es liegt nahe, daß der im vorigen Paragraphen definierte Punkt $\frac{m}{n}$ zugleich auch derjenige sein wird, der dann, wenn der Punkt m zum Punkt 1 gemacht wird, und der Nullpunkt und der Punkt ∞ ungeändert bleiben, die Zahl $\frac{1}{n}$ erhält. Diese Tatsache muß aber streng bewiesen werden. Wir stellen die Betrachtung gleich etwas allgemeiner an. Angenommen, es sei n eine positive ganze Zahl, und es existiere für irgend drei Grundpunkte der Punkt $\frac{1}{n}$, so soll der auf die ursprünglich mit $0, 1, \infty$ bezeichneten Punkte A_0, A_1, F sich beziehende Punkt $\frac{1}{n}$ mit B_1 bezeichnet werden; der Punkt $\frac{m}{n}$ ist dann definiert als der Punkt B_m in der auf F als Fluchtpunkt sich beziehenden harmonischen Folge

66) $$\cdots B_{-3} B_{-2} B_{-1} B_0 B_1 B_2 B_3 \cdots,$$

in der B_0 mit A_0, und B_n mit A_1 zusammenfällt. Diese Folge kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß in der aus A_0 und A_1 konstruierten harmonischen Folge $\cdots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 \cdots$, die sich auf denselben Fluchtpunkt F bezieht, jede Strecke $A_\nu A_{\nu+1}$ in bezug auf F harmonisch in n Teile geteilt wird (Satz 33)). Es ist also für jedes $\mu \gtreqless 0$ der Punkt $B_{\mu n}$ mit A_μ identisch. Man bildet jetzt aus 66) die Folge

67) $$\cdots B_{nl-2m} B_{nl-m} B_{nl} B_{nl+m} B_{nl+2m} \cdots B_{nl+nm} \cdots.$$

Diese ist nach 28) gleichfalls harmonisch. Es bedeutet dabei l irgend eine ganze Zahl $\gtreqless 0$. Die ganze Zahl m kann nicht bloß positiv, sondern auch negativ gedacht werden, indem im letzten Fall die Folge 66) erst umzukehren ist, worauf dann die Folge 67) aus dieser umgekehrten Folge herausgegriffen werden kann. Unter der Voraussetzung, daß nunmehr B_{nl}

mit 0, und B_{nl+nm} mit 1 bezeichnet wird, erhält der Punkt B_{nl+m} die Zahl $\frac{1}{n}$. Betrachtet man dazu noch die wiederum nach 28) harmonische Folge

$$\cdots B_{nl-2nm} B_{nl-nm} B_{nl} B_{nl+nm} B_{nl+2nm} \cdots B_{nl+n^2m} \cdots,$$

so sieht man, daß unter derselben Voraussetzung die Punkte B_{nl-nm} und B_{nl+n^2m} nun die Zahlen -1 und n erhalten. Es bekommen also jetzt die Punkte

68) $$B_{nl},\ B_{nl+nm},\ B_{nl+m},\ B_{nl-nm},\ B_{nl+n^2m}$$

beziehungsweise die Zahlen

$$0,\ 1,\ \frac{1}{n},\ -1,\ n.$$

Diese Punkte haben aber, wie aus 66) zu erkennen ist, zuerst die Zahlen

$$\frac{nl}{n},\ \frac{nl+nm}{n},\ \frac{nl+m}{n},\ \frac{nl-nm}{n},\ \frac{nl+n^2m}{n},$$

d. h. nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen die Zahlen

$$l,\ l+m,\ \frac{nl+m}{n},\ l-m,\ l+nm$$

erhalten. Somit ergibt sich der Satz:

69) *Existiert der Punkt* $\frac{1}{n}$, *und wird nachher unter Belassung des Punkts* ∞ *der Punkt* l *mit* 0, *und der Punkt* $l+m$ *mit* 1 *bezeichnet, so erhalten die früheren Punkte* $\frac{ln+m}{n}$, $l-m$, $l+nm$ *beziehungsweise die neuen Zahlen* $\frac{1}{n}$, -1, n.

Hierin liegt auch für $l=0$ die im Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Tatsache.

§ 27.

Kennzeichnung der jetzt zunächst zu beweisenden Beziehung.

Vor allem muß nun die Beziehung bewiesen werden, daß der Punkt, der durch -1 und $+1$ vom Punkt $+n$ harmonisch getrennt ist, die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{n}$ besitzt. Damit ist dann auch dargetan, daß der Punkt $\frac{1}{n}$ wirklich existiert. Diese Existenz und die genannte Beziehung folgen natürlich unter den im zweiten Abschnitt gemachten Voraussetzungen, zu denen das Stetigkeitsaxiom gehört, aus 56) und 57); jetzt sollen aber nur die Postulate I bis VI benutzt werden. Man nehme einmal an, es sei für eine bestimmte positive ganze Zahl n die Beziehung, die

wir allgemein erst beweisen wollen, bereits als richtig nachgewiesen und zwar für jede Wahl der Grundpunkte 0, 1, ∞. Die Beziehung muß dann auch gelten, wenn, unter Belassung des Punkts ∞, als Punkte 0 und 1 diejenigen gewählt werden, die vorher durch die ganzen Zahlen l und $l+m$ bezeichnet waren ($l \gtreqless 0$, $m \gtrless 0$). Nun werden aber dadurch die vorher mit $l-m$, $\frac{nl+m}{n}$, $l+m$, $l+nm$ bezeichneten Punkte nach Satz 69) zu den Punkten -1, $\frac{1}{n}$, $+1$, n. Es ergibt sich somit:

70) *Wenn für eine bestimmte positive ganze Zahl n und für jede Wahl der Grundpunkte der vierte harmonische Punkt zu -1, n, $+1$ die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{n}$ besitzt, so sind auch durch die Zahlen*

$$l-m, \quad \frac{nl+m}{n}, \quad l+m, \quad l+nm$$

*bei jeder Wahl der Grundpunkte vier harmonische Punkte vorgestellt. Dabei können für l und m beliebige reelle ganze Zahlen gesetzt werden.**)

§ 28.

Die einfachsten Fälle.

Zunächst sollen jetzt die Fälle $n=2$ und $n=3$ abgehandelt werden. Nachdem die Punkte 0, 1, ∞ irgendwie gewählt sind, suche man den vom Punkt 2 durch die Punkte -1 und $+1$ harmonisch getrennten Punkt. Dieser möge X heißen. Spiegelt man nun die vier Punkte ∞, 2, 1, 0 harmonisch in bezug auf -1 und $+1$, so erhält man der Reihe nach 0, X, 1, ∞, und es müssen diese Punkte nach Postulat VI (Schließungssatz) harmonisch sein, da jene vier Punkte nach der Definiton des Punkts 2 harmonisch sind. Es ist also X der harmonische Mittelpunkt von 0 und 1 in bezug auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt. Dieser harmonische Mittelpunkt ist aber der Punkt $\frac{1}{2}$; also ist wirklich der von 2 durch -1 und $+1$ harmonisch getrennte Punkt der Punkt $\frac{1}{2}$.

Es werde jetzt der von 3 durch -1 und $+1$ harmonisch getrennte Punkt Y_1 genannt. Um zu beweisen, daß dieser die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{3}$ besitzt, wäre zu zeigen, daß ein weiterer Punkt Y_2 so existiert, daß die Folge der Punkte

71) $$0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad 1$$

*) Für $m=0$ fallen die vier Punkte zusammen und sind nach III als harmonisch anzusehen.

eine in bezug auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt harmonische ist. Es müßte dann dem Punkt Y_2 nach § 25 die Zahl $\frac{2}{3}$ zukommen. Spiegelt man nun harmonisch in bezug auf -1 und $+1$, so müßte der Punkt Y_1 wieder den Punkt 3 ergeben, und man kommt, indem man die zu beweisende Beziehung auch auf gebrochene Zahlen ausdehnt, zu der *Vermutung*, daß Y_2 den Punkt $\frac{3}{2}$ ergeben wird, so daß aus der Folge 71) durch die Spiegelung die Folge der Punkte

72) $$\infty,\ 3,\ \frac{3}{2},\ 1$$

hervorginge, die in bezug auf den Spiegelpunkt des Punkts ∞, d. h. in bezug auf den Punkt 0, als Fluchtpunkt eine harmonische sein müßte (Satz 29)).

Wir verlassen jetzt diese vorläufige Betrachtung und gehen umgekehrt von der Folge 72) aus. In dieser soll die Zahl $\frac{3}{2}$ den in § 25 auf völlig bestimmte Weise definierten Punkt bezeichnen. Wir werden gleich nachher beweisen, daß diese Folge 72) tatsächlich in bezug auf 0 als Fluchtpunkt harmonisch ist. Spiegelt man nun die Folge 72) harmonisch in bezug auf -1 und $+1$ und *definiert man jetzt Y_2 als den Spiegelpunkt des Punkts $\frac{3}{2}$*, so ergibt sich eine für den Fluchtpunkt ∞ harmonische Folge $0, Y_1, Y_2, 1$. Daraus folgt jetzt in der Tat, daß der Punkt Y_1 der Punkt $\frac{1}{3}$ sein muß, wobei zugleich der Punkt Y_2 die Zahl $\frac{2}{3}$ erhält.

Um nun noch zu beweisen, daß die Folge 72) für den Punkt 0 als Fluchtpunkt harmonisch ist, muß man zeigen, daß erstens der Punkt 3 durch die Punkte ∞ und $\frac{3}{2}$, und zweitens $\frac{3}{2}$ durch 3 und 1 harmonisch von 0 getrennt wird. Den ersten Teil ersieht man aus der Folge der Punkte

73) $$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{6}{2},\ \frac{9}{2},\ \cdots,\ \frac{3\mu}{2},\ \cdots,$$

die nach der in § 25 gegebenen Definition des Punkts $\frac{m}{n}$ und nach Satz 28) eine für den Punkt ∞ als Fluchtpunkt harmonische ist. Es ist hier nach § 25 der Punkt $\frac{6}{2}$ identisch mit dem Punkt 3, und es zeigen somit die drei ersten Glieder von 73), daß $\frac{3}{2}$ von ∞ durch 0 und 3 harmonisch getrennt wird. Der zweite Teil ergibt sich aus 70), wenn $n = 2$, $l = 2$, und $m = -1$ gesetzt wird, was erlaubt ist, da ja die Punkte $-1, \frac{1}{n}, +1, n$ für $n = 2$ schon als harmonisch nachgewiesen sind. Damit ist für $\frac{1}{3}$ das zu Beweisende gezeigt.

§ 29.

Allgemeiner Beweis der erwähnten Beziehung und der Existenz der harmonischen Teilung.

Um zu dem allgemeinen Beweis zu gelangen, nehme man an, es sei für alle positiven ganzen Zahlen n, die $\leqq \nu$ sind, bereits bewiesen, daß der von -1 und $+1$ durch n harmonisch getrennte Punkt die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{n}$ besitze, und daß dies für jede Wahl der drei Grundpunkte gelte. Nun betrachte man die mit der Folge 72) des vorigen Paragraphen analoge Folge von Punkten

$$74)\qquad \infty,\ \nu+1,\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{3},\cdots,\frac{\nu+1}{\nu-1},\ \frac{\nu+1}{\nu},\ 1.$$

Jeder dieser Punkte hat nach § 25 eine völlig bestimmte Bedeutung, da ja die Existenz der Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{\nu}$ bereits vorausgesetzt wird; es kann aber der letzte Punkt 1 nicht als $\frac{\nu+1}{\nu+1}$ geschrieben werden, da die Existenz des Punkts $\frac{1}{\nu+1}$ erst gezeigt werden soll. Hat man nun nachgewiesen, was gleich nachher geschehen soll, daß die Folge 74) in bezug auf den Punkt 0 als Fluchtpunkt eine harmonische ist, so muß die aus ihr durch Spiegelung in Beziehung auf die Punkte -1 und $+1$ hervorgehende Folge, die

$$0,\ Z_1,\ Z_2,\cdots,Z_{\nu-1},\ Z_\nu,\ 1$$

heißen mag, nach 29) auch eine harmonische sein und zwar in Beziehung auf den Spiegelpunkt des Punkts 0, d. h. in Beziehung auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt. Daraus geht aber hervor, daß der Punkt Z_1, d. h. der von $\nu+1$ durch -1 und $+1$ harmonisch getrennte Punkt, die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{\nu+1}$ besitzt. Damit ist dann die Gültigkeit der zu beweisenden Beziehung unter der Voraussetzung, daß sie für $n \leqq \nu$ gilt, auch für $n = \nu + 1$ gezeigt, und die Beziehung muß also allgemein für jede positive ganze Zahl n gelten, da sie für $n = 2$ und $n = 3$ richtig ist (§ 28).

Es fehlt noch der Beweis dafür, daß die Punktfolge 74) für den Punkt 0 als Fluchtpunkt harmonisch ist. Setzt man nun in 70) die Zahlen $l = 0$ und $m = \nu + 1$, so ergibt sich, daß der von $n(\nu+1)$ durch $-(\nu+1)$ und $+(\nu+1)$ harmonisch getrennte Punkt die Zahl $\frac{\nu+1}{n}$ erhält; dabei darf $n = 1, 2, 3, \cdots, \nu$, aber zunächst nicht $n > \nu$ gesetzt werden, da nur für $n \leqq \nu$ die zu beweisende Beziehung als richtig vorausgesetzt

wird, und deshalb nur auf solche n der Satz 70) angewendet werden kann. Spiegelt man also die Folge der Punkte

75) $$0,\ 1(\nu+1),\ 2(\nu+1),\ \cdots,\ (\nu-1)(\nu+1),\ \nu(\nu+1)$$

harmonisch in Beziehung auf die Punkte $-(\nu+1)$ und $\nu+1$, so erhält man der Reihe nach die Punkte

76) $$\infty,\ \frac{\nu+1}{1},\ \frac{\nu+1}{2},\ \ldots,\ \frac{\nu+1}{\nu-1},\ \frac{\nu+1}{\nu},$$

und es ist somit, da 75) eine für den Fluchtpunkt ∞ harmonische Folge ist (Satz 28)), die Folge 76) harmonisch für den Fluchtpunkt 0. Damit ist bereits zum Teil gezeigt, was von der obigen Folge 74) bewiesen werden soll. Es ist nur noch der Beweis dafür nötig, daß auch $\frac{\nu+1}{\nu}$ der harmonische Mittelpunkt von $\frac{\nu+1}{\nu-1}$ und 1 ist in Beziehung auf den Fluchtpunkt 0, d. h. es muß noch gezeigt werden, daß die Punkte

77) $$\frac{\nu+1}{\nu-1},\ \frac{\nu+1}{\nu},\ 1,\ 0$$

harmonisch sind. Da nun die Betrachtungen von § 25 für $n_1 = \nu - 1$ und $n_2 = \nu$ bereits gültig sein müssen, so können die vier Punkte 77) auch in der Form

$$\frac{\nu(\nu+1)}{\nu(\nu-1)},\ \frac{(\nu+1)(\nu-1)}{\nu(\nu-1)},\ \frac{\nu(\nu-1)}{\nu(\nu-1)},\ 0$$

geschrieben werden. Dies sind aber die Punkte, die, falls unter Belassung der Punkte 0 und ∞ der Punkt $\frac{1}{\nu(\nu-1)}$ zum Punkt 1 gemacht wird, die Zahlen

78) $$\nu^2+\nu,\ \nu^2-1,\ \nu^2-\nu,\ 0$$

erhalten (§ 25). Setzt man jetzt in 70) die Zahl $n=\nu$, was erlaubt ist, und nimmt man dabei $l=\nu^2$ und $m=-\nu$, so ergibt sich, daß die Punkte 78) in der Tat harmonisch sind. Damit ist das gezeigt, was oben noch fehlte. Man findet also den Satz:

79) *Für jede positive ganze Zahl n besitzt der vom Punkt n durch -1 und $+1$ harmonisch getrennte Punkt die Eigenschaft des Punkts $\frac{1}{n}$. Es existiert somit stets der Punkt $\frac{1}{n}$.*

Jetzt ergibt sich auch, daß die in Satz 70) (§ 27) genannten vier Zahlen für den Fall, daß n *irgend* eine positive ganze Zahl ist, harmonische Punkte darstellen. Bedenkt man noch, daß sich nur die Punkte des einen konjugierten Paars vertauschen, wenn man $-n$ für n und gleichzeitig $-m$ für m setzt, so erkennt man, daß die in 70) genannten Zahlen

auch für ein negatives n harmonische Punkte ergeben. Da dies bei richtiger Interpretation auch für $n = 0$ gilt, in welchem Fall wir aber $m \neq 0$ annehmen wollen, so findet man den Satz:

80) *Bedeuten l und n beliebige ganze Zahlen* ($l \gtreqless 0$, $n \gtreqless 0$), *und ist m eine von Null verschiedene ganze Zahl* ($m \gtrless 0$), *so sind bei jeder Wahl der drei Grundpunkte die Punkte*

$$l - m, \quad \frac{nl + m}{n}, \quad l + m, \quad l + nm$$

harmonisch.

§ 30.

Allgemeine Bedingung der harmonischen Lage für die rationalen Punkte.

Im vorigen Paragraphen waren die endlich ausgedehnten Punktfolgen 75) und 76) Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Punkte $-(\nu + 1)$ und $\nu + 1$. Nimmt man nun statt 75) die nach beiden Seiten unendliche Punktfolge

81) $\cdots, l+(-3)\cdot m, \; l+(-2)\cdot m, \; l+(-1)\cdot m, \; l, \; l+1\cdot m, \; l+2\cdot m, \; l+3\cdot m, \cdots,$

in der l eine beliebige ganze Zahl ($l \gtreqless 0$), und m eine positive ganze Zahl bedeuten soll, so ist diese nach Satz 28) eine in ihrer ganzen Ausdehnung in bezug auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt harmonische Folge. Spiegelt man die Punkte dieser Folge harmonisch in Beziehung auf $l - m$ und $l + m$, so erhält man nach dem jetzt allgemein bewiesenen Satz 80) die nach beiden Seiten unendliche Folge

82) $\cdots, \frac{-3l+m}{-3}, \; \frac{-2l+m}{-2}, \; \frac{-l+m}{-1}, \; \infty, \; \frac{l+m}{1}, \; \frac{2l+m}{2}, \; \frac{3l+m}{3}, \cdots.$

Es ist der Punkt l in den Punkt ∞, und deshalb auch der Punkt ∞ in den Punkt l gespiegelt worden. Die Folge 82) muß nach Satz 29) in Beziehung auf den Punkt, in den der Fluchtpunkt ∞ der Reihe 81) gespiegelt worden ist, d. h. also in Beziehung auf den Punkt l, als Fluchtpunkt harmonisch sein.*) Man greife nun aus 82) drei in der Folge

---

*) Die Tatsache, daß die Folge $\infty, \frac{l+m}{1}, \frac{2l+m}{2}, \frac{3l+m}{3}, \cdots$ für den Punkt l als Fluchtpunkt harmonisch ist, entspricht dem von de Paolis (Atti della R. Accad. d. Linc. Ser. III, Mem. d. Cl. d. Sc. Fis. Mat. e Nat. Vol. IX, p. 495 Nr. 20) mit Hilfe von Betrachtungen in der Ebene abgeleiteten Ergebnis, daß in der Punktfolge $ADC^{(1)}C^{(2)}C^{(3)}\cdots$, die für B als Fluchtpunkt harmonisch ist, der Punkt $C^{(n-1)}$ mit dem ersten Teilpunkt einer für den Fluchtpunkt A konstruierten harmonischen n-Teilung der Strecke BD übereinstimmen muß. Dabei können die Betrachtungen

äquidistante Punkte heraus, die so, wie sie in 82) vorkommen, oder auch umgekehrt geordnet werden können.*) Die drei Punkte lassen sich dann offenbar in der Form

$$\frac{(h-k)\,l+m}{h-k}, \quad \frac{hl+m}{h}, \quad \frac{(h+k)\,l+m}{h+k}$$

ansetzen, wobei für die ganzen Zahlen h und k gilt, daß $h \gtreqless 0$, und $k \gtrless 0$ sein kann. Von diesen Punkten ist der an zweiter Stelle genannte nach Satz 27) der harmonische Mittelpunkt der beiden anderen in bezug auf den Punkt l als Fluchtpunkt. Es sind also die vier Punkte

$$83) \qquad \frac{(h-k)\,l+m}{h-k}, \quad l, \quad \frac{(h+k)\,l+m}{h+k}, \quad \frac{hl+m}{h}$$

harmonisch, was nach der Art, wie das Resultat aus der Folge 82) hergeleitet worden ist, auch dann, wenn eine der Zahlen $h-k$, h, $h+k$ gleich 0 ist, noch gilt.

Nun müssen aber auch die vier Punkte harmonisch sein, die dann die Zahlen 83) erhalten, wenn unter Belassung der Punkte 0 und ∞ der Punkt mit 1 bezeichnet wird, dem bis jetzt die Zahl $\frac{1}{n}$ zukam. Dabei ist n ganz und positiv zu denken. Die soeben genannten vier Punkte

---

von de Paolis (vergl. die Bemerkung von Fano im Giornale di Matematiche vol. XXX, p. 127, Anm.) vom Stetigkeitsaxiom unabhängig gemacht werden. Man denke sich nämlich eine auf den Fluchtpunkt A sich beziehende harmonische Folge

$$B C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_2 C_1 D$$

gegeben. Da nun die Punkte $A B C_{n-1} D$ in der Ebene durch mehrmalige Projektion in $B A D C_{n-1}$ übergeführt werden können, so muß sich C_{n-1} aus B, A und D gerade so durch Konstruktionen vierter harmonischer Punkte herleiten lassen, wie D aus A, B und C_{n-1}. Es muß also, weil D der $n+1^{\text{te}}$ Punkt der mit A als Fluchtpunkt und aus B und C_{n-1} als Anfangsgliedern bestimmten harmonischen Folge $B C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_2 C_1 D$ ist, C_{n-1} der $n+1^{\text{te}}$ Punkt der Folge sein, die sich aus B als Fluchtpunkt und aus A und D als Anfangsgliedern als harmonisch bestimmen läßt. Bezeichnet man diese letzte Folge mit $A D C^{(1)} C^{(2)} C^{(3)} \ldots$, so muß $C^{(n-1)}$ mit C_{n-1} zusammenfallen, w. z. b. w. Dadurch ist auch mit Hilfe der Tatsachen der Ebene unabhängig vom Stetigkeitsaxiom gezeigt, daß nur *eine* harmonische n-Teilung einer gegebenen Strecke für einen gegebenen Fluchtpunkt existieren kann. Die Überlegung läßt sich auch umgekehrt so anstellen, daß man, ohne die Existenz einer solchen n-Teilung vorauszusetzen, von der harmonischen Folge $A D C^{(1)} C^{(2)} C^{(3)} \ldots$ ausgeht, deren Fluchtpunkt B ist, und nun gerade so wie vorhin beweist, daß für den Punkt $C^{(n-1)}$ eine Folge $B C^{(n-1)} C_{n-2} C_{n-3} \cdots C_2 C_1 D$ existiert, die für A als Fluchtpunkt harmonisch ist, woraus folgt, daß $C^{(n-1)}$ die Bedeutung des Teilpunkts besitzt. Man vergleiche auch hierzu S. 195 Anm.

*) Diese Betrachtung ist mit Nr. 34 von de Paolis (a. a. O. p. 499) analog.

erhalten aber nach § 25 (S. 222) für die ursprünglichen Punkte 0, 1, ∞ die Zahlen:

$$84)\quad \lambda_1 = \frac{(h-k)l+m}{(h-k)n},\quad \lambda_2 = \frac{l}{n},\quad \lambda_3 = \frac{(h+k)l+m}{(h+k)n},\quad \lambda_4 = \frac{hl+m}{hn}.$$

Es sind also vier Punkte immer harmonisch, wenn sie für irgend drei Grundpunkte durch Zahlen von der Form 84) *vorgestellt sind.*

Jetzt sollen λ_1, λ_2, λ_3 nicht mehr die Ausdrücke 84), sondern drei verschiedene Rationalzahlen, die vorgegeben sind, bezeichnen; dabei soll eine der Zahlen λ_1 und λ_3 auch gleich ∞ sein dürfen, λ_2 aber endlich sein. Man erkennt leicht, daß die Zahlen l, m, h, k, n den Bedingungen der vorigen Betrachtung gemäß, d. h. so, daß sie ganz sind, und dabei $m>0$, $k\neq 0$, und $n>0$ ist, und zugleich so gefunden werden können, daß

$$85)\quad \lambda_1 = \frac{l}{n} + \frac{m}{(h-k)n},\quad \lambda_2 = \frac{l}{n},\quad \lambda_3 = \frac{l}{n} + \frac{m}{(h+k)n},$$

und es ist dann der vierte harmonische zu den Punkten λ_1, λ_2, λ_3 der Punkt

$$86)\quad \lambda_4 = \frac{l}{n} + \frac{m}{hn}.$$

Dieser vierte harmonische Punkt ist also auch ein rationaler; es muß aber hier wieder das Symbol ∞ zugelassen und als rationale Zahl angesehen werden, da in dem Fall, daß $h=0$ ist, $\lambda_4 = \infty$ herauskommt. Aus den Gleichungen 85) und 86) ergibt sich nun die Relation

$$87)\quad \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\right),$$

die, sinngemäß gedeutet, auch für $h=0$ und $\lambda_4 = \infty$ gültig ist, in diesem Fall aber nichts anderes als die Bedingung

$$88)\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)$$

bedeutet. Da ferner die Zahl λ_4 aus den gegebenen Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 mit Hilfe von 87) eindeutig berechnet werden kann, muß auch stets ein der Gleichung 87) genügender Punkt der vierte harmonische zu λ_1, λ_2, λ_3 sein. Es ist also, *wenn λ_2 endlich ist**), die Gleichung 87) für die harmonische Lage der vier rationalen Punkte notwendig und hinreichend.

Ist nun aber von den gegebenen Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 die Zahl $\lambda_2 = \infty$, so ergibt eine entsprechende Anwendung von 88), daß die Bedingung für den vierten harmonischen Punkt durch

$$89)\quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)$$

---

*) Ist $\lambda_2 = \infty$, so würde die Gleichung 87) für jedes λ_1, λ_3, λ_4 in gewissem Sinn erfüllt sein.

gegeben sein muß. Rechnet man jetzt die für die harmonische Lage gefundenen Bedingungen um, so findet man als allgemeines Resultat:

90) *Zu drei verschiedenen rationalen Punkten, deren Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sein mögen, ist der vierte harmonische ein gleichfalls rationaler Punkt mit der Zahl* λ_4, *und es ergibt sich dieser stets aus der Relation*

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_3-\lambda_4}=-1.$$

Dabei ist auch der Punkt ∞ *als rationaler Punkt zu rechnen, und die linke Seite der Relation in einem solchen Fall durch einen Grenzübergang zu deuten. Das Bestehen der Relation ist für die harmonische Lage von vier verschiedenen rationalen Punkten notwendig und hinreichend.*

§ 31.

Änderung der Grundpunkte innerhalb des Systems der rationalen Punkte. Doppelverhältnis in diesem System.

An Stelle der ursprünglichen Grundpunkte A_0, A_1, F sollen jetzt drei *in Beziehung auf sie rationale*, verschiedene und sonst beliebige Punkte $\mathsf{\Lambda}_0$, $\mathsf{\Lambda}_1$, $\mathsf{\Lambda}_\infty$ eingeführt werden, denen in Beziehung auf die ursprünglichen Grundpunkte die Zahlen λ_0, λ_1, λ_∞ zukommen. Zu diesem Zweck werde die harmonische Folge

91) $$\cdots \mathsf{\Lambda}_{-2}\mathsf{\Lambda}_{-1}\mathsf{\Lambda}_0\mathsf{\Lambda}_1\mathsf{\Lambda}_2 \cdots$$

gebildet, die sich auf $\mathsf{\Lambda}_\infty$ als Fluchtpunkt bezieht, und in ihr jedes Intervall in bezug auf diesen Fluchtpunkt harmonisch in n Teile geteilt, wodurch die Folge

92) $$\cdots \mathsf{K}_{-2}\mathsf{K}_{-1}\mathsf{K}_0\mathsf{K}_1\mathsf{K}_2 \cdots$$

entsteht. Diese Folge, in der allgemein der Punkt $\mathsf{K}_{n\mu}$ mit $\mathsf{\Lambda}_\mu$ zusammenfällt, ist nach 33) eine gleichfalls für $\mathsf{\Lambda}_\infty$ als Fluchtpunkt harmonische. Werden nun in der neuen Zahlbenennung den Punkten $\mathsf{\Lambda}_0$, $\mathsf{\Lambda}_1$, $\mathsf{\Lambda}_\infty$ die Zahlen 0, 1, ∞ erteilt, so heißt dies, daß in der Reihe 92) die Punkte K_0 und K_n die Zahlen 0 und 1, und der Fluchtpunkt der Reihe die Zahl ∞ bekommt; daraus folgt, daß nunmehr K_1 mit $\frac{1}{n}$, und K_m für $m \gtreqless 0$ mit $\frac{m}{n}$ zu bezeichnen ist. Insbesondere bekommen also die Punkte K_{-n}, K_1, K_n, K_{n^2} die Zahlen -1, $\frac{1}{n}$, 1, n und sind deshalb nach 79) vier harmonische Punkte.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Punkte 92), die für die neuen Grundpunkte rational sind, auch rational sind für die alten Grundpunkte A_0, A_1, F. Man erkennt dies zuerst für die Punkte $\mathsf{\Lambda}$ der Folge 91). Es kommen nämlich den Punkten $\mathsf{\Lambda}_0$, $\mathsf{\Lambda}_1$ und dem Fluchtpunkt $\mathsf{\Lambda}_\infty$ von

91) für die alten Grundpunkte die *rationalen* Zahlen λ_0, λ_1 und λ_∞ zu. Berechnet man nun die auf die alten Grundpunkte sich beziehenden Zahlen von $\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \cdots$ und von $\mathsf{A}_{-1}, \mathsf{A}_{-2}, \cdots$ sukzessive mit Rücksicht auf den Umstand, daß A_2 von A_0 durch A_1 und A_∞, daß A_3 von A_1 durch A_2 und A_∞ harmonisch getrennt ist, usw., so müssen sich nach 90) für alle Punkte A in bezug auf die alten Grundpunkte rationale Zahlen ergeben. Dies gilt also auch für die Punkte A_{-1}, A_n und A_1, die mit K_{-n}, K_n, und K_n übereinstimmen, und somit auch für den vierten harmonischen Punkt K_1 dieser Punkte. Da nun K_0, K_1 und der Fluchtpunkt A_∞ der harmonischen Folge 92) für die alten Grundpunkte rational sind, so kann man wieder gerade so wie bei der Folge 91) schließen, und man findet, *daß auch alle Punkte von* 92) *rational sind für die alten Grundpunkte.*

Es kommt also jedem Punkt K_μ in bezug auf die alten Grundpunkte A_0, A_1, F nach der Definition von § 25 eine rationale Zahl zu, die $\varkappa_\mu$ heißen soll. Die Eigenschaft der Folge 92), daß $\mathsf{K}_{\mu-1}$ von $\mathsf{K}_{\mu+1}$ durch K_μ und A_∞ harmonisch getrennt wird, ist vermöge der für rationale Punkte bewiesenen Gleichung 87) durch die Formel

$$93)\qquad \frac{1}{\varkappa_\mu - \lambda_\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varkappa_{\mu-1} - \lambda_\infty} + \frac{1}{\varkappa_{\mu+1} - \lambda_\infty}\right)$$

ausgedrückt, vorausgesetzt, daß λ_∞ eine endliche Zahl ist; ist $\lambda_\infty = \infty$, so ist die Eigenschaft nach 89) durch

$$94)\qquad \varkappa_\mu = \frac{1}{2}(\varkappa_{\mu-1} + \varkappa_{\mu+1})$$

gegeben. Bezeichnet man zur Abkürzung, falls λ_∞ endlich ist, den Ausdruck

$$\frac{1}{\varkappa - \lambda_\infty}$$

mit $[\varkappa]$, während in dem Fall, daß $\lambda_\infty = \infty$ ist, unter $[\varkappa]$ einfach die Zahl $\varkappa$ selbst verstanden werden soll, so können die Relationen 93) und 94) in die Gleichung

$$[\varkappa_\mu] = \frac{1}{2}([\varkappa_{\mu-1}] + [\varkappa_{\mu+1}])$$

zusammengefaßt werden. Hieraus ergibt sich aber, daß jedenfalls die Zahlen

$$\cdots, [\varkappa_{-2}], [\varkappa_{-1}], [\varkappa_0], [\varkappa_1], [\varkappa_2], \cdots$$

eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden. Es gilt somit für jedes ganzzahlige $m \gtreqless 0$ die Gleichung

$$[\varkappa_m] = [\varkappa_0] + m([\varkappa_1] - [\varkappa_0]),$$

aus der noch folgt, daß auch

$$[\varkappa_m] = [\varkappa_0] + \frac{m}{n}([\varkappa_n] - [\varkappa_0])$$

ist.

Es bedeutete $\varkappa_m$ die alte Zahl des Punkts K_m, und diesem war für die neuen Grundpunkte (s. o.) die Zahl $\frac{m}{n}$ zugeordnet. Da nun $\frac{m}{n}$ mit Hilfe einer passenden Folge der Form 92) jeder vorgegebenen rationalen Zahl λ' gleichgemacht werden kann, ergibt sich allgemein, daß für einen Punkt, dem in Beziehung auf die neuen Grundpunkte die rationale Zahl λ' zukommt, auch die zugehörige alte Zahl λ rational ist (s. o.), und daß λ durch die Formel

95) $$[\lambda] = [\varkappa_0] + \lambda'([\varkappa_1] - [\varkappa_0])$$

gegeben ist. Bedenkt man noch die Übereinstimmung der Punkte K_0 und K_n mit Λ_0 und Λ_1, aus der sich $\varkappa_0 = \lambda_0$ und $\varkappa_n = \lambda_1$ ergibt, und erwägt man die Bedeutung des eingeführten Symbols $[\varkappa]$, so findet man den Satz:

96) *Werden die Punkte, die ursprünglich die rationalen Zahlen λ_0, λ_1, λ_∞ erhalten hatten, an Stelle der alten Grundpunkte eingeführt und beziehungsweise mit 0, 1, ∞ bezeichnet, und bedeutet λ' die neue — rationale — Zahl eines für die neuen Grundpunkte rationalen Punkts, so ist die alte Zahl λ dieses Punkts gleichfalls rational und zwar ist λ, falls λ_∞ endlich ist, durch*

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_\infty} = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_\infty} + \lambda'\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_\infty} - \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_\infty}\right),$$

falls aber

$$\lambda_\infty = \infty$$

*ist, durch**)

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda'(\lambda_1 - \lambda_0)$$

gegeben.

Man kann die Beziehung zwischen λ und λ' in die Formel

97) $$\lambda' = \frac{\lambda_\infty - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} : \frac{\lambda_\infty - \lambda}{\lambda_0 - \lambda}$$

umrechnen, deren rechte Seite unter Umständen mit Hilfe eines Grenzübergangs zu deuten ist. Der spezielle Fall, in dem $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_\infty = 0$

---

*) Diese Formel, die sich auf die Änderung der Punkte 0 und 1 bei gleich bleibendem Punkt ∞ bezieht, ersetzt die von M. Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (1882), S. 164 ff. gegebene Theorie der „Indizes" (Doppelverhältnisse) für den Fall, daß das „Grenzelement", d. h. der Fluchtpunkt, derselbe bleibt. Pasch benutzt dabei den von ihm eingeführten, auf die Tatsachen der Ebene gegründeten Begriff äquivalenter Strecken (vergl. S. 199 Anm. der vorliegenden Arbeit). Es ist zu bemerken, daß man auf Grund dieses Begriffs auch die irrationalen Punkte der Skala von Anfang an mit einbeziehen kann, indem die Strecken der Geraden mit Rücksicht auf den Äquivalenzbegriff und auf die Anordnungstatsachen der Punkte in bezug auf einen gegebenen Fluchtpunkt die Größenaxiome erfüllen, d. h. sich als sogenannte „meßbare Größen" erweisen (vergl. hier S. 163, letzte Anm.).

ist, d. h. der Fall, in dem *die mit* 0 *und* ∞ *bezeichneten Punkte ihre Rolle tauschen*, während der Punkt 1 derselbe bleibt, ist noch hervorzuheben; es ist in diesem Fall*)

98) $$\lambda \lambda' = 1.$$

Läßt man jetzt λ' alle rationalen Zahlen mit Einschluß des Symbols ∞ annehmen, während die Zahlwerte λ_0, λ_1 und λ_∞ festgehalten werden, so ersieht man aus 96), daß *auch* λ *alle rationalen Werte mit Einschluß von* ∞ *erhält*, und es ergibt sich:

99) *Nimmt man aus den rationalen Punkten, zu denen auch der Punkt* ∞ *gerechnet wird, irgend drei verschiedene heraus und bezeichnet nunmehr diese in irgend einer Ordnung mit* 0, 1, ∞, *so ist die Gesamtheit der in bezug auf diese neuen Grundpunkte rationalen Punkte identisch mit der Gesamtheit der früheren rationalen Punkte. Insbesondere sind auch die früheren Grundpunkte in bezug auf die neuen Grundpunkte rational.*

Wird nun als *Doppelverhältnis* $(\Lambda_\infty \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda)$ die Zahl definiert, die der Punkt Λ dann erhält, wenn die Punkte Λ_∞, Λ_1, Λ_0 beziehungsweise mit $\infty, 1, 0$ bezeichnet werden, so haben vier verschiedene, in bezug auf drei Grundpunkte A_0, A_1, F rationale Punkte, die in einer bestimmten Ordnung gegeben sind, stets ein bestimmtes, von 0, 1 und ∞ verschiedenes und zwar rationales Doppelverhältnis. Sind dabei λ_∞, λ_1, λ_0, λ die Zahlen der Punkte Λ_∞, Λ_1, Λ_0, Λ, wobei die Zahlen sich auf die ursprünglichen Grundpunkte A_0, A_1, F oder auch auf irgend drei aus dem System der rationalen Punkte ausgewählte neue Grundpunkte beziehen können, so ist die Zahl λ', die dem Punkt Λ dann zukommt, wenn die Punkte Λ_0, Λ_1, Λ_∞ mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden, durch die Formel 97) gegeben. Es ergibt sich somit:

100) *Das Doppelverhältnis* $(\Lambda_\infty \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda)$ *von vier rationalen Punkten ist durch den Ausdruck:*

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} : \frac{\lambda_\infty - \lambda}{\lambda_0 - \lambda},$$

beziehungsweise durch einen seiner Grenzwerte, bestimmt, falls λ_∞, λ_1, λ_0, λ *in Beziehung auf irgend drei rationale Grundpunkte die Zahlen der Punkte*

---

*) Die Formel 98) wird in den Arbeiten, die von den Tatsachen der Ebene ausgehen, meist auf den Umstand gegründet, daß vier Punkte *ABCD* einer Geraden indirekt in *BADC* projiziert werden können (vergl. Amodeo, Atti d. R. Accad. d. Scienze di Torino vol. XXVI, p. 759, Pasch, a. a. O. S. 171, Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, I. Bd., 1893, S. 115). Bei Klein (Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie I, 1893, S. 343) ist für den Punkt $\frac{1}{3}$ eine Konstruktion gegeben, die, wenn sie nach Vertauschung der Punkte 0 und ∞ angewendet wird, unmittelbar den früheren Punkt 3 ergibt.

Λ_∞, Λ_1, Λ_0, Λ bedeuten, wobei von den Zahlen auch eine gleich ∞ sein kann. Das Doppelverhältnis ist für vier in der angeführten Ordnung harmonische Punkte und nur für solche gleich -1 *und ist positiv, beziehungsweise negativ, je nachdem der vierte Punkt vom zweiten durch den ersten und dritten nichtgetrennt oder getrennt ist* (vgl. 90) und den Schluß von § 25).

§ 32.

Das allgemeine harmonische Punktsystem und die rationalen Zahlen.

Die hinsichtlich der Folge 92):

$$\cdots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \cdots$$

auf S. 232, 233 angestellte Betrachtung läßt zugleich erkennen, daß jeder Punkt dieser Folge aus Λ_0, Λ_1, Λ_∞ lediglich durch eine Anzahl von Konstruktionen vierter harmonischer Punkte abgeleitet werden kann. Bezeichnet man Λ_0, Λ_1, Λ_∞ der Reihe nach mit 0, 1, ∞, so bekommt nach dem Verfahren von § 25 der Punkt K_m, wie in § 31 gezeigt worden ist, die Zahl $\frac{m}{n}$. Nun könnte aber jede positive ganze Zahl n zur Bildung der Folge 92) verwendet werden, und man erkennt jetzt, daß jeder Punkt, der als ein rationaler sich ergibt, wenn Λ_0, Λ_1, Λ_∞ mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden, sich auch aus diesen drei Punkten durch sukzessive Konstruktionen vierter harmonischer Punkte ableiten läßt. Es können aber durch solche Konstruktionen auch keine anderen Punkte erhalten werden. Berechnet man nämlich die Zahl eines mit den Punkten 0, 1, ∞ in irgend einer Anordnung harmonischen Punkts und schreitet dann zur Berechnung der Zahlen weiterer vierter harmonischer Punkte fort, so läßt die Relation 90) erkennen, daß man aus dem Bereich der rationalen Zahlen nicht herauskommen kann. Somit gilt mit Rücksicht auf die in § 14 gegebene Definition der Satz:

101) *Das aus irgend drei verschiedenen Punkten gebildete allgemeine harmonische Punktsystem fällt zusammen mit der Gesamtheit derjenigen Punkte, die dann, wenn jene drei irgendwie mit* 0, 1, ∞ *bezeichnet werden, nach dem Verfahren von* § 25 *rationale Zahlen erhalten.*

Bildet man jetzt aus drei Punkten Λ_0, Λ_1, Λ_∞ ein allgemeines harmonisches Punktsystem Σ, greift aus diesem System drei Punkte M_0, M_1, M_∞ heraus und ordnet diesen der Reihe nach die Zahlen 0, 1, ∞ zu, so ist die Gesamtheit der Punkte der Geraden, die nach dem Verfahren von § 25 dadurch rationale Zahlen bekommen, nach 101) identisch mit der Gesamtheit der aus M_0, M_1, M_∞ durch sukzessive Konstruktionen harmonischer Punkt ableitbaren Punkte und zugleich nach 99) identisch mit dem System Σ.

Verteilt man nun so über die Punkte von Σ die sämtlichen rationalen Zahlen, denen wieder das Symbol ∞ zugerechnet wird, so erhält man eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten des Systems Σ und den rationalen Zahlen. Diese Zuordnung erfüllt *erstens* die Bedingung, daß beliebig viele Punkte des Systems in bezug auf den Punkt ∞ untereinander so wie ihre Zahlen geordnet liegen (vgl. den Schluß von § 25), *zweitens* die Bedingung, daß vier harmonischen Punkten solche Zahlen entsprechen, deren Doppelverhältnis gleich -1 ist. Dabei ist das Doppelverhältnis der Zahlen durch den Ausdruck 100), beziehungsweise, wenn eine der Zahlen ∞ ist, durch einen entsprechenden Grenzwert dieses Ausdrucks definiert. Es ist aber die Zuordnung der Punkte des Systems und der rationalen Zahlen durch die Wahl der Punkte M_0, M_1, M_∞ und *durch einen Teil der zweiten Bedingung allein schon bestimmt, nämlich dadurch, daß die Zahl eines Punktes, der von M_∞ durch zwei andere harmonisch getrennt ist, das arithmetische Mittel ist von den Zahlen der beiden Punkte* (vgl. 89)). Diese Teilbedingung ergibt ja, wenn $M_0 A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1} M_1$ eine für M_∞ als Fluchtpunkt harmonische Folge ist, und wenn A_1 die Zahl ξ zukommt, daß $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, M_1$ die Zahlen $2\xi, 3\xi, \cdots, (n-1)\xi, n\xi$ erhalten. Infolgedessen muß $n\xi = 1$, und $\xi = \frac{1}{n}$ sein, und es bekommt, wenn die Folge der Punkte A beiderseits ins Unendliche fortgesetzt wird, allgemein A_m für $m \gtreqless 0$ die Zahl $\frac{m}{n}$. Nach den Sätzen 99) und 101) ergeben sich aber so, für alle positiven Zahlen n und alle positiven und negativen Zahlen m, alle Punkte des Systems Σ, so daß also die Zuordnung völlig bestimmt ist.

Leitet man einen Punkt B des Systems Σ aus M_0, M_1, M_∞ dadurch ab, daß man eine Anzahl von Malen einen vierten harmonischen Punkt bestimmt, so kann man, wie schon bemerkt worden ist, sukzessive für die benutzten vierten harmonischen Punkte und so schließlich für B selbst die zugehörige Zahl nach 87), beziehungsweise 89), berechnen. Es ergibt sich aus der Ein-eindeutigkeit der nachgewiesenen Zuordnung, daß man für denselben Punkt B stets dieselbe Zahl erhält, wenn man ihn auf verschiedene Arten durch Konstruktionen vierter harmonischer Punkte ableitet. Man kann also auch mit Hilfe der Formel 87), beziehungsweise 89), erkennen, wann zwei solche Folgen von Konstruktionen denselben Punkt ergeben oder nicht.

§ 33.

Die Koordinate eines beliebigen Punktes definiert auf Grund der rationalen Punkte.

Bis jetzt sind in diesem Abschnitt nur die Postulate I bis VI vorausgesetzt worden. Es soll nun noch die *Tatsache der Dichtigkeit* für jedes allgemeine harmonische Punktsystem als gültig angenommen werden, ohne daß übrigens das Stetigkeitsaxiom gefordert werden soll. Nachdem wieder drei Grundpunkte A_0, A_1, F gewählt sind, denen der Reihe nach die Zahlen 0, 1, ∞ zukommen sollen, bestimmen sich die rationalen Punkte. Für einen von F verschiedenen, sonst beliebigen Punkt X der Geraden werden die rationalen Punkte so eingeteilt, daß in eine erste Klasse diejenigen kommen, die in bezug auf F als Fluchtpunkt auf der gleichen Seite von X liegen wie A_0 von A_1, welche Seite wir die negative nennen wollen; die anderen sollen in eine zweite Klasse gesetzt werden. Daß jede Klasse wirklich Punkte enthält, folgt aus der Tatsache der Dichtigkeit. Man erhält so auch eine Einteilung der positiven und negativen Rationalzahlen in eine erste und eine zweite Klasse, durch die eine — endliche — Zahl x, die Koordinate von X, definiert wird.*) Sind die Punkte X und X_1 voneinander verschieden, und liegt X in bezug auf F als Fluchtpunkt auf der negativen Seite von X_1, so gibt es vermöge der Tatsache der Dichtigkeit einen rationalen Punkt Λ, der, immer in bezug auf F, zwischen X und X_1 gelegen ist. Da nun Λ auf der positiven Seite von X und auf der negativen von X_1 sich befindet, so ist die zu Λ gehörende Rationalzahl für die durch X hervorgebrachte Einteilung der rationalen Zahlen eine Zahl der zweiten, für die durch X_1 hervorgebrachte eine solche der ersten Klasse; deshalb ist $x_1 > x$.**) *Es kommt also jedem Punkt eine Zahl zu, verschiedene Punkte erhalten verschiedene Zahlen, und es liegen in bezug auf den Punkt F, der die Zahl ∞ erhalten hat, die Punkte in der ihren Zahlen entsprechenden Anordnung. Insbesondere erhalten diejenigen Punkte die positiven Zahlen, die auf der gleichen Seite des mit* 0 *bezeichneten Punkts A_0 liegen, wie der Punkt A_1, der die Zahl* 1 *bekam.* Jeder rationale Punkt erhält die Zahl, der er vorher schon (§ 25) zugeordnet war.

Die Zahl x eines Punkts X kann jetzt auf doppelte Weise bestimmt werden: entweder durch das eben geschilderte Verfahren auf Grund der rationalen Punkte oder durch das im zweiten Abschnitt in § 17 geschilderte Verfahren auf Grund der dyadischen Punkte. In § 17 war von der Tatsache der Dichtigkeit der dyadischen Punkte, d. h. der Dichtigkeit des

*) Die analogen Betrachtungen in § 17 sind etwas ausführlicher dargestellt.

**) Vergl. S. 207, zweite Anm.

dyadisch harmonischen Punktsystems*) Gebrauch gemacht worden. Jetzt ist die Dichtigkeit des allgemeinen harmonischen Punktsystems vorausgesetzt. Bedenkt man aber, daß schon auf Grund der Postulate I bis VI nach § 25—§ 29 in bezug auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt die rationalen Punkte so wie ihre Zahlen geordnet liegen, bedenkt man ferner, daß zwischen je zwei Rationalzahlen eine dyadische Zahl gelegen ist, so erkennt man, daß auf Grund der Postulate I bis VI die Dichtigkeit des allgemeinen harmonischen Punktsystems und die des dyadisch harmonischen Punktsystems sich gegenseitig bedingen. Daß nun beide Bestimmungsweisen zu einem Punkt X dieselbe Zahl x liefern, folgt schon daraus, daß auch bei dem neuen Verfahren sich x geradeso in das System der dyadischen Zahlen einordnen muß, wie X in das System der dyadischen Punkte. Insbesondere bekommt also z. B. der in § 25 definierte Punkt $\frac{1}{3}$ auch nach dem Grenzverfahren von § 17 die Zahl $\frac{1}{3}$ zugeordnet.

Wird das Stetigkeitsaxiom postuliert (Postulat VII), so gibt es auch zu jeder Zahl einen Punkt, dem sie zugehört.**)

Wegen des Folgenden soll noch untersucht werden, in welchem Sinn sich die Zahl x des Punkts X ändert, wenn statt des Punkts A_1 ein anderer, nicht notwendig in bezug auf A_0, A_1 und F rationaler Punkt gewählt wird, der aber in Beziehung auf F auf derselben Seite von A_0 liegen soll wie A_1. Es werden dabei wieder nur die Axiome I bis VI, ohne das Stetigkeitsaxiom und ohne die Tatsache der Dichtigkeit, vorausgesetzt. Der Punkt, der an Stelle von A_1 tritt und nunmehr die Zahl 1 erhalten soll, während die mit 0 und ∞ bezeichneten Punkte A_0 und F dieselben bleiben, soll A_1' heißen, und wir wollen gleich annehmen, daß gerade A_1' in bezug auf F als Fluchtpunkt zwischen A_0 und A_1 liegt. Man vergleiche jetzt die für den Punkt ∞ als Fluchtpunkt harmonische Folge der Punkte

$$\ldots, \frac{-3}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots,$$

d. h. derjenigen Punkte, denen vorher die obengenannten Zahlen zugekommen waren, mit der gleichfalls für den Punkt ∞ harmonischen Folge der Punkte, die nunmehr dieselben Zahlen erhalten und die mit

$$\ldots, \left[\frac{-3}{n}\right], \left[\frac{-2}{n}\right], \left[\frac{-1}{n}\right], [0], \left[\frac{1}{n}\right], \left[\frac{2}{n}\right], \left[\frac{3}{n}\right], \ldots$$

bezeichnet werden mögen. Dabei bedeutet n irgend eine ganze positive Zahl. Da nun, immer in bezug auf F, der Punkt A_1' zwischen A_0 und A_1

*) Vergl. § 15 und den Schluß von § 16.

**) Vergl. die ausführliche analoge Darlegung in § 17.

gelegen sein sollte, d. h. also der Punkt $\left[\frac{n}{n}\right]$ zwischen den Punkten 0 und $\frac{n}{n}$ liegt, so ergibt der Hilfssatz 31) (§ 10), daß auch der Punkt $\left[\frac{1}{n}\right]$ zwischen 0 und $\frac{1}{n}$, und infolgedessen auch $\left[\frac{m}{n}\right]$ für jede ganze Zahl $m \gtrless 0$ zwischen 0 und $\frac{m}{n}$ gelegen ist.

Ist nun X irgend ein bestimmter Punkt der Geraden, so ergibt sich aus dem soeben Bewiesenen, daß für eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$, deren zugehöriger Punkt vorher in bezug auf F zwischen A_0 und X lag, dies auch nachher, nachdem der Punkt A_1' die Zahl 1 erhalten hat, für den Punkt $\left[\frac{m}{n}\right]$ noch gilt. Es wird also eine solche Rationalzahl $\frac{m}{n}$ trotz der Änderung des Punkts 1 in derjenigen von den beiden durch den Punkt X definierten Zahlenklassen bleiben, in der sie vorher war. Die Zahl $\frac{m}{n}$ hat dabei das Vorzeichen der ursprünglichen Koordinate x des Punkts X. Für eine Rationalzahl von demselben Vorzeichen, deren Punkt zuerst im Vergleich mit A_0 auf der anderen Seite des Punkts X lag, ist es aber denkbar, daß nachher ihr Punkt zwischen A_0 und X sich befindet, wodurch dann diese Rationalzahl die Klasse wechselt und zwar, wenn $x > 0$ ist, von der zweiten in die erste Klasse, wenn $x < 0$ ist, von der ersten in die zweite versetzt wird. Die rationalen Zahlen, deren Punkte zuerst auf der dem Punkt X entgegengesetzten Seite von A_0 lagen, behalten auch nachher diese Eigenschaft (s. o.) und bleiben in ihrer Klasse. Man erkennt jetzt mit Rücksicht auf die Tatsachen der Arithmetik, daß die durch die neue Einteilung der Rationalzahlen bestimmte neue Koordinate x' von X jedenfalls nur algebraisch vergrößert worden sein kann, wenn $x > 0$ ist, und nur algebraisch verkleinert, wenn $x < 0$ ist. Man gelangt so zu dem Satz:

102) *Wird die Koordinate eines und desselben Punkts für zwei Lagen des Punkts* 1, *die in bezug auf den Punkt* ∞ *auf derselben Seite des Punkts* 0 *liegen, bestimmt, so ist bei Zugrundelegung des Punkts* 1, *der zwischen dem Nullpunkt und dem anderen Punkt* 1 *gelegen ist, die Koordinate jedenfalls numerisch nicht kleiner als im anderen Fall.*

§ 34.

Transformationsformel für die Koordinate eines beliebigen Punkts bei beliebiger Verlegung der Grundpunkte. Doppelverhältnis.

Um die allgemeine Transformationsformel für eine Verlegung der Grundpunkte zu beweisen, kehren wir zunächst zur Gleichung 98) von § 31:

$$\lambda\lambda' = 1$$

zurück. In dieser Gleichung bedeutete λ die Koordinate eines für die alten Grundpunkte A_0, A_1 und F rationalen Punkts für diese Grundpunkte, und λ' die Koordinate desselben Punkts für den Fall, daß die Punkte 0 und ∞ ihre Rolle tauschen, während der Punkt 1 derselbe bleibt. Ist nun X irgend ein Punkt, der in bezug auf A_0, A_1, F eine irrationale Koordinate x besitzt, so seien mit ϱ die sämtlichen rationalen Zahlen bezeichnet, die das Vorzeichen von x besitzen und numerisch kleiner als x sind, und mit σ die sämtlichen rationalen Zahlen, die ebendasselbe Vorzeichen besitzen und numerisch größer als x sind. Die Punkte ϱ, d. h. die Punkte, denen für die Grundpunkte A_0, A_1 und F die Zahlen ϱ zukommen, sind dann die in bezug auf F zwischen A_0 und X gelegenen rationalen Punkte, die Punkte σ aber die, immer in bezug auf F, auf der anderen Seite von X wie A_0 gelegenen rationalen Punkte (§ 33, § 4). Es ist also der Punkt X zwischen den Punkten ϱ einerseits und den Punkten σ andererseits gelegen. Da nun den Punkten ϱ und den Punkten σ in der neuen Zahlbenennung beziehungsweise die Zahlen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\sigma}$ entsprechen, so muß (§ 33) in dieser Zahlbenennung zum Punkt X eine Zahl x' gehören, die zwischen den Zahlen $\frac{1}{\varrho}$ und den Zahlen $\frac{1}{\sigma}$ liegt. Eine solche Lage hält nur die Zahl $\frac{1}{x}$ inne, weshalb

103) $$xx' = 1$$

sein muß; *es gilt also die frühere Gleichung auch für irrationale Koordinaten.*

Nun ist die Formel

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda'(\lambda_1 - \lambda_0)$$

(vgl. 96)) auf den Fall zu übertragen, daß λ und λ' die Koordinaten eines nichtrationalen Punkts für eine erste und eine zweite Wahl der Grundpunkte bedeuten, wobei der Punkt ∞ beide Male derselbe ist, und den das zweite Mal mit 0 und 1 bezeichneten Punkten für die ursprünglichen Grundpunkte die Zahlen λ_0 und λ_1 zukommen. Dabei sollen aber vorerst noch λ_0 und λ_1 rational sein. Ist X ein Punkt, dem für die ursprünglichen Grundpunkte eine irrationale Zahl zukommt, so besitzt er auch für

die neuen Grundpunkte eine irrationale Zahl x' (vgl. 99)). Es seien mit ϱ' die sämtlichen reellen Rationalzahlen, die algebraisch größer als x' sind, und mit σ' alle diejenigen, die algebraisch kleiner als x' sind, bezeichnet; dann sind die Punkte $[\varrho']$, d. h. die Punkte, denen in der neuen Zahlbenennung die Zahlen ϱ' zukommen, diejenigen rationalen Punkte, die in bezug auf F als Fluchtpunkt auf der einen Seite von X liegen, die Punkte σ' diejenigen der anderen Seite. Somit muß auch die Zahl x, die dem Punkt X in Beziehung auf die ursprünglichen Grundpunkte zukommt, zwischen den Zahlen, die in bezug auf diese Grundpunkte den Punkten $[\varrho']$ angehören, einerseits und den Zahlen, die den Punkten $[\sigma']$ angehören, andererseits gelegen sein. Diese Zahlen sind aber nach 96) die Zahlen

104) $$\lambda_0 + \varrho'(\lambda_1 - \lambda_0)$$

und

105) $$\lambda_0 + \sigma'(\lambda_1 - \lambda_0),$$

und da $\lambda_0 + x'(\lambda_1 - \lambda_0)$ die einzige Zahl ist, die zwischen den Zahlen 104) und 105) liegt, so muß

106) $$x = \lambda_0 + x'(\lambda_1 - \lambda_0)$$

sein. *Diese Formel gilt also für einen irrationalen Punkt X ebenso wie für einen rationalen Punkt.*

Um weiter die Formel 106) auch auf den Fall auszudehnen, daß λ_0 und λ_1 die Koordinaten von nicht rationalen Punkten sein dürfen, bilden wir zuerst ihre Spezialfälle:

107) $$x + x' = 1,$$

für $\lambda_0 = 1$ und $\lambda_1 = 0$, und

108) $$x = \lambda_1 x',$$

für $\lambda_0 = 0$ und ein beliebiges rationales λ_1. Es ist jetzt zunächst zu zeigen, daß die Gleichung 108) gültig bleibt, wenn der neue Punkt 1 nicht zu den in § 25 definierten rationalen Punkten gehört, in welchem Fall unter der Voraussetzung der Tatsache der Dichtigkeit (vgl. § 14) für λ_1 eine irrationale Zahl eintritt.*)

Es sei nun B_1 ein für die ursprünglichen Grundpunkte A_0, A_1, F nichtrationaler Punkt, dem in Beziehung auf diese Grundpunkte die Zahl b_1 zukommt, und es sei eine rationale Zahl ϱ, die das Vorzeichen von b_1 hat und absolut kleiner als b_1 ist, und eine rationale Zahl σ von demselben Vorzeichen, die numerisch größer als b_1 ist, gewählt. Der Punkt ϱ, d. h. der Punkt, dem in bezug auf die ursprünglichen Grundpunkte die Zahl ϱ zukommt, liegt dann zwischen A_0 und B_1, und der Punkt σ auf der an-

*) Man vergl. auch § 37 im vierten Abschnitt.

deren Seite von B_1, wie A_0, immer in bezug auf den Punkt F als Fluchtpunkt. Ein beliebiger, aber von A_0 und F verschiedener Punkt X soll für die Grundpunkte A_0, A_1, F die Koordinate x, jedoch dann, wenn der Punkt 1 von A_1 nach B_1 verlegt wird, die Koordinate x' besitzen; falls aber der Punkt 1, immer bei gleichbleibendem Punkt 0 und gleichbleibendem Punkt ∞, nach dem Punkt ϱ, beziehungsweise dem Punkt σ verlegt wird, so sei y, beziehungsweise z die Koordinate des Punkts X. Man hat dann nach 108) die Gleichungen:

109) $$x = \varrho y, \qquad x = \sigma z.$$

Denkt man sich aber den Punkt 1 zuerst in B_1 und dann im Punkt ϱ, so ist die Koordinate von X zuerst x' und dann y, weshalb nach Satz 102) die Zahl y numerisch größer oder gleich x', somit nach 109) x numerisch größer oder gleich $\varrho x'$ sein muß. Man findet auf analoge Weise, indem man den Punkt 1 zuerst in σ und dann in B_1 sein läßt, daß $\sigma x'$ numerisch größer oder gleich x sein muß. Es ist also $\frac{x}{x'}$ numerisch nicht kleiner als ϱ und nicht größer als σ. Die beiden Koordinaten x und x' des Punkts X haben dasselbe Vorzeichen oder nicht, je nachdem die beiden nacheinander mit 1 bezeichneten Punkte A_1 und B_1 auf derselben Seite des Nullpunkts gelegen sind oder nicht (§ 33, S. 238), d. h. je nachdem die auf die alten Grundpunkte bezogene Koordinate b_1 des Punkts B_1 positiv oder negativ ist. Zieht man nun alle Zahlen ϱ und σ in Betracht, die den obigen Bedingungen entsprechen, so erkennt man, daß $\frac{x}{x'}$ diejenige mit dem Vorzeichen von b_1 behaftete Zahl ist, die die Eigenschaft hat, zwischen den sämtlichen Zahlen ϱ einerseits und den sämtlichen Zahlen σ andererseits zu liegen. Diese Eigenschaft besitzt aber nur die Zahl b_1. *Somit ist die Gleichung*

110) $$x = b_1 x'$$

auch für den Fall gültig, daß der Punkt 1 *an eine ganz beliebige, von den Punkten* 0 *und* ∞ *verschiedene Stelle verlegt wird.*

Jetzt sollen in bezug auf die ursprünglichen Grundpunkte A_0, A_1 und F die voneinander und von F verschiedenen Punkte C_0 und C_1 die Koordinaten c_0 und c_1 besitzen. Die Punkte C_0 und C_1 sollen nun zu den Punkten 0 und 1 gemacht werden. Ist $c_0 = 0$, so ist die Formel 110) ohne weiteres anwendbar. Falls c_0 von Null verschieden ist, mögen zunächst die Punkte A_0, C_0, F beziehungsweise mit 0, 1, ∞ bezeichnet werden, wobei irgend ein von F verschiedener Punkt X, der ursprünglich die Koordinate x besaß, die Zahl x_1 zur Koordinate erhält. Nachher vertausche man die Rolle der zuletzt mit 0 und 1 bezeichneten Punkte, d. h. man bezeichne C_0, A_0, F der Reihe nach mit 0, 1, ∞; dadurch soll

dann X die Koordinate x_2 bekommen. Schließlich verlege man den Punkt 1 noch in C_1, d. h. man bezeichne jetzt beziehungsweise C_0, C_1, F mit 0, 1, ∞, und nun soll die Koordinate von X die Zahl x' sein. Man erhält für die ersten beiden Änderungen der Grundpunkte nach 110) und 107) die Gleichungen

$$x = c_0 x_1$$

und

$$x_1 + x_2 = 1,$$

die sich zu

111) $$x + c_0 x_2 = c_0$$

verbinden. Die Gleichung 111) ergibt aber für $x = c_1$, daß

$$x_2 = \frac{c_0 - c_1}{c_0}$$

ist. Diese Zahlgröße ist somit nach der zweiten Änderung und vor der letzten Änderung der Grundpunkte die Koordinate von C_1. Macht man schließlich den Punkt C_1 zum Punkt 1, so ergibt sich zwischen den Koordinaten x_2 und x' des Punkts X die Gleichung

$$x_2 = \frac{c_0 - c_1}{c_0} x'.$$

Diese gibt zusammen mit 111) die Relation

112) $$x = c_0 + (c_1 - c_0) x'.$$

Diese Formel gilt also für den Fall, daß die Punkte c_0 und c_1 der ursprünglichen Zahlbenennung beziehungsweise mit 0 *und* 1 *bezeichnet werden sollen, und daß der Punkt ∞ derselbe bleibt, ganz allgemein für die alte Koordinate x und die neue Koordinate x' eines beliebigen Punkts.**)

Aus den Formeln 103) und 112) läßt sich die allgemeinste Transformationsformel für irgend eine Änderung der drei Grundpunkte zusammensetzen, worüber § 22 im zweiten Abschnitt nachgelesen werden kann.

Definiert man jetzt das Doppelverhältnis $(ABCX)$ als die Zahl, die dem Punkt X zukommt, wenn A mit ∞, B mit 1, und C mit 0 bezeichnet wird, so ergeben sich die Sätze über das Vorzeichen des Doppelverhältnisses und über das Doppelverhältnis harmonischer Punkte. Es ergibt sich auch der bekannte Ausdruck für das Doppelverhältnis in den Zahlen der Punkte, so daß insbesondere die Zahlen b_∞, b_1, b_0, b von vier harmonischen Punkten und nur die Zahlen von solchen die Gleichung:

113) $$\frac{b_\infty - b_1}{b_0 - 1} : \frac{b_\infty - b}{b_0 - b} = -1$$

---

*) Die Formel 112) hätte natürlich auch in diesem Abschnitt in einer dem Verfahren des zweiten Abschnitts (vergl. § 18 und § 19) entsprechenden Weise allgemein bewiesen werden können.

oder, falls eine der Zahlen gleich ∞ ist, die entsprechende einfachere Gleichung erfüllen (man vergleiche die Entwicklungen in dem analogen Teil des zweiten Abschnitts, § 23 und § 22).

Vorausgesetzt waren in den Entwicklungen dieses Paragraphen *die Axiome* I *bis* VI *und die Tatsache der Dichtigkeit für das allgemeine harmonische Punktsystem.**)

§ 35.

Bestimmtheit der Zahlenbelegung der Geraden. Der Körper der Koordinaten sämtlicher Punkte.

Die Vorschriften von § 25 und § 33 ergeben, wenn die Punkte 0, 1, ∞ gewählt sind, eine völlig bestimmte Belegung der Geraden mit Zahlen. Diese Belegung genügt *erstens* der Bedingung, daß die Zahlen beliebig vieler Punkte so aufeinander folgen, wie die Punkte in Beziehung auf den Punkt ∞ als Fluchtpunkt geordnet liegen, *zweitens* der Bedingung, daß für die Zahlen harmonischer Punkte die Gleichung 113), beziehungsweise, wenn eine der Zahlen ∞ ist, eine der angegebenen einfacheren Gleichungen gilt. Die Zahlenbelegung ist nach Festsetzung der Grundpunkte auch schon durch die erste Bedingung zusammen mit einem Teil der zweiten Bedingung bestimmt. Verlangt man nämlich außer der ersten Bedingung, daß die Zahl eines Punkts, der vom Punkt ∞ durch zwei andere harmonisch getrennt ist, das arithmetische Mittel der Zahlen der beiden Punkte sein soll, so bestimmen sich dadurch (§ 32) die Zahlen der rationalen Punkte. Wegen der Beziehung zwischen der Ordnung der Punkte und der Zahlen muß dann auch jeder irrationale Punkt notwendig die der Vorschrift von § 33 entsprechende Zahl erhalten.**)

Aus den gemachten Voraussetzungen (man vergleiche den Schluß des vorigen Paragraphen) ergab sich, daß verschiedene Punkte verschiedene Zahlen erhalten (§ 33); da aber das Stetigkeitsaxiom nicht gefordert worden ist, so braucht nicht zu jeder Zahl ein Punkt zu gehören, dessen Koordinate sie ist. Die Gesamtheit der Zahlen, die zu den sämtlichen Punkten der Geraden gehören, bilden dagegen einen *Körper****), wie jetzt

---

*) Ein Teil der Entwicklungen bleibt auch in dem Fall noch bestehen, daß die Tatsache der Dichtigkeit nicht gefordert wird. Dieser Fall ist im vierten Abschnitt in § 37 teilweise behandelt.

**) Daß die Zahlenverteilung auf der Geraden nach der Wahl der Punkte 0, 1, ∞ durch die zweite Bedingung allein bestimmt ist, falls neben den Postulaten I bis VI nicht bloß die Tatsache der Dichtigkeit sondern das Stetigkeitsaxiom für die Gerade gefordert wird, ist in § 24 des zweiten Abschnitts bewiesen worden.

***) Vergl. Dedekind in den von ihm herausgegebenen Vorlesungen Lejeune-Dirichlets über Zahlentheorie (2. Aufl.) § 159.

bewiesen werden soll. Es ist nämlich zu den Punkten $0, \xi, \infty$ der vierte harmonische der Punkt $-\xi$, zu $\infty, 0, \xi$ der vierte harmonische der Punkt 2ξ, zu $0, \infty, \xi$ der Punkt $\frac{\xi}{2}$, zu $-\xi, 1, \xi$ der Punkt ξ^2, zu $-1, \xi, +1$ der Punkt $\frac{1}{\xi}$. Da nun zu drei Punkten der Geraden auch der vierte harmonische Punkt auf der Geraden existiert (Postulat III), so ergibt sich, wenn ξ die Koordinate eines Punkts der Geraden ist, daß dies auch von $-\xi$, von 2ξ, von $\frac{\xi}{2}$, ξ^2 und $\frac{1}{\xi}$ gilt. Sind ferner ξ und η die Koordinaten zweier Punkte, so hat der vierte harmonische Punkt zu ξ, ∞, η die Koordinate $\frac{1}{2}(\xi+\eta)$. Es gehört also auch die Zahl $\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, und somit nach dem, was oben bewiesen wurde, auch die Zahl $\xi+\eta$ einem Punkt der Geraden an. Es existiert aber unter den gemachten Voraussetzungen auch ein Punkt $-\eta$, und somit ein Punkt $\xi+(-\eta)$, d. h. $\xi-\eta$. Außerdem existiert jetzt noch ein Punkt ξ^2, ein Punkt η^2, und ein Punkt $(\xi+\eta)^2$, und infolgedessen einer, dessen Zahl gleich $((\xi+\eta)^2-\xi^2)-\eta^2$, d. h. $2\xi\eta$ ist; also gibt es auch einen Punkt $\xi\eta$. Da auch $\frac{1}{\eta}$ als Koordinate eines Punkts vorkommt, so gilt dasselbe für die Zahl

$$\xi \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Kommen also gewisse Zahlen als Koordinaten von Punkten vor, so sind auch alle die Zahlen, die sich daraus durch die Operationen der vier Spezies bilden lassen, Koordinaten von Punkten, d. h. es macht die Gesamtheit der Zahlen, die so vorkommen, einen „Körper“ aus, wobei das Symbol ∞ auch als eine dem Körper angehörende Zahl angesehen werden mag. Der Körper fällt, wenn das Stetigkeitsaxiom gilt, mit dem reellen Zahlenkontinuum zusammen; im anderen Fall ist er ein Teil davon.

Werden jetzt statt der ursprünglichen Punkte $0, 1, \infty$ drei Punkte eingeführt, denen in bezug auf die ursprünglichen Grundpunkte die Zahlen b_0, b_1 und b_∞ zukommen, so ergeben sich zwei Körper, der erste in bezug auf die alten, der zweite in bezug auf die neuen Grundpunkte. Es besteht nun zwischen der ursprünglichen Zahl x und der neuen Zahl x' eines Punkts X die Relation

114) $$x' = \frac{\frac{1}{x-b_\infty} - \frac{1}{b_0-b_\infty}}{\frac{1}{b_1-b_\infty} - \frac{1}{b_0-b_\infty}}$$

(vgl. § 34 und 54) in § 22), an deren Stelle, wenn $b_\infty = \infty$ ist, die einfachere Formel

115) $$x' = \frac{x-b_0}{b_1-b_0}$$

tritt (vgl. 112)). Auf den rechten Seiten der Relationen 114) und 115) stehen aber nur solche Zahlen, die sich auf die ursprüngliche Festsetzung der Grundpunkte beziehen, also dem ersten Körper angehören, und da nur die Operationen der vier Spezies die Zahlen verknüpfen, so muß auch x' in dem ersten Körper enthalten sein. Somit gehören die Zahlen des zweiten Körpers dem ersten Körper mit an, und es sind daher, da die Betrachtung auch umgekehrt angestellt werden kann, die beiden Körper identisch. Man erhält jetzt den Satz:

116) *Für die Punkte einer Geraden sollen die Postulate* I *bis* VI *erfüllt sein, und außerdem die Tatsache der Dichtigkeit bestehen. Denkt man sich für drei gewählte Punkte* 0, 1, ∞ *die sämtlichen Zahlen, die den Punkten der Geraden zugeordnet sind, so bilden diese einen reellen Körper. Der Zahlkörper der Geraden ist von der Wahl der Grundpunkte unabhängig.*

Die Tatsache der Dichtigkeit war hier so verstanden, daß jedes der aus irgend drei Punkten der Geraden gebildeten allgemeinen harmonischen Punktsysteme in der Geraden überalldicht ist.

Nimmt man irgend einen Körper reeller Zahlen an, ordnet ihm noch das Symbol ∞ zu und bezeichnet man alle diese Zahlen als „Punkte" einer Geraden, definiert man ferner die harmonische Lage durch die Gleichung 113)*) und setzt man die Ordnung der „Punkte" den Zahlen entsprechend fest, so läßt sich leicht zeigen, daß die Postulate I bis VI erfüllt sind.**) Es gilt aber auch die Tatsache der Dichtigkeit. Um diese Tatsache nachzuweisen, denke man sich durch die drei Zahlen b_0, b_1, b_∞ des angenommenen Körpers die drei Punkte vorgestellt, aus denen man ein allgemeines harmonisches Punktsystem bilden will. Nun suche man unter der Voraussetzung, daß nachträglich den „Punkten" b_0, b_1, b_∞ die Zahlen 0, 1, ∞ zugeordnet werden, denjenigen „Punkt" b, dem dann die rationale Zahl λ zugeordnet werden muß; dieser Punkt gehört nach Satz 101) dem zu bildenden harmonischen Punktsystem an. Man erkennt jetzt, daß trotz der Änderung in der Fragestellung der Gedankengang von § 31 (S. 232—234) angewendet werden kann, weshalb der gesuchte Punkt b durch die Gleichung

$$\frac{1}{b-b_\infty}=\frac{1}{b_0-b_\infty}+\lambda\left(\frac{1}{b_1-b_\infty}-\frac{1}{b_0-b_\infty}\right)$$

bestimmt ist. Dabei ist diese Formel dann, wenn $b_\infty=\infty$ ist, durch

*) Diese Gleichung liefert zu drei dem Körper angehörenden Zahlen stets eine solche, die auch in dem Körper enthalten ist.

**) Die Beweise sind natürlich analytisch zu führen. Für die Beweise von IV, V und VI benutzt man mit Vorteil den Umstand, daß das Doppelverhältnis von vier Zahlen ein gegenüber der linear gebrochenen Substitution invarianter analytischer Ausdruck ist.

$$b = b_0 + \lambda(b_1 - b_0)$$

zu ersetzen (vgl. 96)). Man erkennt sowohl, wenn b_∞ endlich, als wenn $b_\infty = \infty$ ist, daß der Punkt b durch passende Wahl der rationalen Zahl λ in jedes Intervall der Geraden gebracht werden kann, d. h. daß unser allgemeines harmonisches Punktsystem überalldicht ist. *Es kann also jeder reelle Zahlkörper einer projektiven Geraden angehören, für die die Postulate* I *bis* VI *samt der Tatsache der Dichtigkeit erfüllt sind.*

Vierter Abschnitt.

Schlußbetrachtungen.

§ 36.

Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und seine Modifikationen.

Man denke sich jetzt zwei Geraden. Im besonderen Fall können die Geraden auch koinzidieren. Im allgemeinen sollen sie nicht einmal als derselben ebenen Geometrie angehörend betrachtet werden; *es sind also lediglich zwei Gebilde vorgestellt, die beide die Postulate* I *bis* VI, *unter Umständen auch die Tatsache der Dichtigkeit*) und unter Umständen auch noch das Stetigkeitsaxiom erfüllen.* Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie kann nun für die sämtlichen Punkte der einen Geraden und die sämtlichen Punkte der anderen oder auch für zwei allgemeine harmonische Punktsysteme (§ 14) der einen und der anderen Geraden formuliert werden. Die projektive Beziehung soll dabei so definiert werden:

117) *Eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den sämtlichen Punkten einer Geraden g und den sämtlichen Punkten einer Geraden g' heißt projektiv, wenn die Bedingung erfüllt ist, daß vier harmonischen Punkten von g stets vier harmonische Punkte von g' entsprechen und umgekehrt. Unter derselben Bedingung heißt auch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten eines allgemeinen harmonischen Punktsystems von g und denen eines solchen von g' projektiv.**)*

Zuerst soll für das allgemeine harmonische Punktsystem das bewiesen werden, was man den negativen Teil des Fundamentalsatzes nennen kann.

---

*) Vergl. § 14 und § 33, S. 239 oben, ferner S. 247.

**) Dies ist die v. Staudtsche Definition (Geometrie der Lage, 1847, S. 49). Handelt es sich um Untersuchungen in der Ebene, so ist zunächst der v. Staudtsche Begriff der Projektivität von dem Begriff einer durch mehrmaliges Projizieren hergestellten Zuordnung zu trennen. Hier ist überhaupt nur die v. Staudtsche Definition möglich.

Ein solches System entsteht aus drei Punkten einer Geraden durch fortgesetzte Konstruktion vierter harmonischer Punkte (§ 14). Sind jetzt aus dem allgemeinen harmonischen Punktsystem S auf g drei Punkte A, B, C, und aus dem ebensolchen System S' auf g' drei Punkte A', B', C' gewählt, so ist zu beweisen, daß zwischen S und S' nicht *zwei* projektive Beziehungen so möglich sind, daß A dem Punkt A', B dem B', C dem C' entspricht. Nun kann man sich das System S nach Satz 99) und 101) auch aus den drei Punkten A, B, C und das System S' aus den drei Punkten A', B', C' erzeugt denken.*) Ein beliebiger Punkt P von S ergibt sich also aus A, B, C durch gewisse Konstruktionen vierter harmonischer Punkte, und es kann deshalb diesem Punkt in einer der Definition 117) genügenden Beziehung nur derjenige Punkt von S' auf g' zugeordnet sein, der aus A', B', C' durch die genau entsprechenden Konstruktionen hervorgeht. Damit ist der negative Teil des Satzes nachgewiesen.

Es ist zu bemerken, daß der Punkt P auf g aus A, B und C auf verschiedene Arten ableitbar sein kann.**) Macht man nun jedesmal die entsprechenden Konstruktionen auf g', so müssen auch diese einen und denselben Punkt bestimmen, wenn die verlangte ein-eindeutige Beziehung von projektiver Eigenschaft zwischen den beiden Punktsystemen S und S' möglich sein soll. Daß diese Beziehung tatsächlich stets hergestellt werden kann, mit anderen Worten der positive Teil des Fundamentalsatzes, ergibt sich folgendermaßen. Man ordnet auf g den Punkten A, B, C, auf g' den Punkten A', B', C' beziehungsweise die Zahlen $0, 1, \infty$ zu; es ergibt sich dann nach § 32 eine Verteilung der rationalen Zahlen über die Punkte von S, und eine ebensolche über die Punkte von S'. Ordnet man nun solche Punkte von S und S' einander zu, die dieselbe Rationalzahl erhalten haben, so ist eine ein-eindeutige Beziehung (vgl. § 32) zwischen den Punkten der beiden Systeme definiert. Diese Beziehung besitzt die Eigenschaft der Projektivität, weil vier harmonischen Punkten von S vier Zahlen entsprechen müssen, die die Bedingung 90):

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} = -1,$$

*) Der Fundamentalsatz ist für allgemeine harmonische Punktsysteme zuerst von Fano (Giornale di Matematiche, vol. XXX, p. 129 Anm.) ausgesprochen worden. Fano hat den Satz aber nicht in derselben Allgemeinheit bewiesen, in der er hier gezeigt wird. Um nämlich den negativen Teil des Satzes nicht bloß für den Fall zu beweisen, daß die Punkte A, B, C unseres Textes mit denjenigen zusammenfallen, aus denen ursprünglich das erste System S gebildet worden war, und die Punkte A', B', C' mit denen, aus denen S' ursprünglich gebildet war, muß man vorher unseren Satz 99) zeigen. Der positive Teil des Fundamentalsatzes (s. u.) folgt dann bei Fano daraus, daß ihm die Tatsachen der Ebene zur Verfügung stehen.

**) Dies ist sogar stets der Fall.

beziehungsweise, wenn eine der Zahlen λ gleich ∞ ist, eine der anderen, einfacheren Bedingungen erfüllen, und weil solchen vier Zahlen wieder vier harmonische Punkte von S' zugeordnet sind. Damit ist der positive Teil des Satzes bewiesen.

Man sieht noch, daß die beiden projektiven allgemeinen harmonischen Punktsysteme so aufeinander bezogen sind, daß in bezug auf den Punkt C, der mit ∞ bezeichnet worden war, als Fluchtpunkt die anderen Punkte von S geradeso geordnet liegen, wie in bezug auf den Punkt C' die anderen Punkte von S'; dies ergibt sich aus dem, was in § 32 von der Ordnung der Punkte des einen Systems und der Zahlen gesagt worden ist (vgl. auch § 25 am Schluß). Es liegen also auch beliebig viele Punkte von S in derselben *zyklischen* Ordnung wie die entsprechenden Punkte von S', was man auch so ausdrücken kann, daß bei unserer ein-eindeutigen Beziehung zwischen den beiden Punktsystemen die Ordnung erhalten bleibt. Wir fassen alles zusammen:

118) *Zwei allgemeine harmonische Punktsysteme können stets und zwar jedesmal nur auf eine einzige Weise projektiv so aufeinander bezogen werden, daß drei gegebenen Punkten des einen Systems drei gegebene Punkte des anderen entsprechen. Bei jeder solchen projektiven Beziehung bleibt die Ordnung der Punkte erhalten.*

Man erkennt auch, daß vier Punkten des einen Systems im anderen vier solche Punkte entsprechen, die in derselben Folge aufgezählt das gleiche Doppelverhältnis ergeben (§ 31).

Jetzt kann auch noch folgender Satz gezeigt werden:

119) *Sind zwei allgemeine harmonische Punktsysteme ein-eindeutig so aufeinander bezogen, daß vier solchen harmonischen Punkten von S, unter denen der bestimmte Punkt C vorkommt, jedesmal vier gleichfalls harmonische Punkte von S' entsprechen, unter denen dann natürlich der entsprechende Punkt C' vorkommen muß, so sind die Punktsysteme projektiv.*

Um dies zu beweisen, wähle man aus S noch zwei Punkte A und B aus, deren entsprechende in S' die Punkte A' und B' sein mögen, bezeichne die Punkte A, B, C mit 0, 1, ∞ und stelle eine Verteilung der sämtlichen rationalen Zahlen über die Punkte von S her, die den Definitionen von § 25 entspricht. Nun übertrage man die Zahlen auf das Punktsystem S', d. h. man ordne jedem Punkt von S' die Zahl zu, die in S dem entsprechenden Punkt zugekommen war. Ist nun Q' ein Punkt von S', der von C' durch P' und R' harmonisch getrennt ist, so gilt nach Voraussetzung Analoges von den entsprechenden Punkten Q, C, P, R in S, und es muß deshalb die Zahl, die wir für Q' erhalten haben, und die ursprünglich Q zugehörte, das arithmetische Mittel der beiden Zahlen sein, die für P' und R' sich ergeben. Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf

§ 32, daß die Verteilung der Zahlen in dem Punktsystem S' allen den früheren Bedingungen entspricht; es sind also auch irgend vier Punkte von S' dann und nur dann harmonisch, wenn das Doppelverhältnis ihrer Zahlen gleich -1 ist, d. h. dann, wenn die vier entsprechenden, in entsprechender Ordnung aufgezählten Punkte von S harmonisch sind. Damit ist aber die Projektivität der beiden Punktsysteme bewiesen.

Bis jetzt wurden in diesem Paragraphen *nur die Postulate* I *bis* VI benutzt. Nunmehr sollen zwei Geraden g und g' vorgestellt werden, für die beide außer den genannten Postulaten noch *die Tatsache der Dichtigkeit* gilt.*) Wir denken uns nun eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den *sämtlichen* Punkten von g und den *sämtlichen* Punkten von g'. Dabei soll von der Bedingung der Projektivität nur ein Teil vorausgesetzt werden; es soll nämlich wieder einem bestimmten Punkt C von g der Punkt C' von g', und vier solchen harmonischen Punkten von g, unter denen C vorkommt, sollen vier harmonische Punkte von g', unter denen dann natürlich C' vorkommt, entsprechen, und umgekehrt. Außerdem setzen wir aber jetzt voraus, daß beliebig viele, irgendwie gewählte Punkte von g in derselben zyklischen Ordnung, wie die entsprechenden von g' liegen, d. h. daß die Beziehung eine solche ist, die die Ordnung erhält. Es läßt sich dann bereits folgern, daß die Beziehung eine projektive ist, was wir in ähnlicher Weise wie bei den allgemeinen harmonischen Punktsystemen beweisen. Man wähle noch zwei Punkte A und B von g und bezeichne die entsprechenden auf g' mit A' und B'. Ordnet man auf g den Punkten A, B, C die Zahlen $0, 1, \infty$ zu, so ergibt sich nach § 33 eine Verteilung gewisser Zahlen über die Gerade g. Jetzt übertrage man die Zahlen von den Punkten von g auf die entsprechenden Punkte von g'. Es muß dann die entstehende Zahlenverteilung auf g', gleichwie die Zahlenverteilung auf g, so sein, daß beliebig vielen Punkten Zahlen entsprechen, die geradeso aufeinander folgen, wie in bezug auf den Punkt C, d. h. den Punkt ∞, als Fluchtpunkt die Punkte geordnet liegen. Ferner muß die Zahl eines Punkts von g', der von C' durch zwei andere harmonisch getrennt ist, das arithmetische Mittel der Zahlen der beiden anderen Punkte sein. Aus den genannten Eigenschaften ergibt sich aber, daß die Zahlenverteilung auf g' auch eine den Vorschriften von § 33 entsprechende ist (vgl. § 35). Es gilt also auch auf g' die bekannte Bedingung für die Zahlen von vier

*) Diese Tatsache ist so wie auf S. 247 gemeint. Es ist zu bemerken, daß die Tatsache der Dichtigkeit besteht, wenn man die Postulate I bis VI voraussetzt und zugleich annimmt, daß auf der Geraden nur die Punkte eines allgemeinen harmonischen Punktsystems existieren. Es folgt dies mit Rücksicht auf 99) und 101) daraus, daß zwischen je zwei rationalen Zahlen wieder eine solche gefunden werden kann (man vergl. auch S. 248 oben).

harmonischen Punkten, und nun ist, da entsprechende Punkte auf g und g' dieselbe Zahl erhalten haben, ersichtlich, daß harmonischen Punkten der einen Geraden harmonische Punkte der anderen entsprechen. Die Beziehung zwischen den Geraden ist also eine projektive.

Da bei dem jetzt eingeschlagenen Verfahren die Gesamtheit der auf g verteilten Zahlen mit der Gesamtheit der auf g' verteilten übereinstimmt, so ist auch der der Geraden g zugehörende Körper derselbe wie der der Geraden g' angehörende (vgl. § 35). Man gewinnt so die Sätze:

Sind die sämtlichen Punkte einer die Tatsache der Dichtigkeit erfüllenden Geraden g auf die sämtlichen Punkte einer ebensolchen Geraden g' ein-eindeutig so bezogen, daß vier solchen harmonischen Punkten von g, unter denen der bestimmte Punkt C vorkommt, jedesmal vier gleichfalls harmonische Punkte von g' entsprechen, unter denen dann der entsprechende Punkt C' vorkommt, bleibt ferner bei dieser Beziehung die Ordnung der Punkte erhalten, so ist die Beziehung eine projektive.

Ist zwischen den sämtlichen Punkten einer die Tatsache der Dichtigkeit erfüllenden Geraden g und den sämtlichen Punkten einer ebensolchen Geraden g' eine projektive Beziehung möglich, die die Ordnung erhält, so stimmen die den beiden Geraden zugehörenden Zahlkörper überein.

Es soll jetzt noch untersucht werden, ob, wenn die beiden Zahlkörper auf g und g' übereinstimmen, eine oder mehrere projektive Beziehungen zwischen g und g' so hergestellt werden können, daß den Punkten P, Q, R von g beziehungsweise die Punkte P', Q', R' von g' entsprechen, wobei aber ausdrücklich vorausgesetzt werden soll, daß es sich um solche projektive Beziehungen handelt, die die Ordnung erhalten. Wir nehmen an, es sei eine solche Beziehung vorhanden. Es kann nun wieder die im vorigen schon zweimal benutzte Betrachtungsweise angewendet werden. Man bezeichnet auf g die Punkte P, Q, R mit $0, 1, \infty$ und stellt eine den Vorschriften von § 33 entsprechende Belegung der Geraden g mit Zahlen her. Diese Belegung besitzt die Eigenschaften, daß die Zahlen harmonischer Punkte der bekannten Bedingung genügen, und beliebig viele Punkte in Beziehung auf den Punkt ∞ so geordnet liegen, wie ihre Zahlen folgen. Überträgt man nun die Zahlen von den Punkten von g auf die entsprechenden von g', so entsteht eine Zahlenbelegung auf g'. Diese besitzt die entsprechenden Eigenschaften und ist nach § 35 durch diese Eigenschaften und dadurch, daß P', Q', R' die Zahlen $0, 1, \infty$ erhalten, bereits bestimmt. Die Zahlenbelegung muß also dieselbe sein, die sich bei dieser Wahl der Punkte $0, 1, \infty$ aus den Vorschriften von § 33 auf g' ergibt, und es ist also der vorhin einem Punkt P von g auf g' zugeordnete Punkt derjenige, der in der zuletzt beschriebenen Zahlenverteilung die Zahl erhält, die P auf g erhalten hat. Es sind also jedenfalls nicht zwei

verschiedene, den Bedingungen entsprechende Zuordnungen zwischen den Punkten von g und denen von g' möglich, womit der negative Teil des Fundamentalsatzes bewiesen ist.

Um den positiven Teil des Satzes einzusehen, stelle man die beiden Zahlenbelegungen her, die sich ergeben, wenn man auf g die Punkte P, Q, R und auf g' die Punkte P', Q', R' mit 0, 1, ∞ bezeichnet. Da auf jeder der Geraden ein von der Wahl der Grundpunkte unabhängiger Zahlkörper existiert, und die beiden Körper identisch sein sollen, so erhält man auch jetzt auf g und auf g' dieselben Zahlen. Ordnet man immer zwei solche Punkte von g und g', denen dieselbe Zahl entspricht, einander zu, so entsteht eine ein-eindeutige Beziehung, und man erkennt bei einiger Überlegung, daß diese projektiv ist und die Ordnung erhält.

Setzt man von jeder der beiden Geraden das Stetigkeitsaxiom voraus, so vereinfacht sich einiges. Es fällt dann auf jeder Geraden der Zahlkörper mit dem reellen Zahlenkontinuum zusammen, so daß die beiden Körper von selbst übereinstimmen, und somit auch stets der positive Teil des Fundamentalsatzes anwendbar ist. Ferner kann in diesem Fall das Beweisverfahren von § 21 im zweiten Abschnitt zur Anwendung kommen, auf dem schließlich in § 23 die Relation für die Zahlen harmonischer Punkte beruht. Man kommt also in diesem Fall mit den Hilfsmitteln des zweiten Abschnitts aus. Es läßt sich aber in diesem Fall auch zeigen, daß jede projektive Beziehung die Ordnung der Punkte erhält.*) Setzt man nämlich in unserem Fall von einer Beziehung zwischen g und g' nur voraus, daß sie projektiv ist, so braucht man bloß auf g eine der Vorschrift von § 17 entsprechende Zahlenverteilung vorzunehmen und dann alle Zahlen von den Punkten von g auf die entsprechenden von g' zu übertragen. Dadurch entsteht eine Verteilung auf g', bei der jedenfalls die Zahlen von vier harmonischen Punkten das Doppelverhältnis -1 besitzen müssen. Nun sind aber die Überlegungen von § 24 im zweiten Abschnitt anwendbar und ergeben, daß auf g' eine allen den früheren Bedingungen entsprechende Zahlenverteilung vorliegen muß. Insbesondere müssen also auch die Punkte von g' ihren Zahlen entsprechend geordnet liegen, weshalb dann auch die Punkte von g' so geordnet liegen müssen, wie die entsprechenden von g, w. z. b. w. Wir können nun die Sätze formulieren:

Stimmen die Zahlkörper zweier die Tatsache der Dichtigkeit erfüllenden Geraden überein, so gibt es stets eine und nur eine die Ordnung erhaltende projektive Beziehung zwischen den sämtlichen Punkten der einen Geraden

*) Dies ist eben das von Darboux in den Math. Annalen Bd. 17, S. 55 erhaltene Resultat.

und den sämtlichen der anderen, in der drei gegebenen Punkten der einen Geraden drei gegebene Punkte der anderen entsprechen.

Jede projektive Beziehung zwischen zwei dem Stetigkeitsaxiom genügenden Geraden ist eine die Ordnung der Punkte erhaltende Beziehung.

Man erkennt auch, daß bei jeder die Ordnung erhaltenden projektiven Beziehung zwischen zwei Geraden, die der Tatsache der Dichtigkeit genügen, vier Punkten der einen Geraden vier Punkte der anderen mit demselben Doppelverhältnis entsprechen (vgl. § 34).

§ 37.

Bemerkungen über die Tatsache der Dichtigkeit und den Fluchtpunktssatz.

In § 13 ist die Tatsache vom Fluchtpunkt, in § 14 die Tatsache der Dichtigkeit aus dem Stetigkeitsaxiom (VII) mit Hilfe der übrigen Postulate I bis VI hergeleitet worden. Es wurde aber bis jetzt nicht erörtert, inwieweit die beiden genannten Tatsachen sich gegenseitig bedingen*), wenn die Postulate I bis VI ohne die Stetigkeit vorausgesetzt werden. Die Resultate einer Untersuchung, die sich hierauf bezieht, mögen im folgenden Platz finden; dabei sollen aber die Beweise nur kurz angedeutet werden. Zugleich wird auch die Frage behandelt, ob die Tatsache der Dichtigkeit, wenn sie für ein bestimmtes allgemeines harmonisches Punktsystem gilt**), für jedes solche Punktsystem der Geraden gelten muß, während bis jetzt diese Tatsache, wenn sie vorausgesetzt wurde, immer gleich als allgemeingültig postuliert worden ist.

Nimmt man zunächst nur die Postulate I bis VI an, so bestehen die in den §§ 25 bis 32 des dritten Abschnitts gegebenen Entwicklungen. Es sind also nach Annahme von drei verschiedenen, mit 0, 1 und ∞ bezeichneten Grundpunkten gewisse rationale Punkte definiert, die der Gesamtheit der rationalen Zahlen ein-eindeutig zugewiesen sind und in der ihren Zahlen entsprechenden Ordnung liegen. Allein es bleibt auch der Umstand bestehen, daß nach § 33 *jedem* Punkt der Geraden eine Zahl zugeordnet werden kann. Dabei ist es aber jetzt, wo die Tatsache der

---

*) Vergl. auch Balser, Mathematische Annalen Bd. 55, S. 293 ff., insbesondere Nr. IV.

**) Zu analogen Fragen wird man in einer ebenen oder räumlichen Geometrie geführt, wenn man von *einem* ebenen, beziehungsweise räumlichen Möbiusschen Netz (Möbius, Werke 1. Bd. 1885, S. 243 und 258) annimmt, daß es in der Ebene, beziehungsweise im Raum „überalldicht" ist. Man vergl. die hiermit in Beziehung stehenden Betrachtungen von Vahlen, Abstrakte Geometrie 1905, II, Art. 46, III, Art. 22, 25, 26, 33, 39, wobei übrigens bei Vahlen die Definitionen des Netzes und der Dichtigkeit von den gewöhnlichen etwas abweichen.

Dichtigkeit nicht mehr gefordert wird, möglich, daß verschiedenen Punkten dieselbe Zahl entspricht; insbesondere kann ein von dem ursprünglichen Punkt ∞, dem Fluchtpunkt F, verschiedener Punkt auch die Zahl ∞ erhalten, und es können außer den früher definierten rationalen Punkten, die sich durch Konstruktionen vierter harmonischer Punkte ergeben, noch andere Punkte rationale Zahlen erhalten.*) Es sollen deshalb jetzt die früher definierten Punkte die *eigentlich rationalen* heißen.

Überlegt man nun genauer, wann ein von F verschiedener Punkt P die Zahl ∞ erhalten müßte, so ergibt sich, daß dies dann zu geschehen hätte, wenn eine der beiden Strecken PF von eigentlich rationalen Punkten frei ist. Es folgt aber aus der Ordnung, in der die eigentlich rationalen Punkte untereinander in bezug auf F als Fluchtpunkt liegen (§ 25), daß es in einer Strecke PF dann eigentlich rationale Punkte gibt, und nur dann, wenn es in ihr eigentlich ganzzahlige Punkte gibt. Es wird also nur dann ein von F verschiedener Punkt die Zahl ∞ erhalten, wenn für eine der für den Fluchtpunkt F harmonischen Punktfolgen $0, 1, 2, 3, \cdots$ und $0, -1, -2, -3, \cdots$ der Fluchtpunktssatz 35) nicht gilt. Wir wollen in einem solchen Fall sagen, daß für den Fluchtpunkt F zusammen mit den gewählten Punkten 0 und 1 der Fluchtpunktssatz nicht gültig sei.

Wir wollen jetzt ermitteln, wann zwei voneinander und von F verschiedene Punkte P und Q dieselbe Zahl erhalten. Dies geschieht jedenfalls dann, wenn die Strecke PQ, die F nicht enthält, von eigentlich rationalen Punkten frei ist, und zugleich höchstens einer der beiden Punkte P und Q selbst ein eigentlich rationaler ist, ferner auch dann, wenn, in bezug auf F, zwischen P und Q ein einziger eigentlich rationaler Punkt liegt, und P und Q beide keine solchen Punkte sind. Es ergeben sich z. B. in dem letzten Fall für P und Q nach § 33 zwei Schnitte, die dieselbe Rationalzahl λ darstellen und nur insofern formell verschieden sind, als die Zahl λ selbst das eine Mal der einen, das andere Mal der anderen Zahlenklasse des Schnitts zugeteilt wird. In allen den nichtgenannten Fällen ergibt sich mit Hilfe der Tatsache, daß zwischen zwei Rational-

*) Daß in der Tat Mannigfaltigkeiten von Elementen gegeben werden können, welche die bezeichneten Verhältnisse aufweisen, erkennt man, wenn man die rationalen Funktionen eines Parameters t mit rationalen Koeffizienten als Elemente zugrunde legt. Die harmonische Lage soll dabei durch die Relation 113), und die auf den eigentlichen Punkt ∞ sich beziehende Ordnung der Elemente durch die Vorzeichen definiert werden, welche die Differenzen der die Elemente vorstellenden Funktionen für hinreichend große reelle positive Werte von t bekommen. Man könnte auch nach dem Vorgang von Veronese, der zuerst „nichtarchimedische Zahlen“ in die Geometrie eingeführt hat, eine Mannigfaltigkeit von unendlichen Reihen zugrunde legen, die nach Potenzen eines Parameters fortschreiten (vergl. Schoenflies, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906, S. 26).

zahlen stets wieder eine Rationalzahl gelegen ist, daß „zwischen" P und Q unendlich viele eigentlich rationale Punkte liegen, und daß die den Punkten P und Q zugeordneten Zahlen verschieden sind.

Man gewinnt aus dem bis jetzt Bewiesenen das Resultat, daß, *falls keine zwei Punkte der Geraden dieselbe Zahl erhalten, und auch der Punkt F allein die Zahl ∞ bekommt, die Gesamtheit der eigentlich rationalen Punkte auf der Geraden überalldicht ist*, d. h. das aus den gewählten Grundpunkten 0, 1, ∞ gebildete allgemeine harmonische Punktsystem die Tatsache der Dichtigkeit erfüllt (Satz 101) in § 32). Umgekehrt erkennt man, *falls das aus den gewählten Grundpunkten* 0, 1, ∞ *entspringende allgemeine harmonische Punktsystem überalldicht ist, daß für den gewählten Punkt ∞ als Fluchtpunkt zusammen mit den gewählten Punkten* 0 *und* 1 *der Fluchtpunktssatz gilt, daß für die gewählten Grundpunkte nur der gewählte Punkt ∞ selbst die Zahl ∞ bekommt, und daß irgend zwei verschiedene Punkte verschiedene Zahlen erhalten* (§ 33).

Folgende Tatsachen, welche die Beziehung beschreiben, die zwischen der Ordnung der Punkte und der der entsprechenden Zahlen besteht, lassen sich mit leichter Mühe erkennen: Wenn ein von F verschiedener Punkt P die Zahl ∞ bekommt, so erhalten in einer der beiden Strecken PF alle Punkte die Zahl ∞. Wenn die Punkte P und Q endliche Zahlen erhalten, und der Punkt P auf derselben Seite von Q liegt, wie der gewählte Punkt 0 von dem gewählten Punkt 1, so ist die Zahl von P jedenfalls nicht algebraisch größer als die Zahl von Q.

Die für die Koordinate des harmonischen Mittelpunkts geltende Relation kann nun entwickelt werden. Sind zunächst $\mathsf{\Xi}$ und Z zwei voneinander und von F verschiedene, eigentlich rationale Punkte mit den — rationalen — Zahlen ξ und ζ, so ist der Punkt H, der der harmonische Mittelpunkt von $\mathsf{\Xi}$ und Z ist in Beziehung auf den Fluchtpunkt F, auch ein von F verschiedener eigentlich rationaler, und es gilt nach 89) für die Zahl η von H die Gleichung $\eta = \frac{1}{2}(\xi + \zeta)$. Diese Gleichung läßt sich nun auch auf den Fall übertragen, daß es sich um den harmonischen Mittelpunkt Y von zwei solchen Punkten X und Z handelt, die auch uneigentlich rational oder irrational sein dürfen. Zu diesem Zweck denkt man sich zwei eigentlich rationale Hilfspunkte $\mathsf{\Xi}$ und Z so, daß $\mathsf{\Xi}$ auf derselben Seite von X, wie Z von Z gelegen ist. Es muß dann (vgl. S. 209) auch der harmonische Mittelpunkt H von $\mathsf{\Xi}$ und Z auf derselben Seite von Y sein, wie $\mathsf{\Xi}$ von X, und Z von Z, natürlich immer mit Beziehung auf den Fluchtpunkt F. Man wendet nun das in § 18 des zweiten Abschnitts durchgeführte Verfahren an, wobei man jetzt statt der dyadischen Punkte beliebige eigentlich rationale Punkte nimmt. Indem man die

Hilfspunkte das eine Mal auf der einen, das andere Mal auf der anderen Seite wählt, beziehungsweise, in dem Fall, daß dem einen Punkt die Zahl ∞ zugeordnet ist, erwägt, auf welcher Seite die Hilfspunkte liegen müssen, ergibt sich: Wenn die den Punkten X und Z zugeordneten Zahlen x und z endlich sind, so ist auch die dem Punkt Y zugeordnete Zahl y endlich und zwar ist $y = \frac{1}{2}(x+z)$, wenn aber x endlich, und $z = \infty$ ist, so ist auch $y = \infty$. Damit ist auch folgendes gezeigt: Kommen zwei Punkten X und Y die endlichen Zahlen x und y zu, und bestimmt man Z so, daß Y der harmonische Mittelpunkt von X und Z ist, immer in bezug auf F als Fluchtpunkt, so ist die dem Punkt Z zugehörende Zahl endlich und durch die Relation

120) $$z = 2y - x$$

gegeben.

Jetzt sollen an Stelle der ursprünglich mit 0 und 1 bezeichneten Punkte A_0 und A_1 unter Belassung des Fluchtpunkts F zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte B_0 und B_1 eingeführt werden, von denen wir aber voraussetzen wollen, daß ihnen, wenn A_0, A_1 und F als Grundpunkte $0, 1, \infty$ angesehen werden, die *endlichen* Zahlen b_0 und b_1 zukommen. Man erkennt aus Relation 120) sofort, daß die Punkte, die dann, wenn B_0, B_1, F zu Grundpunkten $0, 1, \infty$ gewählt werden, im eigentlichen Sinne die Zahlen

$$\cdots, -2, -1, 0, 1, +2, \cdots$$

erhalten, in Beziehung auf die ursprünglichen Grundpunkte die Zahlen

121) $$\cdots, b_0+(-2)(b_1-b_0), b_0+(-1)(b_1-b_0), b_0, b_0+1(b_1-b_0), b_0+2(b_1-b_0), \cdots$$

besitzen müssen. Ein Punkt X erhalte für die neuen Grundpunkte die Zahl x', für die alten die Zahl x. Es ergibt sich aus 121), falls X ein für die neuen Grundpunkte eigentlich ganzzahliger Punkt ist, daß die Relation

122) $$x = b_0 + x'(b_1 - b_0)$$

besteht. Diese Relation läßt sich nun auf andere Fälle übertragen. Zu diesem Zweck kommt das Verfahren von § 19 des zweiten Abschnitts mit Vorteil zur Anwendung, wobei man zu bedenken hat, daß sich dieselbe Verteilung der Zahlen über die Gerade ergibt, wenn man statt der in § 33 gegebenen, auf die rationalen Punkte gegründeten Definition die Definition von § 17 anwendet, welche die dyadischen Punkte benutzt (§ 33). Es überträgt sich nun die Relation 122) zuerst auf den Fall, daß X ein für die neuen Grundpunkte eigentlich dyadischer Punkt ist, und dann mit Hilfe der Beziehungen, die zwischen der Ordnung der Punkte und der Zahlen gelten, auf einen beliebigen Punkt X, dessen x' endlich ist.

Schließlich kann die Formel dann, *wenn* b_0 *und* b_1 *voneinander verschieden sind*, auch noch für den Fall in Anspruch genommen werden, daß $x' = \infty$ ist, indem man beweisen kann, daß dann auch $x = \infty$ sein muß.

Wir untersuchen jetzt den Fall besonders, daß $b_1 = b_0$ ist. Die Formel 122) ergibt in diesem Fall für jedes endliche x', daß $x = b_0$ ist. Es kommt also jetzt jedem Punkt, der für die neuen Grundpunkte eine endliche Zahl erhält, für die alten Grundpunkte die Zahl b_0 zu. Diejenigen Punkte, denen für die alten Grundpunkte eine endliche und von b_0 verschiedene Zahl zukommt, die ja tatsächlich existieren, sind somit solche vom Fluchtpunkt F verschiedene Punkte, denen für die neuen Grundpunkte die Zahl ∞ zugehört. Es gilt also (s. o. S. 255) der Fluchtpunktssatz nicht für F als Fluchtpunkt zusammen mit B_0 und B_1 als Punkten 0 und 1.

Wir haben also bewiesen, daß, falls in Beziehung auf die alten Grundpunkte A_0, A_1, F die beiden verschiedenen Punkte B_0 und B_1 dieselbe endliche Zahl erhalten, für den Fluchtpunkt F zusammen mit diesen Punkten B_0 und B_1 als Punkten 0 und 1 der Fluchtpunktssatz nicht gelten kann. Macht man jetzt umgekehrt die Voraussetzung, daß für den ursprünglichen Fluchtpunkt F zusammen mit je zwei Punkten 0 und 1 der Fluchtpunktssatz bestehen soll, so gilt in Beziehung auf die ursprünglichen Grundpunkte A_0, A_1, F, daß verschiedenen Punkten, die endliche Zahlen erhalten, stets verschiedene Zahlen zugeordnet sind. Es muß aber unter der gemachten Voraussetzung auch jeder von F verschiedene Punkt wirklich eine endliche Zahl erhalten (s. o. S. 255). Mit Rücksicht auf das oben Bewiesene (S. 256) muß daher das aus A_0, A_1, F gebildete allgemeine harmonische Punktsystem überalldicht sein. Da nun auch je zwei voneinander und von F verschiedene Punkte mit F zusammen die ursprünglichen Grundpunkte vorstellen können, so ergibt sich der Satz:

123) *Gilt für den Fluchtpunkt F zusammen mit je zwei Punkten* 0 *und* 1 *der Fluchtpunktssatz, so ist jedes allgemeine harmonische Punktsystem überalldicht, das aus solchen drei Punkten der Geraden, unter denen der Punkt F vorkommt, gebildet ist.*

Es sollen nun A_0, A_1, F wieder drei bestimmte, verschiedene Punkte bedeuten, die der Reihe nach mit $0, 1, \infty$ bezeichnet werden. Das aus diesen drei Punkten gebildete allgemeine harmonische Punktsystem sei in der Geraden überalldicht. Es bekommt somit (s. S. 256) für diese Grundpunkte nur der Punkt F die Zahl ∞, und zwei voneinander und von F verschiedene Punkte erhalten verschiedene endliche Zahlen. B_0 und B_1 seien zwei bestimmte solcher Punkte mit den verschiedenen endlichen Zahlen b_0 und b_1. Sind jetzt C_0 und C_1 auch zwei voneinander und

von F verschiedene Punkte, so kann diesen, wenn nunmehr B_0, B_1, F als die Grundpunkte $0, 1, \infty$ aufgefaßt werden, nicht eine und dieselbe endliche Zahl x' entsprechen; es würde ja sonst die Formel 122) auch die auf die ursprünglichen Grundpunkte sich beziehende Zahl x für C_0 und für C_1 gleich ergeben. Es kann auch für keinen der Punkte C_0 und C_1 die Zahl $x' = \infty$ sein, weil dann aus der auch für diesen Fall (s. o.) gültigen Formel 122) sich das zugehörige $x = \infty$ ergeben müßte, während doch jeder der Punkte C vom Punkt F verschieden gedacht war. Es kommen also auch dann, wenn B_0, B_1, F zu Grundpunkten $0, 1, \infty$ gemacht werden, verschiedenen Punkten verschiedene Zahlen, und nur dem Punkt F die Zahl ∞ zu. Somit ist auch (s. S. 256) das aus B_0, B_1, F entspringende allgemeine harmonische Punktsystem überalldicht. Gilt also die Tatsache der Dichtigkeit für ein aus drei bestimmten verschiedenen Punkten entspringendes System, so gilt sie auch dann noch, wenn von diesen drei Punkten zwei so geändert werden, daß wieder drei verschiedene Punkte entstehen. Auf die Ordnung der Punkte kommt es jetzt nicht mehr an. Da man nun durch eine oder durch zwei sukzessiv ausgeführte solche Änderungen von zwei Punkten drei beliebig gegebene Punkte in irgend drei gewünschte überführen kann, so erhält man, wenn man noch 123) und die Resultate von S. 256 berücksichtigt, den Satz:

Gibt es auf einer den Postulaten I *bis* VI *genügenden Geraden ein überalldichtes allgemeines harmonisches Punktsystem, oder gilt auf einer solchen Geraden für einen bestimmten Fluchtpunkt zusammen mit je zwei andern Punkten als Punkten* 0 *und* 1 *der Fluchtpunktssatz, so ist auf der Geraden jedes allgemeine harmonische Punktsystem überalldicht, und es gilt auf ihr der Fluchtpunktssatz allgemein.*

Zusammenstellung der Postulate und Namenserklärungen.

Leipzig, Mai 1907.

Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.

Von

E. Zermelo in Göttingen.

Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen (indispensable) Bestandteil (part) der mathematischen Wissenschaft. Nun scheint aber gegenwärtig (at present) gerade diese Disziplin in ihrer ganzen Existenz bedroht durch gewisse Widersprüche oder „Antinomieen", die sich aus ihren scheinbar denknotwendig gegebenen Prinzipien herleiten lassen und bisher noch keine allseitig befriedigende Lösung gefunden haben. Angesichts (Considering) namentlich der „Russellschen Antinomie" von der „Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten"*) scheint es heute nicht mehr zulässig (allowable), einem beliebigen logisch definierbaren Begriffe eine „Menge" oder „Klasse" als seinen „Umfang" (range, extent) zuzuweisen (assign). Die ursprüngliche Cantorsche Definition einer „Menge" als einer „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen"**) bedarf also jedenfalls einer Einschränkung, ohne daß es doch schon gelungen wäre, sie durch eine andere, ebenso einfache zu ersetzen, welche zu keinen solchen Bedenken mehr Anlaß gäbe. Unter diesen Umständen bleibt gegenwärtig nichts anderes übrig, als den umgekehrten Weg einzuschlagen und, ausgehend von der historisch bestehenden „Mengenlehre", die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind. Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.

In der hier vorliegenden Arbeit gedenke ich nun zu zeigen, wie sich die gesamte von G. Cantor und R. Dedekind geschaffene Theorie auf

---

*) B. Russell, „The principles of Mathematics", vol. I, p. 366—368, 101—107.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 46, p. 481.

einige wenige Definitionen und auf sieben anscheinend voneinander unabhängige „Prinzipien“ oder „Axiome“ zurückführen läßt. Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben. Selbst die gewiß sehr wesentliche „Widerspruchslosigkeit“ meiner Axiome habe ich noch nicht streng beweisen können, sondern mich auf den gelegentlichen Hinweis beschränken müssen, daß die bisher bekannten „Antinomieen“ sämtlich verschwinden, wenn man die hier vorgeschlagenen Prinzipien zugrunde legt. Für spätere Untersuchungen, welche sich mit solchen tiefer liegenden Problemen beschäftigen, möchte ich hiermit wenigstens eine nützliche Vorarbeit liefern.

Der nachstehende Artikel enthält die Axiome und ihre nächsten Folgerungen, sowie eine auf diese Prinzipien gegründete Theorie der Äquivalenz, welche die formelle Anwendung der Kardinalzahlen vermeidet. Ein zweiter Artikel, der die Lehre von der Wohlordnung und ihre Anwendung auf die endlichen Mengen und die Prinzipien der Arithmetik im Zusammenhange entwickeln soll, ist in Vorbereitung.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Axiome.

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem *„Bereich“* $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als *„Dinge“* bezeichnen wollen, unter denen die „Mengen“ einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$. Von einem Dinge a sagen wir, es „existiere“, wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Dingen, „es gebe Dinge der Klasse $\mathfrak{K}$“, wenn $\mathfrak{B}$ mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält.

2. Zwischen den Dingen des Bereiches $\mathfrak{B}$ bestehen gewisse *„Grundbeziehungen“* der Form $a \varepsilon b$. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung $a \varepsilon b$, so sagen wir, „a sei *Element* der Menge b“ oder „b enthalte a als Element“ oder „besitze das Element a“. Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann — mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).

3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so daß aus $x \varepsilon M$ stets $x \varepsilon N$ gefolgert werden kann, so sagen wir, „M sei *Untermenge* von N“, und schreiben $M \Subset N$*). Es ist stets $M \Subset M$, und aus $M \Subset N$ und $N \Subset R$ folgt immer $M \Subset R$. *„Elementenfremd“*

*) Dieses „Subsumptions“-Zeichen wurde von E. Schröder („Vorlesungen über Algebra der Logik“ Bd. I) eingeführt. Herr G. Peano und ihm folgend B. Russell, Whitehead u. a. brauchen dafür das Zeichen $\supset$.

heißen zwei Mengen M, N, wenn sie keine „gemeinsamen" Elemente besitzen, oder wenn kein Element von M gleichzeitig Element von N ist.

4. Eine Frage oder Aussage $\mathfrak{E}$, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt *„definit"*. Ebenso wird auch eine „Klassenaussage" $\mathfrak{E}(x)$, in welcher der variable Term x alle Individuen einer Klasse $\mathfrak{K}$ durchlaufen kann, als „definit" bezeichnet, wenn sie für *jedes einzelne* Individuum x der Klasse $\mathfrak{K}$ definit ist. So ist die Frage, ob $a \varepsilon b$ oder nicht ist, immer definit, ebenso die Frage, ob $M \Subset N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden *„Axiome"* oder *„Postulate"*.

Axiom I. Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \Subset N$ und $N \Subset M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)

Die Menge, welche nur die Elemente $a, b, c, \cdots, r$ enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit $\{a, b, c, \cdots, r\}$ bezeichnet werden.

Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die *„Nullmenge"* 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge $\{a\}$, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)

5. Nach I sind die „Elementarmengen" $\{a\}$, $\{a, b\}$ immer eindeutig bestimmt, und es gibt nur eine einzige „Nullmenge". Die Frage, ob $a = b$ oder nicht, ist immer definit (Nr. 4), da sie mit der Frage, ob $a \varepsilon \{b\}$ ist, gleichbedeutend ist.

6. Die Nullmenge ist Untermenge jeder Menge M, $0 \Subset M$; eine gleichzeitig von 0 und M verschiedene Untermenge von M wird als *„Teil"* von M bezeichnet. Die Mengen 0 und $\{a\}$ besitzen keine Teile.

Axiom III. Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Aussonderung.)

Indem das vorstehende Axiom III in weitem Umfange die Definition neuer Mengen gestattet, bildet es einen gewissen Ersatz für die in der Einleitung angeführte und als unhaltbar aufgegebene allgemeine Mengendefinition, von der es sich durch die folgenden Einschränkungen unterscheidet: Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axiomes

niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen *ausgesondert* werden, wodurch widerspruchsvolle Gebilde wie „die Menge aller Mengen" oder „die Menge aller Ordinalzahlen" und damit nach dem Ausdrucke des Herrn G. Hessenberg „(Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV) die „ultrafiniten Paradoxieen" ausgeschlossen sind. Zugleich muß zweitens das bestimmende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ im Sinne unserer Erklärung Nr. 4 immer „definit" d. h. für jedes einzelne Element x von M durch die „Grundbeziehungen des Bereiches" entschieden sein, und hiermit kommen alle solchen Kriterien wie „durch eine endliche Anzahl von Worten definierbar" und damit die „Antinomie Richard" oder die „Paradoxie der endlichen Bezeichnung" (Hessenberg a. a. O. XXIII, vergl. dagegen J. König, Math. Ann. Bd. 61, p. 156) für unseren Standpunkt in Wegfall. Hieraus folgt aber auch, daß, streng genommen, vor jeder Anwendung unseres Axioms III immer erst das betreffende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ als „definit" nachgewiesen werden muß, was denn auch in den folgenden Entwicklungen bei jeder Gelegenheit, wo es nicht ganz selbstverständlich ist, immer geschehen soll.

7. Ist $M_1 \mathrel{\prec\!\!\!\!=} M$, so besitzt M immer eine weitere Untermenge $M - M_1$, die „*Komplementärmenge* von M_1", welche alle diejenigen Elemente von M umfaßt, die *nicht* Elemente von M_1 sind. Die Komplementärmenge von $M - M_1$ ist wieder M_1. Die Komplementärmenge von $M_1 = M$ ist die Nullmenge 0, die Komplementärmenge jedes „Teiles" M_1 von M (Nr. 6) ist wieder ein „Teil" von M.

8. Sind M, N irgend zwei Mengen, so bilden nach III diejenigen Elemente von M, welche gleichzeitig Elemente von N sind, die Elemente einer Untermenge D von M, welche auch Untermenge von N ist und alle M und N *gemeinsamen* Elemente umfaßt. Diese Menge D wird der „gemeinsame Bestandteil" oder der „*Durchschnitt*" der Mengen M und N genannt und mit $[M, N]$ bezeichnet. Ist $M \mathrel{\prec\!\!\!\!=} N$, so ist $[M, N] = M$; ist $N = 0$ oder sind M und N „elementenfremd" (Nr. 3), so ist $[M, N] = 0$.

9. Ebenso existiert auch für mehrere Mengen $M, N, R, \cdots$ immer ein „Durchschnitt" $D = [M, N, R, \cdots]$. Ist nämlich T irgend eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so entspricht nach III jedem Dinge a eine gewisse Untermenge $T_a \mathrel{\prec\!\!\!\!=} T$, welche alle diejenigen Elemente von T umfaßt, die a als Element enthalten. Es ist somit für jedes a definit, ob $T_a = T$ ist, d. h. ob a gemeinsames Element aller Elemente von T ist, und ist A ein beliebiges Element von T, so bilden alle Elemente a von A, für welche $T_a = T$ ist, die Elemente einer Untermenge D von A, welche alle diese gemeinsamen Elemente umfaßt. Diese Menge D wird „der zu T gehörende Durchschnitt" genannt und mit $\mathfrak{D}T$ bezeichnet. Besitzen die Elemente von T keine gemeinsamen Elemente, so ist $\mathfrak{D}T = 0$, und dies ist z. B. immer der Fall, wenn ein Element von T keine Menge oder die Nullmenge ist.

10. **Theorem.** Jede Menge M besitzt mindestens eine Untermenge M_0, welche nicht Element von M ist.

Beweis. Für jedes Element x von M ist es definit, ob $x \varepsilon x$ ist oder nicht; diese Möglichkeit $x \varepsilon x$ ist an und für sich durch unsere Axiome nicht ausgeschlossen. Ist nun M_0 diejenige Untermenge von M, welche gemäß III alle solchen Elemente von M umfaßt, für die *nicht* $x \varepsilon x$ ist, so kann M_0 nicht Element von M sein. Denn entweder ist $M_0 \varepsilon M_0$ oder nicht. Im ersteren Falle enthielte M_0 ein Element $x = M_0$, für welches $x \varepsilon x$ wäre, und dieses widerspräche der Definition von M_0. Es ist also sicher *nicht* $M_0 \varepsilon M_0$, und es müßte somit M_0, wenn es Element von M wäre, auch Element von M_0 sein, was soeben ausgeschlossen wurde.

Aus dem Theorem folgt, daß nicht alle Dinge x des Bereiches $\mathfrak{B}$ Elemente einer und derselben Menge sein können; d. h. *der Bereich* $\mathfrak{B}$ *ist selbst keine Menge*, — womit die „Russellsche Antinomie" für unseren Standpunkt beseitigt ist.

Axiom IV. Jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}T$ (die *„Potenzmenge"* von T), welche alle Untermengen von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Potenzmenge.)

Axiom V. Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die *„Vereinigungsmenge"* von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Vereinigung.)

11. Ist kein Element von T eine von 0 verschiedene Menge, so ist natürlich $\mathfrak{S}T = 0$. Ist $T = \{M, N, R, \cdots\}$, wo die $M, N, R, \cdots$ sämtlich Mengen sind, so schreibt man auch $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ und nennt $\mathfrak{S}T$ die *„Summe* der Mengen $M, N, R, \cdots$", ob einige dieser Mengen $M, N, R, \cdots$ nun gemeinsame Elemente besitzen oder nicht. Es ist immer $M = M + 0 = M + M = M + M + \cdots$.

12. Für die soeben definierte „Addition" der Mengen gilt das „kommutative" und das „assoziative" Gesetz:

$$M + N = N + M, \quad M + (N + R) = (M + N) + R.$$

Endlich gilt für „Summen" und „Durchschnitte" (Nr. 8) auch das „distributive" Gesetz in doppelter Form:

$$[M + N, R] = [M, R] + [N, R],$$
$$[M, N] + R = [M + R, N + R].$$

Den Beweis führt man mit Hilfe von I, indem man zeigt, daß jedes Element der linksstehenden Menge zugleich Element der rechtsstehenden Menge ist und umgekehrt.*)

*) Diese vollständige Theorie dieser „logischen Addition und Multiplikation" findet sich in E. Schröders „Algebra der Logik", Bd. I.

different

13. **Einführung des Produktes.** Ist M eine von 0 verschiedene Menge und a irgend eines ihrer Elemente, so ist nach Nr. 5 definit, ob $M = \{a\}$ ist oder nicht. *Es ist also immer definit, ob eine vorgelegte Menge aus einem einzigen Element besteht oder nicht.*

Es sei nun T eine Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ lauter (untereinander elementenfremde) Mengen sein mögen, und S_1 irgend eine Untermenge ihrer „Vereinigungsmenge" $\mathfrak{S}T$. Dann ist für jedes Element M von T definit, ob der Durchschnitt $[M, S_1]$ aus einem einzigen Element besteht oder nicht. Somit bilden alle diejenigen Elemente von T, welche mit S_1 genau ein Element gemein haben, die Elemente einer gewissen Untermenge T_1 von T, und es ist wieder definit, ob $T_1 = T$ ist oder nicht. Alle Untermengen $S_1 \mathrel{\prec\!\!\!=} \mathfrak{S}T$, welche mit jedem Elemente von T genau ein Element gemein haben, bilden also nach III die Elemente einer Menge $P = \mathfrak{P}T$, welche nach III und IV Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ ist und als die „zu T gehörende *Verbindungsmenge*" oder als „das *Produkt* der Mengen $M, N, R, \cdots$" bezeichnet werden soll. Ist $T = \{M, N\}$, oder $T = \{M, N, R\}$, so schreibt man abgekürzt $\mathfrak{P}T = MN$ oder $= MNR$.

Um nun den Satz zu gewinnen, daß *ein Produkt mehrerer Mengen nur dann verschwinden* (d. h. der Nullmenge gleich sein) *kann, wenn ein Faktor verschwindet,* brauchen wir ein weiteres Axiom.

Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat.

(Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente $M, N, R, \cdots$ von T ein einzelnes Element $m, n, r, \cdots$ *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.*)

Die vorstehenden Axiome genügen, wie wir sehen werden, um alle wesentlichen Theoreme der allgemeinen Mengenlehre abzuleiten. Um aber die Existenz „unendlicher" Mengen zu sichern, bedürfen wir noch des folgenden, seinem wesentlichen Inhalte von Herrn R. Dedekind**) herrührenden Axiomes.

Axiom VII. Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, daß jedem ihrer

---

*) Über die Berechtigung dieses Axiomes vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 65, p. 107—128, wo im § 2 p. 111 ff. die bezügliche Literatur erörtert wird.

**) „Was sind und was sollen die Zahlen?" § 5 Nr. 66. Der von Herrn Dedekind hier versuchte „Beweis" dieses Prinzips kann nicht befriedigen, da er von der „Menge alles Denkbaren" ausgeht, während für unseren Standpunkt nach Nr. 10 der Bereich $\mathfrak{B}$ selbst *keine* Menge bildet.

Elemente a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht, oder welche mit jedem ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält.

(Axiom des Unendlichen.)

14_{VII}.*) Ist Z eine beliebige Menge von der in VII geforderten Beschaffenheit, so ist für jede ihrer Untermengen Z_1 definit, ob sie die gleiche Eigenschaft besitzt. Denn ist a irgend ein Element von Z_1, so ist definit, ob auch $\{a\} \varepsilon Z_1$ ist, und alle so beschaffenen Elemente a von Z_1 bilden die Elemente einer Untermenge Z_1', für welche definit ist, ob $Z_1' = Z_1$ ist oder nicht. Somit bilden alle Untermengen Z_1 von der betrachteten Eigenschaft die Elemente einer Untermenge $T \in \mathfrak{U}Z$, und der ihnen entsprechende Durchschnitt (Nr. 9) $Z_0 = \mathfrak{D}T$ ist eine Menge von der gleichen Beschaffenheit. Denn einmal ist 0 gemeinsames Element aller Elemente Z_1 von T, und andererseits, wenn a gemeinsames Element aller dieser Z_1 ist, so ist auch $\{a\}$ allen gemeinsam und somit gleichfalls Element von Z_0.

Ist nun Z' irgend eine andere Menge von der im Axiom geforderten Beschaffenheit, so entspricht ihr in genau derselben Weise wie Z_0 dem Z eine kleinste Untermenge Z_0' von der betrachteten Eigenschaft. Nun muß aber auch der Durchschnitt $[Z_0, Z_0']$, welcher eine gemeinsame Untermenge von Z und Z' ist, die gleiche Beschaffenheit wie Z und Z' haben und als Untermenge von Z den Bestandteil Z_0, sowie als Untermenge von Z' den Bestandteil Z_0' enthalten. Nach I folgt also, daß $[Z_0, Z_0'] = Z_0 = Z_0'$ sein muß, und daß somit Z_0 *der gemeinsame Bestandteil aller möglichen wie Z beschaffenen Mengen* ist, obwohl diese nicht die Elemente einer Menge zu bilden brauchen. Die Menge Z_0 enthält die Elemente 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ usw. und möge als *„Zahlenreihe“* bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. Sie bildet das einfachste Beispiel einer „abzählbar unendlichen“ Menge (Nr. 36).

§ 2.

Theorie der Äquivalenz.

Die „Äquivalenz“ zweier Mengen**) läßt sich für unseren Standpunkt zunächst nur für den Fall definieren, wo die Mengen „elementenfremd“ (Nr. 3) sind, und kann erst nachträglich auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

15. Definition A. Zwei elementenfremde Mengen M und N heißen *„unmittelbar äquivalent“*, $M \sim N$, wenn ihr Produkt MN (Nr. 13) mindestens eine solche Untermenge Φ besitzt, daß jedes Element von $M + N$ in einem

---

*) Die Indizes VI oder VII an der Nummer eines Theorems sollen ausdrücken, daß hier das Axiom VI oder VII explizit oder implizit zur Anwendung kommt.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 46, p. 483.

und nur einem Elemente $\{m, n\}$ von Φ als Element erscheint. Eine Menge $\Phi \in MN$ von der betrachteten Beschaffenheit heißt eine *„Abbildung von M auf N“*; zwei Elemente m, n, welche in einem Elemente von Φ vereinigt erscheinen, heißen „aufeinander abgebildet“, sie „entsprechen einander“, das eine ist „das Bild“ des anderen.

16. Ist Φ irgend eine Untermenge von MN, also Element von $\mathfrak{U}(MN)$, und x irgend ein Element von $M + N$, so ist es immer definit (Nr. 4), ob die x enthaltenden Elemente von Φ eine Menge bilden, die aus einem einzigen Element besteht (Nr. 13). Somit ist auch definit, ob *alle* Elemente x von $M + N$ diese Eigenschaft besitzen, d. h. ob Φ eine „Abbildung“ von M auf N darstellt oder nicht. Die sämtlichen Abbildungen Φ bilden also nach III die Elemente einer gewissen Untermenge Ω von $\mathfrak{U}(MN)$, und es ist definit, ob Ω von 0 verschieden ist oder nicht. *Für zwei elementenfremde Mengen M, N ist es also immer definit, ob sie äquivalent sind oder nicht.*

17. Sind zwei äquivalente elementenfremde Mengen M, N durch Φ aufeinander abgebildet, so entspricht auch jeder Untermenge $M_1 \in M$ eine äquivalente Untermenge $N_1 \in N$ vermöge einer Abbildung Φ_1, welche eine Untermenge von Φ ist.

Denn für jedes Element $\{m, n\}$ von Φ ist es definit, ob $m \varepsilon M_1$ ist oder nicht, und alle in dieser Weise zu M_1 gehörenden Elemente von Φ bilden somit die Elemente einer Untermenge $\Phi_1 \in \Phi$. Bezeichnet man nun mit N_1 den Durchschnitt (Nr. 8) von $\mathfrak{S}\Phi_1$ mit N, so erscheint jedes Element von $M_1 + N_1$ nur in einem einzigen Elemente von Φ_1 als Element, weil es sonst auch in Φ mehrfach vorkommen würde, und es ist nach Nr. 15 in der Tat $M_1 \sim N_1$.

18. Sind zwei elementenfremde Mengen M und N einer und derselben dritten Menge R gleichzeitig elementenfremd und äquivalent, oder ist $M \sim R$, $R \sim R'$, $R' \sim N$, wobei je zwei aufeinander folgende Mengen elementenfremd sein sollen, so ist auch immer $M \sim N$.

Es seien $\Phi \in MR$, $X \in RR'$, $\Psi \in R'N$ drei „Abbildungen“ (Nr. 15), welche bezw. M auf R, R auf R' und R' auf N abbilden. Ist dann $\{m, n\}$ irgend ein Element von MN, so ist definit, ob es ein Element $r \varepsilon R$ und ein Element $r' \varepsilon R'$ gibt, so daß gleichzeitig $\{m, r\} \varepsilon \Phi$, $\{r, r'\} \varepsilon X$ und $\{r', n\} \varepsilon \Psi$ ist. Alle Elemente $\{m, n\}$ von dieser Beschaffenheit bilden somit die Elemente einer Menge $\Omega \in MN$, welche eine Abbildung von M auf N darstellt. Ist nämlich etwa m irgend ein Element von M, so entspricht ihm immer ein einziges Element $r \varepsilon R$, ein einziges $r' \varepsilon R'$ und somit auch ein einziges $n \varepsilon N$ von der verlangten Beschaffenheit; das Analoge gilt für jedes Element n von N. Jedem Elemente von $M + N$ entspricht also in der Tat ein einziges Element $\{m, n\}$ von Ω, und es ist wirklich $M \sim N$.

19. Theorem. Sind M und N irgend zwei Mengen, so gibt es immer eine Menge M', welche der einen M äquivalent und der anderen N elementenfremd ist.

Beweis. Es sei $S = \mathfrak{S}(M + N)$ gemäß V die Menge, welche die Elemente der Elemente von $M + N$ umfaßt, und r gemäß Nr. 10 ein Ding, welches nicht Element von $M + S$ ist. Dann sind die Mengen M und $R = \{r\}$ elementenfremd, und das Produkt $M' = MR$ besitzt die im Theorem verlangte Eigenschaft. In der Tat ist dann jedes Element von M' nach Nr. 13 eine Menge der Form $m' = \{m, r\}$, wo $m \varepsilon M$ ist, und niemals Element von $M + N$, weil sonst r Element eines Elementes von $M + N$ und damit gemäß V Element von S wäre gegen die Annahme. Also ist M' beiden Mengen M und N elementenfremd.

Ferner entspricht jedem Element m von M ein und nur ein Element $m' = \{m, r\}$, und umgekehrt enthält jedes m' nur ein einziges Element m von M als Element, da r kein Element von M sein sollte. Jedem Element von $M + M'$ entspricht also ein einziges Element $\{m, m'\}$ von MM', für welches $m' = \{m, r\}$ ist, und wenn man alle so beschaffenen Paare $\{m, m'\}$ zu einer Untermenge $\Phi \in MM'$ rechnet, so ist nach Nr. 15 Φ eine Abbildung von M auf M' und $M \sim M'$.

Aus unserem Satze folgt, daß *die sämtlichen Mengen, welche einer nicht verschwindenden Menge M äquivalent sind, nicht die Elemente einer Menge T bilden können;* denn ist T eine beliebige Menge, so gibt es immer eine Menge $M' \sim M$, welche der Vereinigung $\mathfrak{S}T$ elementenfremd und daher *nicht* Element von T ist.

20. Sind M und N irgend zwei Mengen, so ist es immer definit, ob es eine Menge R gibt, welche beiden Mengen M und N gleichzeitig elementenfremd und äquivalent ist.

Es sei nämlich M' gemäß Nr. 19 eine Menge, welche M äquivalent und $M + N$ elementenfremd ist. Dann ist nach Nr. 16 definit, ob $M' \sim N$ ist oder nicht. Im ersteren Falle ist $R = M'$ eine Menge von der verlangten Beschaffenheit, im entgegengesetzten Falle kann es eine solche Menge R überhaupt nicht geben, da nach Nr. 18 aus $M' \sim M$, $M \sim R$ und $R \sim N$ immer $M' \sim N$ folgen müßte gegen die Annahme.

Das vorstehende Theorem in Verbindung mit Nr. 18 berechtigt uns jetzt zu der folgenden Erweiterung unserer Definition A:

21. Definition B. Zwei beliebige (nicht elementenfremde) Mengen M und N heißen *„mittelbar äquivalent“*, $M \sim N$, wenn es eine dritte Menge R gibt, welche ihnen beiden elementenfremd und im Sinne der Definition A beiden „unmittelbar äquivalent“ ist.

Eine solche durch R „vermittelte“ Äquivalenz zweier Mengen M und N wird gegeben durch *zwei simultane* „Abbildungen“ $\Phi \in MR$ und

$\Psi \prec NR$, und zwei Elemente $m \varepsilon M$ und $n \varepsilon N$ heißen „entsprechend“ oder „aufeinander abgebildet“, wenn sie einem und demselben dritten Elemente $r \varepsilon R$ entsprechen, so daß gleichzeitig $\{m, r\} \varepsilon \Phi$ und $\{n, r\} \varepsilon \Psi$ ist. Auch bei einer solchen vermittelten Abbildung entspricht wie in Nr. 17 jeder Untermenge M_1 von M eine äquivalente Untermenge R_1 von R und somit wieder eine äquivalente Untermenge $N_1 \prec N$.

Wegen Nr. 18 kann diese Definition B auch auf elementenfremde Mengen M, N angewendet werden, und nach Nr. 20 ist es immer *definit, ob zwei beliebige Mengen* im Sinne dieser Definition *äquivalent sind oder nicht.*

22. Jede Menge ist sich selbst äquivalent. Sind zwei Mengen M, N einer dritten R äquivalent, so sind sie einander selbst äquivalent.

Ist nämlich gemäß Nr. 19 M' eine Menge, welche M elementenfremd und äquivalent ist, so ist gleichzeitig $M \sim M'$ und $M' \sim M$, also nach Nr. 21 wirklich $M \sim M$.

Ist ferner die Äquivalenz der Mengen M und R vermittelt durch M', sowie die Äquivalenz von R und N vermittelt durch N', wobei M' zu M und R, sowie N' zu N und R elementenfremd sein soll, so wählen wir gemäß Nr. 19 eine sechste Menge R', welche $\sim R$ und der Summe $M + N + R$ elementenfremd ist, und haben dann wegen Nr. 18

$$M \sim M' \sim R \sim R', \quad \text{also} \quad M \sim R'$$

und

$$N \sim N' \sim R \sim R', \quad \text{also} \quad N \sim R',$$

so daß nach Nr. 21 die Äquivalenz von M und N durch R' vermittelt ist.

23. Die Nullmenge ist nur sich selbst äquivalent. Jede Menge der Form $\{a\}$ ist jeder anderen Menge $\{b\}$ derselben Form und keiner sonstigen Menge äquivalent.

Denn da das Produkt $0 \cdot M$ immer $= 0$ ist, so kann keine Menge $M \neq 0$ im Sinne der Nr. 15 der Nullmenge (unmittelbar) und somit auch keine Menge M' im Sinne von Nr. 21 ihr „mittelbar“ äquivalent sein.

Ist ferner $\{a\}$ elementenfremd zu M, d. h. a nicht εM, so sind alle Elemente des Produktes $\{a\} M$ von der Form $\{a, m\}$, und wenn M außer m noch ein weiteres Element p enthielte, so wären $\{a, m\}$ und $\{a, p\}$ nicht elementenfremd, wie in Nr. 15 für jede „Abbildung“ $\Phi \prec \{a\} M$ gefordert. Dagegen ist $\{a\} \cdot \{b\} = \{a, b\}$ stets eine Abbildung von $\{a\}$ auf $\{b\}$.

24. Theorem. Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, während M und N einerseits, M' und N' andererseits einander elementenfremd sind, so ist immer

$$M + N \sim M' + N'.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, wo $M + N$ und $M' + N'$ elementenfremd sind. Dann ist auf beide Äquivalenzen $M \sim M'$ und $N \sim N'$ die Definition A Nr. 15 anwendbar, und es gibt zwei

Abbildungen $\Phi \Subset MM'$ und $\Psi \Subset NN'$, deren Summe $\Phi + \Psi$ die verlangte Abbildung von $M + N$ auf $M' + N'$ darstellt. Ist nämlich $p \varepsilon (M + N)$, so ist entweder $p \varepsilon M$ oder $p \varepsilon N$, aber wegen $[M, N] = 0$ nicht beides gleichzeitig, und im einen Falle enthält Φ, im anderen Ψ ein einziges Element der Form $\{p, q\}$. Ebenso entspricht auch jedem Elemente q von $M' + N'$ ein und nur ein Element $\{p, q\}$ in $\Phi + \Psi$.

Sind $M + N$ und $M' + N'$ nicht selbst elementenfremd, so gibt es gemäß Nr. 19 eine Menge $S'' \sim M' + N'$, welche der Summe $M + N + M' + N'$ elementenfremd ist, und bei einer Abbildung X von $M' + N'$ auf S'' mögen wegen Nr. 17 den beiden Teilen M' und N' die äquivalenten und elementenfremden Teile M'' und N'' von S'' entsprechen. Dann ist $M \sim M' \sim M''$ sowie $N \sim N' \sim N''$ und, da jetzt $M + N$ und $M'' + N''$ elementenfremd sind, nach dem soeben Bewiesenen

$$M + N \sim M'' + N'' = S'' \sim M' + N',$$

also wieder

$$M + N \sim M' + N'.$$

25. Theorem. Ist eine Menge M einem ihrer Teile M' äquivalent, so ist sie auch jedem anderen Teile M_1 äquivalent, welcher M' als Bestandteil enthält.

Beweis. Es sei

$$M \sim M' \Subset M_1 \Subset M \quad \text{und} \quad Q = M_1 - M'.$$

Wegen der vorausgesetzten Äquivalenz $M \sim M'$ gibt es gemäß Nr. 21 eine Abbildung $\{\Phi, \Psi\}$ von M auf M', vermittelt etwa durch M''. Ist nun A eine beliebige Untermenge von M, so entspricht ihr bei der betrachteten Abbildung eine bestimmte Untermenge A' von M', und es ist definit, ob $A' \Subset A$ ist oder nicht. Somit bilden alle solchen Elemente A von $\mathfrak{U}M$, für welche gleichzeitig $Q \Subset A$ und $A' \Subset A$ ist, nach III die Elemente einer gewissen Menge $T \Subset \mathfrak{U}M$, und es ist namentlich M selbst Element von T. Der gemeinsame Bestandteil $A_0 = \mathfrak{D}T$ aller Elemente von T (Nr. 9) besitzt nun die folgenden Eigenschaften: 1) $Q \Subset A_0$, weil Q eine gemeinsame Untermenge aller $A \varepsilon T$ ist, 2) $A_0' \Subset A_0$, weil jedes Element x von A_0 gemeinsames Element aller $A \varepsilon T$ und somit auch sein Bild $x' \varepsilon A' \Subset A$ gemeinsames Element aller A ist. Wegen 1) und 2) ist also auch $A_0 \varepsilon T$. Endlich ist 3) $A_0 = Q + A_0'$. Da nämlich $A_0' \Subset A_0$ und gleichzeitig $\Subset M' \Subset M - Q$ ist, so ist einmal $A_0' \Subset A_0 - Q$. Andererseits ist aber auch jedes Element r von $A_0 - Q$ ein Element von A_0' und daher $A_0 - Q \Subset A_0'$. In der Tat, wäre r nicht $\varepsilon A_0'$, so würde auch $A_1 = A_0 - \{r\}$ noch A_0' und a fortiori A_1' als Bestandteil enthalten und, da es immer noch Q enthält, selbst Element von T sein, während es doch nur ein *Teil* von $A_0 = \mathfrak{D}T$ ist. Es ist also

$$M_1 = Q + M' = (Q + A_0') + (M' - A_0') = A_0 + (M' - A_0'),$$

wo die beiden Summanden rechts keine Elemente gemein haben, weil Q und M' elementenfremd sind. Da nun aber $A_0 \sim A_0'$ und $M' - A_0'$ sich selbst äquivalent ist, so folgt nach Nr. 24

$$M_1 \sim A_0' + (M' - A_0') = M' \sim M,$$

d. h. wie behauptet, $M_1 \sim M$.

26. **Folgerung.** Ist eine Menge M einem ihrer Teile M' äquivalent, so ist sie auch jeder Menge M_1 äquivalent, welche aus M durch Fortlassung oder Hinzufügung eines einzelnen Elementes entsteht.

Es sei

$$M \sim M' = M - R \quad \text{und} \quad M_1 = M - \{r\},$$

wo $r \varepsilon R$ sein möge. Dann ist

$$M' = M - \{r\} - (R - \{r\}) \Subset M - \{r\} = M_1$$

und nach dem vorigen Satze $M \sim M_1$.

Ist ferner

$$M_2 = M - \{a\}, \quad \text{wo} \quad a \varepsilon M' = M - R$$

ist, so sei

$$M_0 = M - \{a, r\},$$

und wir haben nach Nr. 23 und 24

$$M_2 = M_0 + \{r\} \sim M_0 + \{a\} = M_1 \sim M,$$

also auch

$$M_2 \sim M.$$

Ist endlich

$$M_3 = M + \{c\},$$

wo c nicht εM ist, so folgt aus $M \sim M'$ wieder nach Nr. 24

$$M_3 = M + \{c\} \sim M' + \{c\} = M - R + \{c\} = M_3 - R,$$

und nach dem vorher Bewiesenen weiter

$$M = M_3 - \{c\} \sim M_3,$$

womit der Satz in allen seinen Teilen bewiesen ist.

27. **Äquivalenzsatz.** Ist jede von zwei Mengen M, N einer Untermenge der anderen äquivalent, so sind M und N selbst äquivalent.

Es sei $M \sim M' \Subset N$ und $N \sim N' \Subset M$. Dann entspricht wegen Nr. 21 der Untermenge M' von N eine äquivalente Untermenge $M'' \Subset N' \Subset M$, und es ist $M \sim M' \sim M''$, also nach dem Theorem Nr. 25 auch $M \sim N' \sim N$, q. e. d.*)

---

*) Der hier in den Nrn. 25 und 27 gegebene Beweis des „Äquivalenzsatzes" (auf Grund meiner brieflichen Mitteilung vom Jan. 1906 zuerst publiziert von Herrn H. Poincaré in der Revue de Métaphysique et de Morale t. 14, p. 314) beruht lediglich auf der Dedekindschen Kettentheorie (Was sind und was sollen die Zahlen? § 4) und vermeidet im Gegensatz zu den älteren Beweisen von E. Schröder und F. Bernstein, sowie zu dem letzten Beweise von J. König (Comptes Rendus t. 143, 9 VII 1906) jede Bezugnahme auf geordnete Reihen vom Typus ω oder das Prinzip der voll-

28. **Theorem.** Ist T eine beliebige Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ sämtlich Mengen sind, so kann man sie alle gleichzeitig abbilden auf äquivalente Mengen $M', N', R', \cdots$, welche die Elemente einer neuen Menge T' bilden und unter sich sowohl wie einer gegebenen Menge Z elementenfremd sind.

Beweis. Es sei $S = \mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ nach V die Summe aller Elemente von T, und gemäß Nr. 19 sei T'' eine Menge, welche T äquivalent und der Summe $T + S + \mathfrak{S}(S + Z)$ elementenfremd ist, so daß vermöge einer Abbildung Ω jedem Elemente $M, N, R, \cdots$ von T ein bestimmtes Element $M'', N'', R'', \cdots$ von T'' entspricht. Ein beliebiges Element des Produktes ST'' (Nr. 13) ist dann von der Form $\{s, M''\}$, wo $s \varepsilon S$ und $M'' \varepsilon T''$ ist, und für jedes solche Element ist es definit (Nr. 4), ob $s \varepsilon M$ ist, wo M das dem M'' vermöge Ω entsprechende Element von T, d. h. gemäß Nr. 15 $\{M, M''\} \varepsilon \Omega$ sein soll. Alle so beschaffenen Elemente des Produktes bilden somit wegen III die Elemente einer Untermenge S' von ST'', und diese Menge S' ist $S + Z$ elementenfremd, weil sonst ein $M'' \varepsilon T''$ als Element von $\{s, M''\}$ Element eines Elementes von $S + Z$, also wegen V Element von $\mathfrak{S}(S + Z)$ wäre gegen die über T'' gemachte Annahme. Ist ferner M ein beliebiges Element von T, und M'' das entsprechende von T'', so bilden diejenigen Elemente $\{s, M''\}$ von S', welche M'' als Element enthalten, nach III eine gewisse Untermenge $M' \Subset S'$, und es ist $M' \sim M$ vermöge einer Abbildung $\mathsf{M} \Subset MM' \Subset SS'$, in welcher jedem Elemente m von M ein Element $m' = \{m, M''\}$ von M' entspricht und umgekehrt. Ebenso gehört auch zu jedem anderen Element $N \varepsilon T$ eine äquivalente Untermenge $N' \Subset S'$ und eine Abbildung $\mathsf{N} \Subset NN' \Subset SS'$, durch welche jedem Elemente n von N ein Element $\{n, N''\}$ von N' entspricht. Die beiden Untermengen M' und N', welche zu zwei verschiedenen Elementen M und N von T gehören, sind aber immer elementenfremd, denn wäre etwa

$$\{m, M''\} = \{n, N''\}$$

ein gemeinsames Element von M' und N', so müßte M'' als Element von $\{n, N''\}$ entweder $= N''$ oder $= n$ sein, und im ersten Falle wäre auch $M = N$, im zweiten aber wären T'' und S nicht elementenfremd, gegen die Annahme. Die Untermengen $M', N', R', \cdots$ von S', welche vermöge der Abbildungen $\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots$ den Elementen $M, N, R, \cdots$, von

---

ständigen Induktion. Einen ganz ähnlichen Beweis veröffentlichte ungefähr gleichzeitig Herr G. Peano („Super Teorema de Cantor-Bernstein", Rendiconti del Circolo Matematico XXI sowie Revista de Mathematica VIII, p. 136), wo in der letztgenannten Note zugleich auch der von Herrn H. Poincaré gegen meinen Beweis gerichtete Einwand erörtert wird. Vgl. meine Note Math. Ann. Bd. 65, p. 107—128, § 2 b.

T äquivalent sind, sind also in der Tat sowohl unter sich als auch, weil S' es ist, der Menge Z elementenfremd. Endlich ist von jeder Untermenge $S_1' \in S'$, welche ein Element $\{s, M''\}$ enthält, immer definit, ob sie mit der entsprechenden Menge M' identisch ist oder nicht, und alle diese $M', N', R', \cdots$ bilden gemäß III und IV die Elemente einer gewissen Menge $T' \in \mathfrak{U}S'$; der Satz ist also in allen seinen Teilen bewiesen.

29_{VI}. **Allgemeines Auswahlprinzip.** Ist T eine Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ sämtlich von Null verschiedene Mengen sind, so gibt es immer Mengen P, welche nach einer bestimmten Vorschrift jedem Element M von T eines seiner Elemente $m \varepsilon M$ eindeutig zuordnen.

Beweis. Man wende auf T' das in der vorhergehenden Nr. 28 angegebene Verfahren an, wobei $Z = 0$ gesetzt werden kann, und hat dann alle Mengen $M, N, R, \cdots$ gleichzeitig abgebildet auf die äquivalenten Mengen $M', N', R', \cdots$, welche unter sich elementenfremd sind und die Elemente einer Menge T' bilden. Ist nun P gemäß VI eine solche Untermenge von $\mathfrak{S}T'$, welche mit jedem Element von T' genau ein Element gemein hat, so leistet P die verlangte Zuordnung. Ist nämlich M irgend ein Element von T und ist M' das entsprechende Element von T', so enthält P nur ein einziges Element m' von M', und diesem entspricht wieder ein ganz bestimmtes Element m von M.

30_{VI}. **Theorem.** Sind zwei äquivalente Mengen T und T', deren Elemente $M, N, R, \cdots$ bzw. $M', N', R', \cdots$ unter sich elementenfremde Mengen sind, so aufeinander abgebildet, daß jedem Element M der einen Menge eine äquivalente Menge M' als Element der anderen entspricht, so sind auch die zugehörigen Summen $\mathfrak{S}T$ und $\mathfrak{S}T'$, sowie die entsprechenden Produkte $\mathfrak{P}T$ und $\mathfrak{P}T'$ einander äquivalent.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst unter der Annahme, daß $S = \mathfrak{S}T$ und $S' = \mathfrak{S}T'$ einander elementenfremd sind, in welchem Falle auch jedes Element von T jedem Element von T' elementenfremd sein muß. Aus $M \sim M'$ folgt dann gemäß Nr. 15, daß $\mathfrak{U}(MM')$ eine von 0 verschiedene Untermenge A_M besitzt, welche die sämtlichen möglichen Abbildungen $\mathsf{M}, \mathsf{M}', \mathsf{M}'', \cdots$ von M auf M' als Elemente enthält. Ebenso entspricht jedem anderen Element N von T eine Menge $\mathsf{A}_N \in \mathfrak{U}(NN')$, welche die sämtlichen Abbildungen von N auf N' umfaßt, und auch A_N ist $\neq 0$. Alle diese Abbildungsmengen $\mathsf{A}_M, \mathsf{A}_N, \mathsf{A}_R, \cdots$ sind Untermengen von $\mathfrak{U}(SS')$ und bilden daher wegen III und IV die Elemente einer gewissen Untermenge $\mathsf{T} \in \mathfrak{U}\mathfrak{U}(SS')$. Da nun die Elemente von T sämtlich von 0 verschiedene Mengen und unter sich elementenfremd sind (weil aus der Elementenfremdheit von MM' und NN' auch die ihrer Untermengen folgt), so ist nach Axiom VI auch das Produkt $\mathfrak{P}\mathsf{T} \neq 0$, und ein beliebiges Ele-

ment Θ von $\mathfrak{P}T$ ist eine Menge der Form $\Theta = \{M, N, P, \cdots\}$, welche von jeder der Mengen $A_M, A_N, A_R, \cdots$ genau ein Element enthält. Die Existenz einer solchen „kombinierten Abbildung" hätten wir kürzer auch aus dem Theorem Nr. 29 schließen können. Bilden wir nun gemäß V die Vereinigung

$$\Omega = \mathfrak{S}\Theta = M + N + P + \cdots \in SS',$$

so liefert Ω die verlangte Abbildung von S auf S'. Denn jedes Element s von S muß einem und nur einem Elemente von T, etwa M, als Element angehören und daher in einem einzigen Element der entsprechenden Abbildung M als Element erscheinen, während in allen übrigen Summanden $N, P, \cdots$ kein Element von M mehr vorkommt. Das analoge gilt auch für jedes Element s' von S', und nach der Definition Nr. 15 ist somit in der Tat $S \sim S'$.

Durch dasselbe Ω und seine Untermengen wird wegen Nr. 17 auch jede Untermenge p von S auf eine äquivalente Untermenge p' von S' abgebildet, und ist insbesondere $p = \{m, n, \cdots\}$ gemäß Nr. 13 ein Element von $P = \mathfrak{P}T$, so ist die ihm entsprechende Untermenge $p' = \{m', n', \cdots\}$ von S' auch ein Element von $\mathfrak{P}T'$. Ist nämlich M' ein beliebiges Element von T', und M das entsprechende Element von T, so enthält p ein und nur ein Element $m \varepsilon M$ und p' das entsprechende Element $m' \varepsilon M'$, aber auch kein weiteres Element von M', da ein solches auch einem zweiten Elemente von M in p entsprechen müßte. Ebenso entspricht jedem Elemente $p' \varepsilon \mathfrak{P}T'$ ein und nur ein Element $p \varepsilon \mathfrak{P}T$, und wir erhalten in der Tat eine bestimmte Untermenge $\Pi \in \mathfrak{P}T \cdot \mathfrak{P}T'$ als Abbildung von $\mathfrak{P}T$ auf $\mathfrak{P}T'$, so daß auch diese beiden Produkte einander äquivalent sind.

Sind nun aber S und S' nicht mehr elementenfremd, so können wir gemäß Nr. 19 eine dritte Menge S'' einführen, welche S' äquivalent und $S + S'$ elementenfremd ist. Dann entspricht wegen Nr. 17 einer Untermenge $M' \in S'$ eine äquivalente Untermenge $M'' \in S''$, und da die $M', N', R', \cdots$ untereinander elementenfremd sind, so gilt das gleiche auch von den entsprechenden $M'', N'', R'', \cdots$. Da ferner jedes Element s'' von S'' einem Elemente s' von S' entspricht, welches einer der Mengen $M', N', R', \cdots$ angehört, so ist S'' die *Summe* aller dieser $M'', N'', R'', \cdots$, welche die Elemente einer gewissen Untermenge $T'' \in \mathfrak{U}S''$ bilden. Nun haben wir aber $M \sim M' \sim M''$, $N \sim N' \sim N''$, $\cdots$; es ist also jedes Element M von T dem entsprechenden Element M'' von T'' äquivalent, und da jetzt $S'' = \mathfrak{S}T''$ beiden Summen $S' = \mathfrak{S}T'$ und $S = \mathfrak{S}T$ elementenfremd ist, so folgt nach dem oben Bewiesenen:

$$\mathfrak{S}T \sim \mathfrak{S}T'' \sim \mathfrak{S}T' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}T \sim \mathfrak{P}T'' \sim \mathfrak{P}T',$$

womit der Satz in voller Allgemeinheit bewiesen ist.

31. Definition. Ist eine Menge M einer Untermenge der Menge N

äquivalent, aber nicht umgekehrt N einer Untermenge von M, so sagen wir, M sei „von *kleinerer Mächtigkeit* als N“, und schreiben abgekürzt $M < N$.

Folgerungen. a) Da es nach Nr. 21 für irgend zwei Mengen definit ist, ob sie einander äquivalent sind oder nicht, so ist es auch definit, ob M mindestens einem Element von $\mathfrak{U}N$, sowie ob N irgend einem Element von $\mathfrak{U}M$ äquivalent ist. *Es ist also immer definit, ob $M < N$ ist oder nicht.*

b) Die drei Beziehungen $M < N$, $M \sim N$, $N < M$ schließen einander aus.

c) Ist $M < N$ und $N < R$ oder $N \sim R$, so ist immer auch $M < R$.

d) Ist M einer Untermenge von N äquivalent, so ist entweder $M \sim N$ oder $M < N$. Dies ist eine Folge des „Äquivalenzsatzes“ Nr. 27.

e) Die Nullmenge ist von kleinerer Mächtigkeit als jede andere Menge, ebenso jede aus einem einzigen Elemente bestehende Menge $\{a\}$ von kleinerer Mächtigkeit als jede Menge M, welche echte Teile besitzt. Vergl. Nr. 23.

32. Satz von Cantor. Ist M eine beliebige Menge, so ist immer $M < \mathfrak{U}M$. *Jede Menge ist von kleinerer Mächtigkeit als die Menge ihrer Untermengen.*

Beweis. Jedem Element m von M entspricht eine Untermenge $\{m\} \in M$. Da es nun für jede Untermenge $M_1 \in M$ definit ist, ob sie nur ein einziges Element enthält (Nr. 13), so bilden alle Untermengen der Form $\{m\}$ die Elemente einer Menge $U_0 \in \mathfrak{U}M$, und es ist $M \sim U_0$.

Wäre umgekehrt $U = \mathfrak{U}M$ äquivalent einer Untermenge $M_0 \in M$, so entspräche vermöge einer Abbildung Φ von U auf M_0 jeder Untermenge $M_1 \in M$ ein bestimmtes Element m_1 von M_0, so daß $\{M_1, m_1\} \varepsilon \Phi$ wäre, und es wäre immer definit, ob $m_1 \varepsilon M_1$ ist oder nicht. Alle solchen Elemente m_1 von M_0, für welche *nicht* $m_1 \varepsilon M_1$ ist, bildeten also die Elemente einer Untermenge $M' \in M_0 \in M$, welche gleichfalls Element von U wäre. Dieser Menge $M' \in M$ kann aber kein Element m' von M_0 entsprechen. Wäre nämlich $m' \varepsilon M'$, so widerspräche dies der Definition von M'. Wäre aber m' *nicht* $\varepsilon M'$, so müßte nach derselben Definition M' auch dieses Element m' enthalten, widersprechend der Annahme. Es ergibt sich also, daß U keiner Untermenge von M äquivalent sein kann, und in Verbindung mit dem zuerst Bewiesenen, $M < \mathfrak{U}M$.

Der Satz gilt für *alle* Mengen M, z. B. auch für $M = 0$, und es ist in der Tat

$$0 < \{0\} = \mathfrak{U}(0).$$

Ebenso ist auch für jedes a

$$\{a\} < \{0, \{a\}\} = \mathfrak{U}\{a\}.$$

Aus dem Satze folgt endlich, daß es zu jeder beliebigen Menge T von

Mengen $M, N, R, \cdots$ immer noch Mengen von größerer Mächtigkeit gibt; z. B. die Menge

$$P = \mathfrak{U}\mathfrak{S}T > \mathfrak{S}T \gtrsim M, N, R, \cdots$$

besitzt diese Eigenschaft.

33_{VI}. Theorem. Sind zwei äquivalente Mengen T und T', deren Elemente $M, N, R, \cdots$ bzw. $M', N', R', \cdots$ unter sich elementenfremde Mengen sind, so aufeinander abgebildet, daß jedes Element M von T von kleinerer Mächtigkeit ist als das entsprechende Element M' von T', so ist auch die Summe $S = \mathfrak{S}T$ aller Elemente von T von kleinerer Mächtigkeit als das Produkt $P' = \mathfrak{P}T'$ aller Elemente von T'.

Beweis. Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, wo die beiden Summen $S = \mathfrak{S}T$ und $S' = \mathfrak{S}T'$ elementenfremd sind. Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall vollzieht sich dann analog wie bei dem Theorem Nr. 30 und mit Hilfe desselben durch Einschaltung einer dritten Menge $S'' \sim S$, welche S' elementenfremd ist.

Zunächst ist zu zeigen, daß S einer Untermenge von P' äquivalent ist. Wegen $M < M'$ existiert eine von 0 verschiedene Untermenge $\mathsf{A}_M \in \mathfrak{U}(MM')$, deren sämtliche Elemente $\mathsf{M}, \mathsf{M}', \mathsf{M}'', \cdots$ Abbildungen sind, welche M auf Untermengen $M_1', M_2', \cdots$ von M' abbilden. Solche Abbildungsmengen $\mathsf{A}_M, \mathsf{A}_N, \mathsf{A}_R, \cdots$ existieren für je zwei entsprechende Elemente $\{M, M'\}, \{N, N'\}, \{R, R'\}, \cdots$ von T und T', und jedes Element $\Theta = \{\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots\}$ ihres Produktes $\mathfrak{P}\mathsf{T} = \mathsf{A}_M \cdot \mathsf{A}_N \cdot \mathsf{A}_R \cdots$ liefert, analog wie in Nr. 30, eine simultane Abbildung sämtlicher Elemente $M, N, R, \cdots$ von T auf äquivalente Untermengen $M_1', N_1', R_1', \cdots$ der entsprechenden Elemente von T'. Durch $\Omega = \mathfrak{S}\Theta \in SS'$ wird also jedes Element s von S auf ein Element s' von S' abgebildet, wenn auch nicht umgekehrt jedes von S' auf eines von S.

Nun sind aber die Komplementärmengen $M' - M_1', N' - N_1', R' - R_1', \cdots$, welche die Elemente einer Menge $T_1' \in \mathfrak{U}S'$ bilden, sämtlich von 0 verschieden, weil wegen $M < M'$ der Fall $M \sim M_1' = M'$ immer ausgeschlossen ist. Somit ist auch das Produkt $\mathfrak{P}T_1' \neq 0$, und es existiert mindestens eine Menge $q \,\varepsilon\, \mathfrak{P}T_1'$ von der Form $q = \{m_0', n_0', r_0', \cdots\} \in S'$, welche mit jeder der Mengen $M' - M_1', N' - N_1', \cdots$ genau ein Element gemein hat und daher auch Element von P' ist.

Ist nun s irgend ein Element von S, und s' das vermöge Ω ihm entsprechende Element von S', so entspricht ihnen beiden noch ein Element s_0 von $q \in S'$ in der Weise, daß s' und s_0' immer einem und demselben Elemente von T' angehören und somit für $s \,\varepsilon\, M$ immer $s_0' = m_0'$ ist usw. Da aber im Falle $s' \varepsilon M_1'$ stets $s_0' \varepsilon (M' - M_1')$ ist, so sind s' und s_0' immer voneinander verschieden. Bilden wir nun die Menge

$$q_s = q - \{s_0'\} + \{s'\},$$

welche aus q entsteht, indem wir das eine Element s_0' durch das andere s' ersetzen, so erhalten wir wieder ein Element von P', nämlich eine Untermenge von S', welche mit jeder der Mengen M', N', R', $\cdots$ genau ein Element gemein hat. Diese Elemente q_s von P', welche die Elemente einer Untermenge $P_0' \in P'$ bilden, sind aber sämtlich voneinander verschieden. Denn sind etwa m_1 und m_2 zwei verschiedene Elemente *derselben* Menge $M \varepsilon T$, so sind auch die entsprechenden Elemente m_1' und m_2' von M_1', welche an die Stelle von s' treten, voneinander verschieden, und somit auch

$$q_{m_1} = q - \{m_0'\} + \{m_1'\} \neq q - \{m_0'\} + \{m_2'\} = q_{m_2},$$

da q außer m_0' kein weiteres Element mit M' gemein hat. Sind aber m und n zwei Elemente von S, welche *verschiedenen* Mengen M und N angehören, so hat $q_m = q - \{m_0'\} + \{m'\}$ mit M' ein Element m' von M_1', dagegen $q_n = q - \{n_0'\} + \{n'\}$ mit M' nur das Element $m_0' \varepsilon (M' - M_1')$ gemeinsam, und beide Mengen sind gleichfalls voneinander verschieden. Somit bilden die Paare $\{s, q_s\}$ die Elemente einer Menge $\Phi \in SP_0'$, welche gemäß Nr. 15 den Charakter einer Abbildung besitzt, und es ist in der Tat $S \sim P_0' \in P'$.

Andererseits kann aber P' keiner Untermenge S_0 von S äquivalent sein. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte vermöge einer Abbildung $\Psi \in S_0 P' \in SP'$ jedem Elemente $s \varepsilon S_0$ ein Element $p_s \varepsilon P'$ entsprechen. Betrachten wir insbesondere diejenigen Elemente p_m, welche Elementen m des Durchschnittes $M_0 = [M, S_0]$ entsprechen. Jedes dieser p_m enthält dabei ein Element $m'' \varepsilon M'$, nämlich dasjenige, welches p_m als Element von P' mit M' gemeinsam hat; die zu verschiedenen m gehörenden m'' brauchen aber nicht immer verschieden zu sein. Jedenfalls bilden alle m'', die zu den Elementen m von M_0 gehören, die Elemente einer Untermenge M_2' von M', welche von M' selbst verschieden ist, da sonst M' einer Untermenge von $M_0 \in M$ äquivalent wäre gegen die Voraussetzung $M < M'$.*) In derselben Weise gehören zu *allen* Elementen $M, N, R, \cdots$ von T gewisse echte Teilmengen M_2', N_2', R_2', $\cdots$ der entsprechenden Elemente M', N', R', $\cdots$ von T'. Die zugehörigen Komplementärmengen $M' - M_2'$, $N' - N_2'$, $R' - R_2'$, $\cdots$ sind also sämtlich von 0 verschieden und bilden die Elemente einer Menge $T_2' \in \mathfrak{U}S'$. Ist nun p_0' irgend ein Element von $\mathfrak{P}T_2' \neq 0$, so ist es gleichzeitig auch Element von P', kann aber bei der vorausgesetzten Abbildung Ψ keinem Elemente s von S_0 entsprechen. Wäre nämlich etwa $p_0' = p_m$, entspräche also p_0' einem Elemente von M_0, so müßte es nach der gemachten Annahme mit M' ein Element $m'' \varepsilon M_2'$ gemein haben, während in Wirklichkeit p_0' mit M' kein anderes

*) Auch hier kommt das Auswahlaxiom VI zur Anwendung.

Element als eines von $M' - M_2'$ gemein haben kann. Ebensowenig kann p_0' irgend einem Elemente von $N_0, R_0, \cdots$ entsprechen, entspricht also überhaupt keinem Elemente von $S_0 \epsilon S$, und die Annahme $P' \sim S_0$ führt auf einen Widerspruch, womit der Beweis der Behauptung $S < P'$ vollendet ist.

Das vorstehende (Ende 1904 der Göttinger Mathematischen Gesellschaft von mir mitgeteilte) Theorem ist der allgemeinste bisher bekannte Satz über das Größer und Kleiner der Mächtigkeiten, aus dem alle übrigen sich ableiten lassen. Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung des von Herrn J. König für einen speziellen Fall (siehe unten) angewandten Verfahrens.

34vi. Folgerung. (Satz von J. König). Ist eine Menge T, deren Elemente sämtlich Mengen und untereinander elementenfremd sind, in der Weise auf eine Untermenge T' von T abgebildet, daß jedem Elemente M von T ein Element M' von T' von größerer Mächtigkeit $(M < M')$ entspricht, so ist immer $\mathfrak{S}T < \mathfrak{P}T$, sofern $\mathfrak{P}T \neq 0$ ist.*)

Nach dem Theorem Nr. 33 ist in dem betrachteten Falle immer $\mathfrak{S}T < \mathfrak{P}T'$; es bleibt also nur noch zu zeigen, daß hier $\mathfrak{P}T'$ einer Untermenge von $\mathfrak{P}T$ äquivalent ist. Für $T' = T$ ist dies trivial; im anderen Falle ist aber $\mathfrak{P}(T - T') \neq 0$, weil sonst wegen VI die Nullmenge ein Element von $T - T'$ und gegen die Annahme $\mathfrak{P}T = 0$ wäre. Ist aber q irgend ein Element von $\mathfrak{P}(T - T')$ und $p' \varepsilon \mathfrak{P}T'$, so ist $p' + q$ Element von $\mathfrak{P}T$, nämlich eine Untermenge von $\mathfrak{S}T' + \mathfrak{S}(T - T') = \mathfrak{S}T$, welche mit jedem Elemente von T' sowohl als von $T - T'$ genau ein Element gemein hat. Somit entspricht bei festgehaltenem q jedem Element p' von $\mathfrak{P}T'$ ein bestimmtes Element $p' + q$ von $\mathfrak{P}T$, und alle diese $p' + q$ bilden die Elemente einer gewissen Untermenge P_q von $\mathfrak{P}T$, welche $\sim \mathfrak{P}T'$ ist.

35. Auch der Cantorsche Satz Nr. 32 läßt sich als besonderer Fall aus dem allgemeinen Theorem Nr. 33 gewinnen.

Es sei M eine beliebige Menge, M' gemäß Nr. 19 eine M äquivalente und elementenfremde Menge und $\Phi \epsilon MM'$ eine beliebige „Abbildung" von M auf M'. Jedem Element m von M entspricht dann ein bestimmtes Element $\{m, m'\}$ von Φ und es ist immer gemäß Nr. 31e

$$\{m\} < \{m, m'\}.$$

Diese Mengen $\{m\}$ bilden offenbar die Elemente einer weiteren Menge $T \sim M$, und es ist nach dem Theorem Nr. 33

$$M = \mathfrak{S}T < \mathfrak{P}\Phi.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P}\Phi \sim \mathfrak{U}M$ ist. Nun ist jedes Element von $\mathfrak{P}\Phi$ eine Menge der Form $M_1 + (M' - M_1')$, wo M_1 eine Untermenge von M, und M_1' die entsprechende von M' bedeutet. Somit

---

*) J. König, Math. Ann. Bd. 60, p. 177 für den besonderen Fall, wo die Elemente von T nach ihrer Mächtigkeit geordnet eine Reihe vom Typus ω bilden.

entspricht in der Tat jedem Elemente M_1 von $\mathfrak{U}M$ ein und nur ein Element von $\mathfrak{P}\Phi$ und umgekehrt, und es ist, wie behauptet,

$$M < \mathfrak{P}\Phi \sim \mathfrak{U}M.$$

36$_{\text{VII}}$. **Theorem.** Die „Zahlenreihe" Z_0 (Nr. 14) ist eine „unendliche" Menge d. h. eine solche, welche einem ihrer Teile äquivalent ist. Umgekehrt enthält auch jede „unendliche" Menge M einen Bestandteil M_0, welcher „abzählbar unendlich", d. h. der Zahlenreihe äquivalent ist.

Beweis. Es sei Z eine beliebige Menge, welche gemäß VII das Element 0 und mit jedem ihrer Elemente a auch das entsprechende Element $\{a\}$ enthält, und diese Menge Z sei durch eine Abbildung $\Omega \in ZZ'$ gemäß Nr. 19 abgebildet auf eine ihr äquivalente und elementenfremde Menge Z'. Ist nun $\{z, x'\}$ ein beliebiges Element von ZZ', und $\{x, x'\}$ Element von Ω für dasselbe x', so ist immer definit, ob $z = \{x\}$ ist oder nicht. Alle solchen Elemente $\{\{x\}, x'\}$ von ZZ' bilden also nach III die Elemente einer gewissen Untermenge $\Phi \in ZZ'$, und Φ ist eine „Abbildung" von Z' auf $Z_1 \in Z$, wo Z_1 alle Elemente der Form $z = \{x\}$ umfaßt. In der Tat entspricht jedem $x' \varepsilon Z'$ ein bestimmtes $\{x\} \varepsilon Z_1$ und umgekehrt, d. h. jedes Element von $Z_1 + Z'$ erscheint in einem und nur einem Elemente von Φ. Es ist also nach Nr. 21 $Z \sim Z' \sim Z_1$, wo Z_1, weil es das Element 0 nicht enthält, nur ein *Teil* von Z ist; und jede wie Z beschaffene Menge, also auch Z_0 ist „unendlich".

Um nun auch die zweite Hälfte des Theorems zu beweisen, betrachten wir eine beliebige „unendliche" Menge M, die wir aber mit Rücksicht auf Nr. 19 unbeschadet der Allgemeinheit als elementenfremd zu Z_0 annehmen können. Es sei also $M \sim M' = M - R$, r ein beliebiges Element von $R \neq 0$ und $\{\Phi, \Psi\}$ gemäß Nr. 21 eine Abbildung, bei welcher jedem Elemente $m \varepsilon M$ ein Element $m' \varepsilon M'$ entspricht und umgekehrt. Ferner sei A eine Untermenge des Produktes MZ_0, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) sie enthält das Element $\{r, 0\}$; und 2), ist $\{m, z\}$ irgend ein Element von A, so enthält A auch das weitere Element $\{m', z'\}$, wo m' das dem m entsprechende Element von M', und $z' = \{z\}$ wegen Nr. 14 gleichfalls Element von Z_0 ist. Ist nun $\mathsf{A}_0 = \mathfrak{D}\mathsf{T}$ der gemeinsame Bestandteil aller wie A beschaffenen Untermengen von MZ_0, welche wegen III, IV die Elemente einer gewissen Menge $\mathsf{T} \in \mathfrak{U}(MZ_0)$ bilden, so besitzt auch A_0, wie man ohne weiteres erkennt, gleichfalls die Eigenschaften 1) und 2), ist also ebenfalls Element von T. Ferner ist, mit alleiniger Ausnahme von $\{r, 0\}$, jedes Element von A_0 auch von der Form $\{m', z'\}$; denn im entgegengesetzten Falle könnten wir es fortlassen, und der Rest von A_0 besäße immer noch die Eigenschaften 1) und 2), ohne doch, wie alle Elemente von T, den Bestandteil A_0 zu enthalten.

Hieraus folgt zunächst, daß das Element $\{r, 0\}$ allen übrigen Elementen von A_0 elementenfremd ist, da weder $r = m' \varepsilon M'$ noch $0 = \{z\} = z'$ sein und somit kein weiteres Element $\{m', z'\}$ eines der Elemente r oder 0 enthalten kann. Ist ferner ein Element $\{m, z\}$ von A_0 allen übrigen elementenfremd, so gilt das gleiche auch von dem entsprechenden Elemente $\{m', z'\}$, da zu jedem Elemente der Form $\{m', z_1'\}$ oder $\{m_1', z'\}$ ein weiteres Element $\{m, z_1\}$ oder $\{m_1, z\}$ gehören müßte. Alle Elemente von A_0, welche allen übrigen elementenfremd sind, bilden also die Elemente einer Untermenge A_0' von A_0, welche die Eigenschaften 1) und 2) besitzt und daher als Element von T umgekehrt A_0 als Untermenge enthält, d. h. mit A_0 identisch ist. Jedes Element von

$$\mathfrak{S}\mathsf{A}_0 = M_0 + Z_{00} \in M + Z_0,$$

wo wir mit M_0 und Z_{00} die gemeinsamen Bestandteile von $\mathfrak{S}\mathsf{A}_0$ mit M, bezw. Z_0 bezeichnen, kann also nur in einem einzigen Elemente von A_0 als Element figurieren, und es ist (wegen Nr. 15) $M_0 \sim Z_{00}$. Nun ist aber Z_{00} eine Untermenge von Z_0, welche das Element 0 und mit jedem ihrer Elemente z auch das zugehörige $z' = \{z\}$ enthält; Z_{00} muß also wegen Nr. 14 die ganze Zahlenreihe Z_0 als Bestandteil enthalten, d. h. es ist $Z_{00} = Z_0$ und, wie behauptet, $Z_0 \sim M_0 \in M$.

Chesières, den 30. Juli 1907.

The Vanishing of the Wronskian and the Problem of Linear Dependence.*)

By

D. R. Curtiss of Evanston, U. S. A.

Although the identical vanishing of the Wronskian of n analytic functions of a single variable is a sufficient condition for their linear dependence, with non-analytic functions additional hypotheses are required.**) Peano was probably the first to call attention to this fact***), and to point out the importance of a further study of the subject. To the criteria for linear dependence given in Peano's papers Bôcher has since added others of a more general character, his results being summarized in an article published in the Transactions of the American Mathematical Society, vol. 2 (1901), p. 139.†) The present paper will show that in all the cases considered by Peano and Bôcher sufficient conditions can be given in terms of the rank of a functional matrix.

We shall consider functions, real or complex, of a real variable x. The theorems which follow are so stated as to apply to cases where the interval I, to which x is confined, is infinite, as well as to finite

*) An announcement of some of the results of this paper, without proof, has appeared in the Bulletin of the American Mathematical Society, ser. 2, vol. 12 (1906), p. 482.

**) The identical vanishing of the Wronskian is, however, a necessary condition for linear dependence if the functions have finite derivatives of the first $n-1$ orders.

***) In Mathesis, vol. 9 (1889), p. 75 and p. 110. In the latter note the case of the two functions x^2 and $x \cdot |x|$ is cited as an illustration. Further examples have been given by Bôcher in the articles hereafter cited. Peano has another paper on the same subject in the Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5, vol. 6, 1° sem. (1897), p. 413.

†) See also Bulletin of the American Mathematical Society, ser. 2, vol. 7 (1900), p. 120, and Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 2 (1901), p. 93. The properties of Wronskians of functions of a real variable have been further investigated by the same writer in the Bulletin of the American Mathematical Society, ser. 2, vol. 8 (1901), p. 53.

intervals; and I, if limited in either direction, may or may not include its endpoints.

The symbol $[P]$ will be used to designate any infinite set of points in I having a given limit point p which is included in the set. If p, though still a point of I, does not belong to the set, this will be indicated by the notation $[P^*]$. A function will be said to vanish in a point set $[P]$ or $[P^*]$ if it vanishes at each point of such a set.

§ 1.

The Vanishing of the Wronskian in Point sets and the Vanishing of Related Matrices.

The functional matrices to be considered are of the form:

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(k)} & u_2^{(k)} & \cdots & u_n^{(k)} \end{matrix} \right\|,$$

where $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are functions of x possessing finite derivatives of the first k orders $(k \geqq n-1)$ at each point of I. Such a matrix will be designated by the symbol $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. The Wronskian $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is the n-rowed determinant whose matrix is $M_{n-1}(u_1, u_2 \cdots, u_n)$.

We now proceed to investigate relations which exist between the vanishing of the Wronskian and of other determinants of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, beginning with the simplest case, $n = 1$.

Theorem I.*) *Let $u(x)$ be a function of x which at every point of* I *has finite derivatives of the first k orders; then if u vanishes in a point set $[P]$, $u', u'', \cdots, u^{(k)}$ vanish, each in a set $[P]$.*

The vanishing of these successive derivatives in point sets $[P^*]$ is a consequence of Rolle's Theorem; and by continuity

$$u(p) = u'(p) = \cdots = u^{(k-1)}(p) = 0.$$

Though this argument does not apply to $u^{(k)}(p)$, we have directly

$$u^{(k)}(p) = \lim_{x=p} \frac{u^{(k-1)}(x)}{x-p} = 0.$$

Theorem II. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first n orders; then if*

*) Cf. Bôcher, l. c., pp. 141, 142.

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

vanishes in a point set $[P]$, *at least one of the Wronskians*

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}), \quad W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}'), \quad W(u_1', u_2', \cdots, u_n')$$

must vanish in a set $[P^*]$.

This theorem is a consequence of the relation

$$(1) \qquad W[W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}'),\ W(u_1, u_2, \cdots, u_n)] = W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \cdot W(u_1', u_2', \cdots, u_n'),$$

which we establish with the aid of the formula of Frobenius*)

$$(2) \qquad W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdot [W(y_1, y_2, \cdots, y_m)]^{n-m-1} = W(w_{m,m+1}, w_{m,m+2}, \cdots, w_{m,n}) \quad (1 \leqq m \leqq n-1),$$

where

$$w_{m,m+x} = W(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+x}) \qquad (x = 1, 2, \cdots, n-m).$$

The expansions

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} u_i\, W(u_1', u_2', \cdots, u_{i-1}', u_{i+1}', \cdots, u_n'),$$

$$W'(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} u_i\, W'(u_1', u_2', \cdots, u_{i-1}', u_{i+1}', \cdots, u_n')$$

enable us to write the left-hand member of (1) in the form

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} u_i\, W[W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}'),\ W(u_1', u_2', \cdots, u_{i-1}', u_{i+1}', \cdots, u_n')].$$

If to each term of this sum we apply formula (2) with the substitutions

$$m = n-2, \quad y_\nu = u_\nu' \ (\nu < i), \quad y_\nu = u_{\nu+1}' \ (i \gtreqless \nu < n-1),$$
$$y_{n-1} = u_i', \quad y_n = u_n',$$

we obtain the relation

*) Cf. Crelle, vol. 77 (1874), p. 248. Although the memoir of Frobenius is concerned throughout with analytic functions, this formula is true for any functions having the requisite number of finite derivatives. It expresses an identity between polynomials in $y_i, y_i', \cdots, y_i^{(n-1)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, and Frobenius' methods of proof apply, with suitable changes in notation, when these n^2 symbols are considered as independent variables. This point of view renders it unnecessary to assume the continuity of $y_i^{(n-1)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ when we return to the interpretation of $y_i^{(\nu)}$ as the ν^{th} derivative of y_i.

$$W[W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}'),\ W(u_1, u_2, \cdots, u_n)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} u_i W(u_1', u_2', \cdots, u_{i-1}', u_{i+1}', \cdots, u_{n-1}') \cdot W(u_1', u_2', \cdots, u_n'),$$

from which formula (1) immediately follows.

With the aid of (1) we obtain the formula

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{W(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}')}\right] = \frac{W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \cdot W(u_1', u_2', \cdots, u_n')}{[W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}')]^2}.$$

If $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes in a set $[P]$, either $W(u_1', u_2', \cdots, u_{n-1}')$ vanishes in such a set, or else, as a consequence of Rolle's Theorem, at least one of the Wronskians in the numerator of the right-hand member of the above formula must vanish in a set $[P^*]$.*) Our theorem is thus established.

If $W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ is the only one of the three Wronskians concerned in the conclusion of Theorem II which vanishes in a set $[P^*]$, we can apply the same theorem to this Wronskian. By repeating this process as often as necessary we obtain the result stated in the following theorem:

Theorem III. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first n orders; then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes in a point set $[P]$, at least one of the Wronskians*

$$W(u_1', u_2', \cdots, u_\nu') \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

vanishes in a set $[P^*]$.

Theorem IV. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have continuous derivatives of the first k orders $(k \geqq n)$; then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes in a set $[P]$, all the n-rowed determinants of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanish at the point $x = p$.*

We first prove this theorem for the case $n = 2$, remarking that when $n = 1$ the above conclusion is a corollary of Theorem I. If, then, u_1, u_2 have continuous derivatives of the first k orders $(k \geqq 2)$, and their Wronskian vanishes in a set $[P]$, we have, as a consequence of Theorem I,

$$W'(u_1(p),\ u_2(p)) = 0;$$

and by Theorem III either $W(u_1', u_2')$ or u_1' vanishes in a set $[P^*]$. In the latter case u_1'' also vanishes in a set $[P^*]$. Since u_1'', u_2'' are by hypothesis continuous, we have in either alternative

---

*) We can, of course, replace $[P^*]$ by $[P]$ in this statement when $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \cdots, u_n^{(n)}$ are continuous.

$$W(u_1'(p),\ u_2'(p)) = 0.$$

We have thus shown that all the two-rowed determinants of $M_2(u_1, u_2)$ vanish at p; we complete our proof for $n = 2$, $k > 2$ by the method of mathematical induction, assuming the truth of our theorem when $k = k_1 - 1$ and deducing as a consequence its validity when $k = k_1$.

Under this assumption every two-rowed determinant of the matrix $M_{k_1-1}(u_1, u_2)$ vanishes at p. By Theorem III, u_1'', u_2'' being continuous, either u_1' or $W(u_1', u_2')$ vanishes in a set $[P]$. But if u_1' vanishes in a set $[P]$ we have, by Theorem I,

$$u_1'(p) = u_1''(p) = \cdots = u_1^{(k_1)}(p) = 0,$$

while if the other alternative presents itself our assumption that the theorem is true when $k=k_1-1$ applies directly to the matrix $M_{k_1-1}(u_1', u_2')$. Hence in either case all the two-rowed determinants of this matrix vanish at p. It remains to show that the determinant $u_1 u_2^{(k_1)} - u_2 u_1^{(k_1)}$ vanishes at p. By Theorem I, $W^{(k_1-1)}(u_1, u_2) = 0$ at p; but this expression can be written as a sum whose first term is the determinant to be investigated and whose remaining terms are a linear combination of determinants of the matrix $M_{k_1-1}(u_1, u_2)$.*) Since all such determinants vanish at p, $u_1 u_2^{(k_1)} - u_2 u_1^{(k_1)}$ must also vanish at that point. We have thus shown that every two-rowed determinant of $M_{k_1}(u_1, u_2)$ vanishes at p. Our theorem has been proved for $k_1 = 2$, hence it is true for all values of k_1 up to and including k.

We will now establish our theorem for $n = r$ ($k \geqq r > 2$), assuming its truth for $n = r - 1$. For this purpose we make use of formula (2), with the substitutions

$$n = r, \quad m = 1, \quad y_\varkappa = u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, r).$$

We thus obtain the relation

$$(3) \qquad u_1^{r-2}\, W(u_1, u_2, \cdots, u_r) = W(w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1r}),$$

where

$$w_{1i} = W(u_1, u_i) \qquad (i = 2, 3, \cdots, r).$$

From formula (3) it follows that if $W(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ vanishes in a set $[P]$, $W(w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1r})$ must also vanish in every point of that set. Since $w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1r}$ are functions satisfying all the conditions of our theorem, which has been assumed to be valid for $n = r - 1$, every $(r-1)$-rowed determinant of the matrix $M_{k-1}(w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1r})$ must vanish at p. A typical determinant of this matrix is

*) Cf. formula (4), p. 287.

$$\Omega_{k_1 k_2 \cdots k_{r-1}} \equiv \begin{vmatrix} w_{12}^{(k_1-1)} & w_{13}^{(k_1-1)} & \cdots & w_{1r}^{(k_1-1)} \\ w_{12}^{(k_2-1)} & w_{13}^{(k_2-1)} & \cdots & w_{1r}^{(k_2-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{12}^{(k_{r-1}-1)} & w_{13}^{(k_{r-1}-1)} & \cdots & w_{1r}^{(k_{r-1}-1)} \end{vmatrix} \text{*)}$$

$$(0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-1} \leqq k).$$

We now proceed to express this determinant as a sum in each of whose terms there appears a determinant of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$.

If we use the symbol $|u_1^{(\mu)} u_i^{(\nu)}|$ to designate the determinant $u_1^{(\mu)} u_i^{(\nu)} - u_1^{(\nu)} u_i^{(\mu)}$, we can express $w_{1i}^{(m)}$ in the form

$$(4) \qquad w_{1i}^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m} |u_1 u_i'| = \sum_{\varrho=0}^{R} \varkappa_{m\varrho} |u_1^{(\varrho)} u_i^{(m-\varrho+1)}|$$

$$\left(\begin{aligned} R &= \frac{m-1}{2} \text{ if } m \text{ is odd,} \\ &= \frac{m}{2} \text{ if } m \text{ is even} \end{aligned} \right),$$

where the numbers $\varkappa_{m\varrho}$ are positive integers which do not depend on i, and $k_{m0} = 1$.

The formula

$$|u_1^{(\varrho)} u_i^{(m-\varrho+1)}| = \frac{u_1^{(\varrho)} |u_1 u_i^{(m-\varrho+1)}| - u_1^{(m-\varrho+1)} |u_1 u_i^{(\varrho)}|}{u_1}$$

when applied to (4) gives

$$(5) \qquad w_{1i}^{(m)} = \sum_{\varrho=0}^{m} K_{m\varrho} \frac{u_1^{(\varrho)}}{u_1} |u_1 u_i^{(m-\varrho+1)}|,$$

where the coefficients $K_{m\varrho}$ are numbers whose values in terms of the integers $\varkappa_{m\varrho}$ can be easily obtained. When each element of $\Omega_{k_1 k_2 \cdots k_{r-1}}$ has been replaced by its expression given by formula (5), the result can be expressed as a sum according to a well-known theorem on determinants whose elements are sums. We thus give to $\Omega_{k_1 k_2 \cdots k_{r-1}}$ the form

$$\sum_{\varrho_1=0}^{k_1-1} \sum_{\varrho_2=0}^{k_2-1} \cdots \sum_{\varrho_{r-1}=0}^{k_{r-1}-1} C_{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{r-1}} \frac{u_1^{(\varrho_1)} u_1^{(\varrho_2)} \cdots u_1^{(\varrho_{r-1})}}{u_1^{r-1}} V_{k_1-\varrho_1, k_2-\varrho_2, \cdots, k_{r-1}-\varrho_{r-1}},$$

---

*) Throughout the present paper an upper index 0 is given a meaning by the convention $y^{(0)} \equiv y$.

where

$$V_{k_1-\varrho_1, k_2-\varrho_2, \cdots, k_{r-1}-\varrho_{r-1}} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} |u_1 u_2^{(k_1-\varrho_1)}| & |u_1 u_3^{(k_1-\varrho_1)}| & \cdots & |u_1 u_r^{(k_1-\varrho_1)}| \\ |u_1 u_2^{(k_2-\varrho_2)}| & |u_1 u_3^{(k_2-\varrho_2)}| & \cdots & |u_1 u_r^{(k_2-\varrho_2)}| \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ |u_1 u_2^{(k_{r-1}-\varrho_{r-1})}| & |u_1 u_3^{(k_{r-1}-\varrho_{r-1})}| & \cdots & |u_1 u_r^{(k_{r-1}-\varrho_{r-1})}| \end{vmatrix},$$

and $C_{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{r-1}}$ is a positive or negative integer $(C_{00\cdots 0} = 1)$ We can transform this expression by means of the formula*)

$$V_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{r-1}} = u_1^{r-2}\, U_{0\nu_1\cdots\nu_{r-1}}$$

where the meaning of the latter symbol is given by the identity

$$U_{\nu_0\nu_1\cdots\nu_{r-1}} \equiv \begin{vmatrix} u_1^{(\nu_0)} & u_2^{(\nu_0)} & \cdots & u_r^{(\nu_0)} \\ u_1^{(\nu_1)} & u_2^{(\nu_1)} & \cdots & u_r^{(\nu_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1^{(\nu_{r-1})} & u_2^{(\nu_{r-1})} & \cdots & u_r^{(\nu_{r-1})} \end{vmatrix}.$$

We thus obtain the desired expansion of $\Omega_{k_1k_2\cdots k_{r-1}}$ in terms of determinants of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$:

$$\text{(6)} \qquad \Omega_{k_1k_2\cdots k_{r-1}} = \sum_{\varrho_1=0}^{k_1-1}\sum_{\varrho_2=0}^{k_2-1}\cdots\sum_{\varrho_{r-1}=0}^{k_{r-1}-1} C_{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{r-1}} \frac{u_1^{(\varrho_1)}u_1^{(\varrho_2)}\cdots u_1^{(\varrho_{r-1})}}{u_1} \times U_{0,k_1-\varrho_1,\cdots,k_{r-1}-\varrho_{r-1}}.$$

To facilitate the discussion at this point we introduce the idea of *precedence* among the r-rowed determinants of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ by means of the following definition: *The determinant* $U_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ *precedes the determinant* $U_{\nu_0\nu_1\cdots\nu_{r-1}}$ *if*

$$\mu_i = \nu_i \ (i = 0, 1, \cdots, \lambda-1), \quad \mu_\lambda < \nu_\lambda.$$

It can now be easily shown that every determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ whose first row is the first row of that matrix vanishes at p. This is, of course, an obvious result in case $u_1, u_2, \cdots, u_r$ all vanish at p. If, however, one of these functions is different from zero at p, we take it as u_1 since this is only a matter of notation. Formula (6) is then valid for $x = p$, a substitution which reduces the left-hand member of (6) to

*) Cf. E. Pascal, Die Determinanten (translation by Leitzmann), p. 39.

zero. On the right-hand side the first term is $u_1^{r-2}\, U_{0\,k_1\cdots k_{r-1}}$, while in each of the other terms there appears as a factor a determinant that *precedes* $U_{0\,k_1\cdots k_{r-1}}$. This last determinant must therefore vanish at p if all the determinants which precede it vanish at p. But by hypothesis the Wronskian $W(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ is zero at p, and this is, according to our rule for precedence, the first determinant of the matrix. Since we can give such values to $k_1, k_2, \cdots, k_{r-1}$ as to obtain successively, in order of precedence, all the remaining determinants $U_{0\,\nu_1\cdots\nu_{r-1}}$, it follows that every such determinant vanishes at p.

We have still to consider the r-rowed determinants of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ which belong to the matrix $M_{k-1}(u_1', u_2', \cdots, u_r')$. According to Theorem II one of the Wronskians

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_{r-1}), \qquad W(u_1', u_2', \cdots, u_{r-1}'), \qquad W(u_1', u_2', \cdots, u_r')$$

must vanish in a set $[P^*]$, and therefore, by continuity, in a set $[P]$. But if either of the first two Wronskians vanishes in a set $[P]$, the assumption that our theorem is true for $n = r - 1$ necessitates the vanishing at p of all $(r-1)$-rowed determinants of

$$M_{k-1}(u_1', u_2', \cdots, u_{r-1}'),$$

and therefore of all r-rowed determinants of

$$M_{k-1}(u_1', u_2', \cdots, u_r').$$

If, on the other hand,

$$W(u_1', u_2', \cdots, u_r')$$

vanishes in a set $[P]$, we can show by the method of the preceding paragraph that every determinant of

$$M_{k-1}(u_1', u_2', \cdots, u_r')$$

whose first row is the first row of that matrix vanishes at p. To complete our proof for $n = r$ on the assumption that our theorem is true for $n = r - 1$, we have only to continue the process now sufficiently indicated. Since the theorem has already been established for $n = 2$, its validity follows for all values of n.

In Theorem IV we have required the continuity of $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$, this being essential to the proof given.*) In the following theorem no such assumption is made:

Theorem V. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geq n$); then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and its first $k - n + 1$ derivatives vanish simultaneously*

*) The writer has not been able to determine whether this restriction is essential to the theorem itself.

in a point set $[P]$, all the n-rowed determinants of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanish simultaneously either at p or in a set $[P^*]$.

The former alternative of the above conclusion presents itself when each of the Wronskians

$$W_i \equiv W(u_1, u_2, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

vanishes in a set $[P]$, for by Theorem IV every $(n-1)$-rowed determinant of the matrix $M_{k-1}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ then vanishes at p, and therefore every n-rowed determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is zero at that point. If, however, one of the Wronskians W_i, which as a matter of notation we take as W_n, vanishes in no set $[P]$, there must exist a particular set $[P^*]_1$, at each point of which $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and its first $k-n+1$ derivatives vanish simultaneously, while $W_n \neq 0$.*) Let us now assume that every n-rowed determinant of $M_{r-1}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ $(k \geqq r > n+1)$ vanishes in the set $[P^*]_1$. Since $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is zero at each point of this set we shall have completed the proof of our theorem if we show, as a consequence of the hypothesis just made, that every n-rowed determinant of $M_r(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes in $[P^*]_1$. This, however, follows at once, since $W_n \neq 0$ in $[P^*]_1$, provided the equations

$$u_1^{(\nu)} W_1 - u_2^{(\nu)} W_2 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n^{(\nu)} W_n = 0 \tag{7}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots, r),$$

hold simultaneously at each point of $[P^*]_1$. The first $n-1$ of these equations are identities; the left-hand members of the next $r-n+1$ are determinants of the matrix $M_{r-1}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ which by hypothesis vanish in $[P^*]_1$. As for the last equation, its left-hand member is a term of the sum of n-rowed determinants representing the value of $W^{(r-n+1)}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and therefore vanishing in $[P^*]_1$. Since the other terms of this sum are constant multiples of determinants of the matrix $M_{r-1}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, the last equation of (7) must also be satisfied at each point of $[P^*]_1$. Our theorem is thus established.

§ 2.

Application to the Theory of Linear Dependence.

We shall now give a new sufficient condition for linear dependence deduced from the results of § 1 with the aid of the following theorem, due to Bôcher**):

*) Note that this statement is so worded as to include the possibility that all the Wronskians W_i vanish at p.

**) This theorem, as well as Theorem B in § 4, is taken directly from the

Theorem A. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geqq n-1$) while $W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ and its first $k-n+2$ derivatives do not all vanish at any one point of* I; *then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is identically zero $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent, and in particular:*

$$u_n \equiv c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1}.$$

On account of the importance of this preliminary theorem we give a brief demonstration, which differs in some details from Bôcher's.

In any finite and perfect subinterval I′ of I, W_n can vanish in only a finite number of points, by Theorem I; let these points, arranged in order from left to right of I′, be $x_0, x_1, \cdots, x_m$. From formula (2) we have

$$W_i' W_n - W_n' W_i \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

so that in the interval between x_{j-1} and x_j

$$\frac{d}{dx}\frac{W_i}{W_n} \equiv 0,$$

and therefore

$$W_i \equiv (-1)^{n-i+1} c_{ij} W_n.$$

With this substitution in the identity

$$u_1 W_1 - u_2 W_2 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n W_n \equiv 0$$

we have

$$u_n \equiv c_{1j} u_1 + c_{2j} u_2 + \cdots + c_{n-1j} u_{n-1} \tag{8}$$

from x_{j-1} to x_j, these points included since the functions u are continuous. But $c_{ij} = c_{i,j+1}$, for we can successively differentiate (8) and the corresponding identity where the index j is replaced by $j+1$, substitute x_j for x in the resulting system of equations, and by subtraction obtain the set

$$\left(c_{1j} - c_{1j+1}\right) u_1^{(\nu)}\left(x_j\right) + \left(c_{2j} - c_{2j+1}\right) u_2^{(\nu)}\left(x_j\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(c_{n-1j} - c_{n-1j+1}\right) u_{n-1}^{(\nu)}\left(x_j\right) = 0$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots, k).$$

---

paper already cited (Transactions of the American Mathematical Society, vol. 2 (1901), p. 139, Theorems IV and VI). Relations between other theorems of the same paper and those of the remaining sections of the present article are as follows: The exceptions made in Bôcher's Lemma II (p. 147) are removed in my Theorem VII, so that in his Theorem VIII the assumption that the nth derivatives of the u's are continuous is superfluous; some properties established in his discussion of Peano's theorems are generalized by my Theorem VIII; and Theorem XII of the present paper may be compared with his Theorem VII. When $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ are continuous, Theorem XI is equivalent to Theorem X of his article in the Bulletin of the American Mathematical Society (ser. 2, vol. 8 (1901), p. 59).

If c_{ij} were not equal to $c_{i,j+1}$ for $i = 1, 2, \cdots, n-1$, every $(n-1)$-rowed determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ would vanish at x_j. Since the successive derivatives of W_n up to and including the $(k-n+2)^{\text{th}}$ can be expressed as linear combinations of such determinants, we thus arrive at a contradiction of our hypothesis that W_n and its first $k-n+2$ derivatives do not all vanish at any one point of I. Hence the coefficients in (8) do not depend on the index j, and our theorem is proved for every finite and perfect subinterval I′ of I. It is therefore true for I itself.

This theorem being established, we now give a new sufficient condition for linear dependence.

Theorem VI. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders $(k \geqq n-1)$ while the $(n-1)$-rowed determinants of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ do not all vanish at any point of* I; *then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is identically zero, $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent, and in particular:*

$$u_n \equiv c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1}.$$

As before, we prove this theorem for any finite and perfect subinterval I′ of I, since its truth for I then follows.

We first observe that there can be only a finite number of points in I′ at which $W(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ and its first $k-n+2$ derivatives vanish simultaneously; otherwise, by Theorem V, all the $(n-1)$-rowed determinants of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ would vanish in at least one point of I. By Theorem A there exists, throughout each of the m intervals into which I′ is divided by points x_j where $W_n = W'_n = \cdots = W_n^{(k-n+2)} = 0$, an identity

$$u_n \equiv c_{1j} u_1 + c_{2j} u_2 + \cdots + c_{(n-1)j}, u_{n-1}.$$

By continuity, this identity holds also at the points x_{j-1}, x_j. As in the proof of Theorem A, we can show that an inequality $c_{ij} \neq c_{ij+1}$ for any of the values which i and j may assume would necessitate the vanishing at x_j of all the $(n-1)$-rowed determinants of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$, contrary to our hypothesis. Hence the coefficients c_{ij} do not depend on the index j, and our theorem is proved.

It is obvious that n functions which satisfy the conditions of Theorem A must also satisfy the conditions of Theorem VI. An illustration will show that the latter theorem applies to cases where the hypotheses of Theorem A are not verified. We consider four functions u_1, u_2, u_3, u_4 defined as follows:

$$u_1 = -(x^4 + x^3 + x + 1), \qquad u_2 = x + 1,$$

$$u_3 = \begin{cases} x^2 + x + 1 & (x > 0), \\ x^4 + x^2 + x + 1 & (x \leqq 0), \end{cases} \qquad u_4 = \begin{cases} x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 & (x > 0), \\ x^3 - x^2 - x - 1 & (x \leqq 0). \end{cases}$$

In any interval I which includes both positive and negative values of x the Wronskian of u_1, u_2, u_3, u_4 vanishes identically while the three-rowed determinants of $M_3(u_1, u_2, u_3)$ do not vanish simultaneously at any point. There is, however, no Wronskian of three functions u which does not vanish together with its first derivative at $x=0$. Since u_3 and u_4 have no fourth derivatives at $x=0$, this is a case where Theorem A fails, while the conditions of Theorem VI are met. We have, in fact, the linear relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0.$$

§ 3.

The Identical Vanishing of the Wronskian and the Rank of the Matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

Theorem VII. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geqq n$); then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes identically throughout* I *the matrix*

$$M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

is of rank less than n at each point of I, *i. e. all the n-rowed determinants of this matrix vanish identically throughout* I.

If $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ are continuous throughout I this theorem is a direct consequence of Theorem IV. In case any of these derivatives are discontinuous it can still be shown that every n-rowed determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes at any point p of I. For if each of the Wronskians $W_1, W_2, \cdots, W_n$ vanishes in a set $[P]$, then by Theorem IV every $(n-1)$-rowed determinant of $M_{k-1}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ must vanish at p, and consequently every n-rowed determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vanishes at that point. If, on the other hand, W_n does not vanish in any set $[P]$, there is a point q of I such that W_n does not vanish between p and q. By Theorem A we have, between p and q, an identity

$$u_n \equiv c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1},$$

which holds by continuity at p. If we differentiate this relation k times and make the substitution $x=p$, we obtain a set of equations which can exist only when the rank of $M_k(u_1(p), u_2(p), \cdots, u_n(p))$ is less than n. Our theorem is thus verified in all cases.

If at each point of I at least one m-rowed determinant of

$$M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

is different from zero while every $(m+1)$-rowed determinant of this matrix vanishes identically throughout I, we shall say that the matrix is *of constant rank m in* I.

An important property of matrices of constant rank is given in the following theorem:

Theorem VIII. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have continuous derivatives of the first k orders ($k \geqq n-1$); then if $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is of constant rank $m < n$ in* I, *at least one matrix formed by suppressing $n-m$ columns of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is of constant rank m in* I.

As a consequence of the hypothesis that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is of constant rank m it follows that there must exist at least one set of m functions u whose Wronskian is not identically zero throughout I; otherwise, by Theorem VII, every m-rowed determinant of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ would vanish identically. Accordingly we so choose our notation that $W(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is different from zero at some point p of I. We shall now prove that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of constant rank m in I.

Since $m \leqq k$, $W(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is a continuous function of x; there is therefore a neighborhood of p throughout which this Wronskian does not vanish and where, consequently, $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of constant rank m. If this matrix were not of constant rank in the whole interval I there would exist a finite and perfect subinterval I′ throughout which $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of constant rank m, but at one of whose end-points, q, all the m-rowed determinants of the matrix vanish.*) By Theorem VI there exist throughout I′ identities of the form

$$u_{m+i} \equiv c_{1i} u_1 + c_{2i} u_2 + \cdots + c_{mi} u_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-m). \tag{9}$$

By forming the successive derivatives at the point q of these identities we obtain the equations

$$u_{m+i}^{(\nu)}(q) = c_{1i} u_1^{(\nu)}(q) + c_{2i} u_2^{(\nu)}(q) + \cdots + c_{mi} u_m^{(\nu)}(q)$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n-m \\ \nu = 0, 1, \cdots, k \end{pmatrix}.$$

We can therefore express every m-rowed determinant of

$$M_k(u_1(q), u_2(q), \cdots, u_n(q))$$

as the product of some determinant of the matrix

$$M_k(u_1(q), u_2(q), \cdots, u_m(q))$$

and a polynomial in the coefficients c. Hence if every m-rowed determinant of the latter matrix vanishes, the same is true of every m-rowed determinant of the former. We are thus led to a contradiction of our

---

*) The argument here depends upon the hypothesis that $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ are continuous.

hypothesis that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ is of constant rank m in I, and the truth of our theorem is established.

In case any of the functions $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_m^{(k)}$ are discontinuous the above argument does not, in general, apply. We may note, however, that the set of points in I in which $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of rank less than m can include no point isolated from either side in that set; i. e. a point of that set can be at neither extremity of a subinterval of I in which $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of constant rank m.

Theorem IX. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geqq n-1$) while $W(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0$; then if no function (other than zero) of the form*

$$(10) \qquad g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_n u_n$$

(the g's being constants) vanishes together with its first k derivatives at any point of I, *both $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and at least one matrix formed by suppressing $n-m$ of its columns are of constant rank $m < n$ in* I. *Conversely, if $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and a matrix formed by suppressing $n-m$ of its columns are of constant rank $m < n$ in* I, *no function (other than zero) of form* (10) *vanishes together with its first k derivatives at any point of* I.

Before proceeding with the proof of this theorem let us note that if the functions $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ are continuous, then as a consequence of Theorem VIII it is superfluous in both parts of the above theorem to state or require that a matrix formed by suppressing $n-m$ columns of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ must be of constant rank $m < n$ in I.

To establish the first part of the above theorem we must show that if $u_1, u_2, \cdots, u_n$ satisfy the given conditions the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ cannot be of different rank at different points of I. If it is of rank m at a point p there must, from the definition of the term rank, be a matrix composed of m of its columns (we take this matrix as $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$) which is of rank m at p. Accordingly there exist relations*):

$$(11) \qquad u_{m+i}^{(\nu)} = c_{1i} u_1^{(\nu)} + c_{2i} u_2^{(\nu)} + \cdots + c_{mi} u_m^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \cdots, k \\ i = 1, 2, \cdots, n-m \end{pmatrix},$$

which are valid at p. But by hypothesis such relations if true at one point, must be identities throughout I. All $(m+1)$-rowed determinants of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ must therefore vanish identically, so that this matrix is nowhere of higher rank than m. The same argument shows that the rank of the matrix $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$, and therefore the rank of

*) Cf. E. Pascal, Die Determinanten (translation by Leitzmann), pp. 193, 194.

$M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, is nowhere less than m, for if this were not true there would be a set of relations similar to (11), but involving only the functions $u_1, u_2, \cdots, u_m$ and their successive derivatives, which would by hypothesis be identities throughout I. The existence of such identities would contradict our assumption that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of rank m at p.

On the other hand, if $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ are both of constant rank $m < n$, it follows from Theorem VI that there exist $n-m$ identities of form (9) valid throughout I. Let us now consider any function of form (10) which vanishes together with its first k derivatives at any point p of I. This function would be reduced by the substitution of the identities (9) to the form

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 + \cdots + h_m u_m.$$

Since this expression vanishes together with its first k derivatives at p, where $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of rank m, it follows that

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_m = 0,$$

so that the function considered vanishes identically.

§ 4.

New Form of Theorem VI and an equivalent Theorem. Applications to Linear Differential Equations.

Bôcher has given in the following theorem*) a test for linear dependence which we shall presently show to be equivalent to that contained in Theorem VI:

Theorem B. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geqq n-1$) while no function (other than zero) of the form*

$$g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_n u_n$$

(the g's being constants) vanishes together with its first k derivatives at any point of I; *then if $W(u_1, u_2, \cdots, u_n) \equiv 0$ the functions u are linearly dependent.*

We now compare this result with the somewhat generalized form of Theorem VI contained in the following theorem:

Theorem X. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of* I *have finite derivatives of the first k orders ($k \geqq n-1$); then if both $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ and at least one matrix formed by suppressing $n-m$ of its columns are of constant rank $m < n$ in* I**), *$u_1, u_2, \cdots, u_n$ are*

*) See foot-note **), pp. 290 and 291.

**) If $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ are *continuous* it is evident, from Theorem VIII, that we need here only require that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ be of constant rank $m < n$.

linearly dependent and the number of independent linear relations between these functions is $n - m$.

If $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ and $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+i})$ $(i = 1, 2, \cdots, n-m)$ are of rank m the existence of $n - m$ independent relations of form (9) follows from Theorem VI. If there were an additional linear relation independent of the preceding we could substitute in the new relation the values of $u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots, u_n$ given by identities (9) and thus obtain an identity

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 + \cdots + h_m u_m \equiv 0$$

in which the coefficients do not all vanish. But the existence of such an identity together with its first k derivatives would contradict the assumption that $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ is of rank m.

The equivalence of Theorem X and B (except for the specification of X as to the number of independent relations between the u's) is an immediate corollary of Theorem IX. We have shown that Theorem VI, and therefore Theorem X, is of wider application than Theorem A; hence of the two theorems A and B the latter is the more general and includes all cases which come under the former.

We can replace the requirement in Theorem B that the Wronskian vanish identically by any assumption which will make the rank of $M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ less than n at some point of I, since there will then be a function of form (9) which will vanish together with its first k derivatives at that point. Theorems IV and V furnish sufficient conditions for the vanishing at a point of I of all n-rowed determinants of

$$M_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

and enable us to give to Theorem B the following form:

Theorem XI. *Let* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *be functions of* x *which at every point of* I *have finite derivatives of the first* k *orders* $(k \geqq n-1)$ *while no function (other than zero) of the form*

$$g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_n u_n$$

(the g*'s being constants) vanishes together with its first* k *derivatives at any point of* I*; then if* $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *vanishes together with its first* $k - n + 1$ *derivatives in a set* $[P]$ *it vanishes identically throughout* I *and the functions* u *are linearly dependent. If* $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}$ *are continuous the last condition may be simplified by requiring only that the Wronskian vanish in a set* $[P]$.

An immediate application of these results is given in the following theorems on linear differential equations.

Theorem XII. *Let* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *be functions of* x *which at every*

point of I *are continuous, and let* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ $(m \leqq n)$ *be functions of* x *which at every point of* I *satisfy the differential equation*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0;$$

then if $W(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ *vanishes in a set* $[P]$ *it vanishes identically throughout* I *and the functions* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *are linearly dependent.*

This theorem is a direct consequence of Theorem XI, since no solution other than zero of such a differential equation can vanish together with its first $n-1$ derivatives at a point of I.

Theorem XIII. *Let* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *be functions of* x *which at every point of* I *have continuous derivatives of the first* $k-n$ *orders* $(k \geqq n)$*), *and let* $y_1, y_2, \cdots, y_r$ $(r \leqq k+1)$ *be functions of* x *which at every point of* I *satisfy the differential equation*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0;$$

then the matrix $M_k(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ *is of constant rank in* I.

From our hypothesis as to the coefficients of the differential equation it follows that $y_1, y_2, \cdots, y_r$ have continuous derivatives of the first k orders. Hence if the Wronskian of these functions vanishes identically (as is always the case when $r \geqq n+1$) the above theorem follows from Theorem IX. On the other hand, if $W(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ does not vanish identically (in which case $r \leqq n$) the matrix $M_k(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ is of rank r at every point of I; otherwise there would exist a set of equations

$$g_1 y_1^{(\nu)} + g_2 y_2^{(\nu)} + \cdots + g_r y_r^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, k)$$

satisfied at some point of I, and therefore valid throughout I. This is impossible when $W(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ does not vanish identically.

---

*) If $k = n$ this means that the functions $p_1, p_2, \cdots, p_n$ are continuous.

Über eine Konfiguration von geraden Linien im Raume.

Von

Eugen Meyer in Charlottenburg.

§ 1.

Einleitung.

Nach den Untersuchungen von Herrn H. Maschke*) ist die quaternäre Kollineationsgruppe der höchsten Ordnung, die mit einer alternierenden oder symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppe holoedrisch isomorph ist, die Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}7!$, die Herr Klein**) durch liniengeometrische Betrachtungen gewonnen hat. Die erzeugenden Transformationen dieser Gruppe sind nicht in reeller Form darstellbar, da die Gruppe sich nicht unter den reellen quaternären Kollineationsgruppen findet, die von Herrn G. Bagnera***) vollständig aufgestellt worden sind. Man kann die Gruppe durch Hinzunahme von $\frac{1}{2}7!$ Korrelationen zu einer mit der symmetrischen Vertauschungsgruppe von 7 Buchstaben holoedrisch isomorphen Gruppe erweitern.

Eine interessante, bei allen 7! Transformationen der letztgenannten Gruppe invariante Konfiguration hat Herr H. Maschke†) angegeben. Sie besteht aus 140 Geraden, die freilich wegen der genannten Eigenschaft der Gruppe nicht alle reell sein können. Herr Maschke findet diese Kon-

*) Bestimmung aller ternären und quaternären Kollineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. Math. Ann. Bd. 51, S. 253.

**) Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Ann. Bd. 28, S. 499.

***) I gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 15 (1901), S. 161. Vergl. auch Blichfeldt, Math. Ann. Bd. 60, S. 204.

†) Über eine merkwürdige Konfiguration gerader Linien im Raume. Math. Ann. Bd. 36, S. 190.

figuration, indem er die von Herrn Klein a. a. O. eingeführten „überzähligen Linienkoordinaten" benutzt, d. h. Systeme von 7 Zahlen, die den Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{6} x_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{6} x_i^2 = 0 \tag{1}$$

genügen und eine Gerade bestimmen. Nach Herrn Klein bestimmen die 7! Permutationen von $x_0, \cdots, x_6$ die Transformationen jener Gruppe, und zwar ergeben die geraden Vertauschungen die $\frac{1}{2}\,7!$ Kollineationen, die ungeraden dagegen die $\frac{1}{2}\,7!$ Korrelationen. Geht man nun von einer Geraden aus, für die $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda$ und $x_4 = x_5 = x_6 = \mu$ ist, so wird wegen (1):

$$x_0 = 3, \quad \lambda = \gamma + \gamma^2 + \gamma^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

$$\mu = \gamma^6 + \gamma^5 + \gamma^3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

wenn $\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, und die 7! Permutationen erzeugen aus jener Geraden im ganzen 140 verschiedene Geraden, die jene Konfiguration bilden.

Man kann nun in einfacher Weise eine von jener ersten durchaus verschiedene allgemeinere Konfiguration von 720 Geraden finden, die sich zu 120 Tetraedern gruppieren derart, daß die Konfiguration von 140 Geraden in enger Beziehung zu ihr steht, ohne daß jedoch beide eine Gerade gemeinschaftlich haben. Man erhält jene 720 Geraden dadurch, daß man auf die Gerade mit den Koordinaten $x_i = \gamma^i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, 6)$, $\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ sämtliche 7! Permutationen ausübt. Denn die beiden Gleichungen (1) sind für diese x_i erfüllt, und da bei jeder zyklischen Vertauschung der x_i die Koordinaten sich lediglich mit einem konstanten Faktor multiplizieren, so erhält man in der Tat $\frac{7!}{7} = 720$ Geraden.

§ 2.

Die Geraden der Konfiguration. — Teilkonfigurationen von 90 Geraden.

Im folgenden sollen die 7 Koordinaten jeder der in Betracht kommenden 720 Geraden durch zyklische Vertauschung so angeordnet werden, daß $x_0 = \gamma^0 = 1$ ist. Statt der Geraden mit den Koordinaten γ^0, γ^1, γ^2, γ^3, γ^4, γ^5, γ^6 sei kurz 123456 gesetzt, und ebenso in den übrigen Fällen. Die von Herrn Maschke betrachtete Konfiguration sei mit „Konfiguration I" bezeichnet.

Wollen wir alle mit der Geraden 123456 inzidenten Geraden unter unseren 720 aufsuchen, so haben wir zu beachten, daß sich zwei Geraden (x_i) und (x_i') dann und nur dann schneiden, wenn $\sum_{i=0}^{6} x_i x_i' = 0$ ist. Nun sind die Glieder dieser Summe gleichfalls Potenzen von γ, und daher kann die Gleichung nur bestehen, wenn alle diese Glieder voneinander verschieden sind. Denn sonst würde γ einer von der Gleichung $\frac{x^7-1}{x-1} = 0$ verschiedenen Gleichung 6^{ten} oder niedrigeren Grades genügen, und das ist nicht möglich. Zwei Geraden $i, k, \cdots$ und $i', k', \cdots$, wo $i, k, \cdots$ und $i', k', \cdots$ Permutationen von $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind, werden sich also dann und nur dann schneiden, wenn $i + k$, $i' + k'$, $\cdots$ mod. 7 reduziert, gleichfalls eine Permutation von $1, 2, \cdots, 6$ ist.

Man findet nun unter den 720 Geraden 19 die Gerade 123456 schneidende. Von diesen bilden 5 zusammen mit der gegebenen Geraden ein Tetraeder, und zwar sind dessen Kanten:

$$a = 123456, \quad b = 246135, \quad c = 415263,$$
$$d = 654321, \quad e = 531642, \quad f = 362514.$$

Hierbei sind ad, be, cf die Paare von Gegenkanten. Die übrigen 14 von jenen 19 Geraden gruppieren sich zu 7 Paaren, so daß die Geraden eines Paares einander schneiden, während keine von den 14 Geraden diejenige eines anderen Paares, und keine irgend eine der Geraden b, c, d, e, f schneidet. Jede Gerade a der Konfiguration gehört also nur einem einzigen aus Geraden der Konfiguration gebildeten Tetraeder an.

Die 7 Paare von Geraden sind:

I	II	III	IV	V	VI	VII
135264	241536	263145	416235	236415	142635	315246
526134	413562	461253	245163	425613	512463	346152

Bei der zyklischen Kollineation $(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6)$ vertauschen sich auch die Paare I, II, $\cdots$, VII zyklisch. Denn z. B. 135264, d. h. die Gerade $\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^5\gamma^2\gamma^6\gamma^4$, geht über in $\gamma\gamma^3\gamma^5\gamma^2\gamma^6\gamma^4\gamma^0$, d. h. in 241536. Die Tetraederkanten $abcdef$ gehen dagegen einzeln in sich über.

Ob das Geradenpaar I die Gerade a in einem Punkte schneidet, oder ob diese drei Geraden in einer Ebene liegen, wäre zu entscheiden erst möglich, wenn man die Beziehung der x_i zu bestimmten Punktkoordinaten festgesetzt hätte; schneiden sich aber, wie wir zur Fixierung der Ideen anzunehmen berechtigt sind, die drei Geraden in einem Punkte, so trifft auch jedes der sechs übrigen Paare die Gerade a in einem Punkte, da die genannte septenär-zyklische Transformation und ihre Potenzen, die die Paare zyklisch vertauschen, sämtlich Kollineationen und nicht Korrelationen

sind. Die auf a vorhandenen 7 Punkte lassen sich hiernach durch eine zyklische Projektivität von der Periode 7 vertauschen, und die beiden auf a liegenden Tetraederecken sind die Doppelpunkte der Projektivität. Ist also das Tetraeder reell, so sind die schneidenden 7 Geradenpaare imaginär.

Da unter den 720 Permutationen, die aus 123456 neue Geraden erzeugen, die eine Hälfte gerade, die andere ungerade Permutationen sind, so gibt es 360 Geraden G_1 — sie seien *„Geraden erster Art“* genannt —, für die die beiden Geraden jedes einzelnen der 7 Paare durch einen Punkt von G_1 gehen, und 360 Geraden G_2 — *„Geraden zweiter Art“* —, für die die beiden Geraden jedes einzelnen der 7 Paare mit G_2 in einer Ebene liegen. Von den Kanten eines der Tetraeder sind immer drei durch einen Punkt gehende von der einen Art, und die drei anderen in einer Ebene liegenden von der anderen Art*), wie man an den Permutationen, die die Kanten eines der Tetraeder, etwa a, b, c, d, e, f, vertauschen, leicht sieht. Jener Punkt sei der *ausgezeichnete Punkt*, diese Ebene die *ausgezeichnete Ebene des Tetraeders* genannt.

Führt man durch geeignete Permutationen der x_i die Kante a sukzessive in die übrigen Tetraederkanten über, so erhält man auch die diese Kanten schneidenden Geradenpaare und damit eine in unserer Konfiguration enthaltene Teilkonfiguration von 90 Geraden, die hier vollständig folgen möge. Das Tetraeder $abcdef$, für das sämtliche Schnittgeraden seiner Kanten in der Teilkonfiguration enthalten sind, heiße ihr *ausgezeichnetes Tetraeder*.

		I	II	III	IV	V	VI	VII
$a = 123456$	α	135264	241536	263145	416235	236415	142635	315246
	β	526134	413562	461253	245163	425613	512463	346152
$d = 654321$	α	642513	536241	514632	361542	541362	635142	462531
	β	251643	364215	316524	532614	352164	265314	431625
$b = 246135$	α	263451	412365	456213	125463	465123	214563	623415
	β	345261	126354	152436	413256	143526	324156	615234
$e = 513642$	α	514326	365412	321564	652314	312654	563214	154362
	β	432516	651423	625341	364521	634251	453621	162543
$c = 415263$	α	456132	124653	135426	243156	153246	421356	546123
	β	613452	245631	234165	126435	216345	641235	523461
$f = 362514$	α	321645	653124	642351	534621	624531	356421	231654
	β	164325	532146	543612	651342	561432	136542	254316

*) Ob die drei ersteren oder die drei letzteren Geraden von der ersten Art sind, wird am Schluß des § 5 entschieden.

Zu dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken. Neben jeder der Kanten a, b, c, d, e, f stehen die 7 sie schneidenden Geradenpaare. Die in derselben Kolonne stehenden zwölf Geraden bilden zwei Tetraeder; die 6 in den Zeilen α stehenden bilden das eine, die in den Zeilen β stehenden bilden das andere Tetraeder. Jede in einer Zeile α stehende Kante des einen Tetraeders schneidet die darunter in der Zeile β stehende Kante des anderen. Die zu den Schnittgeraden von a und d gehörigen Kanten eines und desselben der 14 Tetraeder sind gegenüberliegende, ebenso die zu den Schnittgeraden von b und e und die zu denen von c und f gehörigen.

Die Tabelle enthält sämtliche 90 unter den 720 vorkommenden Geraden, die irgend eine Kante des Tetraeders $abcdef$ schneiden; diese 90 Geraden gruppieren sich zu 15 Tetraedern, so daß jede Gerade einem und nur einem Tetraeder angehört.

Da bei den 6 Permutationen $\binom{k}{ak}$ $(k=1, 2, \cdots, 6;\ a \not\equiv 0 \text{ mod. } 7)$ die Kanten des Tetraeders $abcdef$ sich vertauschen, so bleibt unsere Teilkonfiguration von 90 Geraden bei allen Kollineationen und Korrelationen einer Gruppe invariant, die mit der metazyklischen Gruppe von 7 Elementen holoedrisch isomorph ist.

Nach unserer Annahme ist 123456 eine Gerade erster Art. Das gleiche gilt aber auch von 135264. Denn diese Gerade geht nach unserer Tabelle mit 123456 und 526134 durch denselben Punkt, und da die letztgenannten beiden Geraden nicht Kanten des zu 135264 gehörigen Tetraeders sind, so bilden sie eines der 7 mit 135264 inzidenten Paare; diese ist also von erster Art. Das gleiche gilt von allen Geraden der zu 123456 gehörigen 7 Paare.

Fassen wir die hauptsächlichen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen:

Die 720 Geraden der Konfiguration bilden 120 Tetraeder derart, daß jede Gerade einem und nur einem Tetraeder angehört. Eine beliebige der 720 Geraden wird außer von Kanten des Tetraeders, zu welchem sie gehört, noch von 7 Paaren weiterer Geraden geschnitten. Für die eine Hälfte der 720 Geraden (Geraden erster Art) gehen die beiden Geraden eines jeden Paares durch einen und denselben von 7 Punkten der ursprünglichen Geraden, für die andere Hälfte (Geraden zweiter Art) liegen die Geraden eines jeden Paares in einer und derselben von 7 durch die ursprüngliche Gerade gehenden Ebenen. Eine Gerade erster bzw. zweiter Art wird nur von Geraden erster bzw. zweiter Art getroffen.

Die Kanten eines und desselben der 120 Tetraeder haben im ganzen 84 Schnittgeraden, die sich zu 14 Tetraedern anordnen. Sie bilden zusammen

mit dem Ausgangstetraeder eine Teilkonfiguration, die bei einer zur metazyklischen Gruppe von 7 Elementen holoedrisch isomorphen Gruppe von 21 Kollineationen und 21 Korrelationen invariant bleibt.

§ 3.

Die Punkte und Ebenen der Konfiguration.

Bestimmen wir jetzt die Punkte, in denen sich zwei oder mehr der 720 Geraden schneiden.

Da wir 120 Tetraeder haben und jede Gerade nur einem einzigen Tetraeder angehört, so finden sich unter den zu bestimmenden Punkten 720 Tetraederecken, durch deren jede 3 Geraden gehen.

Außer den beiden Tetraederecken liegen auf der Geraden a, wie wir sahen, 7 Punkte, durch die je 2 Geraden erster Art gehen. Diese können nicht Tetraederecken sein. Denn anderenfalls müßte einem solchen Tetraeder die Kante a angehören, weil sonst durch die betreffende Ecke 4 Geraden gehen würden, während sich höchstens 3 von unseren Geraden in einem Punkte schneiden können. a gehört aber nur einem einzigen Tetraeder an.

Da es 360 Geraden erster Art gibt, so haben wir $\frac{360 \cdot 7}{3} = 840$ Punkte der letztgenannten Art. Auf den 360 Geraden der zweiten Art liegen je 14 Punkte, durch deren jeden je eine weitere Gerade der zweiten Art geht. Dies ergibt $\frac{360 \cdot 14}{2} = 2520$ Punkte, in denen sich je 2 Geraden schneiden. Das Analoge gilt von den Ebenen; also:

Es gibt in der Konfiguration 1560 Punkte, in denen sich je 3 Geraden schneiden; unter ihnen sind 720 Tetraederecken, durch die übrigen 840 Punkte gehen ausschließlich Geraden erster Art. Außerdem sind 2520 Punkte vorhanden, durch die je 2 Geraden gehen, und zwar sind dies immer Geraden zweiter Art. Ebenso gibt es 1560 Ebenen mit je 3 Geraden, darunter 720 Tetraederflächen, und 2520 Ebenen mit je einem Paar von Geraden.

§ 4.

Die Beziehung der Teilkonfiguration zur Konfiguration I.

In dem Tetraeder $abcdef$ waren eine Ecke und die gegenüberliegende Ebene ausgezeichnet, indem die mit der Ecke bzw. mit der Ebene inzidenten drei Tetraederkanten von derselben Art waren.

Diese beiden Kantentripel sind für das Tetraeder $abcdef$: 123456, 246135, 415263 und 654321, 531642, 362514. Addiert man nun die drei Koordinaten x_0, die drei $x_1, \cdots$ der Geraden des ersten Tripels, so erhält man: $3\ \lambda\ \lambda\ \mu\ \lambda\ \mu\ \mu$. Dies ist eine der 140 Geraden der Konfigu-

ration I, die also mit den drei Geraden des ersten Tripels inzident sein muß. Multipliziert man dagegen jene Koordinaten mit γ, γ^2, γ^4 und addiert die entsprechenden, so erhält man $\lambda\,\lambda\,\mu\,\lambda\,\mu\,\mu\,3$; und wenn man ebenso mit $\gamma^2, \gamma^4, \gamma$; $\gamma^4, \gamma, \gamma^2$; $\gamma^3, \gamma^6, \gamma^5$; $\gamma^6, \gamma^5, \gamma^3$; $\gamma^5, \gamma^3, \gamma^6$ verfährt, so erhält man weitere 5 Geraden der Konfiguration I, nämlich:

$$\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda,$$
$$\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu,$$
$$\mu\;\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda,$$
$$\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu,$$
$$\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda,$$

die gleichfalls die Geraden des ersten Tripels schneiden.

Die Geraden des zweiten Tripels werden ebenso von 7 Geraden der Konfiguration I geschnitten, u. z. sind dies nach Herrn Maschkes Bezeichnung die „Gegengeraden" der vorigen 7 Geraden, d. h. diejenigen, deren Koordinaten aus denen der ersteren durch Vertauschung von λ mit μ erhalten werden. Hieraus aber folgt, *daß die ausgezeichneten Ecken und Ebenen unserer* 120 *Tetraeder übereinstimmen mit den Hauptpunkten und Hauptebenen der Konfiguration I.*

Die vorher zuerst gefundene Gerade $3\,\lambda\,\lambda\,\mu\,\lambda\,\mu\,\mu$ trifft außer dem Kantentripel 123456, 246135, 415263 noch je ein Kantentripel von zwei weiteren Tetraedern aus der in § 2 angegebenen Teilkonfiguration, nämlich die beiden unter IV aufgeschriebenen Tetraeder. Das gleiche gilt von einer jeden der 6 anderen Geraden der Konfiguration I. Indem wir zwischen einer Geraden und ihrer Gegengeraden die Nummer der beiden Tetraeder der Teilkonfiguration aufschreiben, die ihre ausgezeichnete Ecke auf der einen Geraden haben und ihre ausgezeichnete Ebene durch die andere Gerade schicken, erhalten wir:

$\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu$	I	$\mu\;\lambda\;\lambda\;3\;\mu\;\mu\;\lambda,$
$\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda$	II	$\lambda\;\lambda\;3\;\mu\;\mu\;\lambda\;\mu,$
$\mu\;3\;\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu$	III	$\lambda\;3\;\mu\;\mu\;\lambda\;\mu\;\lambda,$
$3\;\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu\;\mu$	IV	$3\;\mu\;\mu\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\lambda,$
$\lambda\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu\;\mu\;3$	V	$\mu\;\mu\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\lambda\;3,$
$\lambda\;\mu\;\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda$	VI	$\mu\;\lambda\;\mu\;\lambda\;\lambda\;3\;\mu,$
$\mu\;\lambda\;\mu\;\mu\;3\;\lambda\;\lambda$	VII	$\lambda\;\mu\;\lambda\;\lambda\;3\;\mu\;\mu.$

Es fragt sich jetzt noch, wie sich die ausgezeichneten Tetraeder-Ecken und -Ebenen auf diese Geraden der Konfiguration I verteilen.

Zunächst ist klar, daß die ausgezeichnete Ecke des Tetraeders *abcdef* der gemeinsame Schnittpunkt des einen Sextupels von Geraden der Konfiguration I, und seine ausgezeichnete Ebene die gemeinsame Ebene des andern Sextupels sein muß. Nun kann man aber dieses Tetraeder in jedes der 14 anderen durch eine Kollineation so überführen, daß dasjenige Geradenpaar der Konfiguration I in Ruhe bleibt, welches die beiden ausgezeichneten Elemente des transformierten Tetraeders enthält. So wird z. B. das Tetraeder *abcdef* in die beiden Tetraeder IV durch die Permutation

$$(x_1 x_4 x_2)\,(x_3 x_6 x_5)$$

bezw.

$$(x_1 x_2 x_4)\,(x_3 x_5 x_6)$$

übergeführt. Diese Permutationen lassen beide sowohl

$$3\,\lambda\,\lambda\,\mu\,\lambda\,\mu\,\mu$$

als auch

$$3\,\mu\,\mu\,\lambda\,\mu\,\lambda\,\lambda$$

unverändert, und da sie gerade Permutationen sind, so sind sie mit je einer Kollineation äquivalent.

Für die übrigen Tetraeder sind die betr. Permutationen:

$$(x_1 x_4 x_2)\,(x_3 x_6 x_5) \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+k} \end{pmatrix}$$

und $$\qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \cdots, 6 \\ k = 1, 2, \cdots, 6 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 x_2 x_4)\,(x_3 x_5 x_6) \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+k} \end{pmatrix}.$$

Denn $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+k} \end{pmatrix}$ vertauscht die Tetraeder I, II, $\cdots$, VII und die oben angegebenen zugehörigen Geraden der Konfiguration I zyklisch.

Daraus aber folgt, daß die ausgezeichneten Ecken sämtlich auf den durch denselben Punkt gehenden 7 Geraden der Konfiguration I liegen, und die ausgezeichneten Ebenen sämtlich durch deren Gegengeraden gehen.

Auf jeder der 7 Geraden des ersten Sextupels erhalten wir so außer dem gemeinsamen Punkt 2 Hauptpunkte der Konfiguration I, und es fragt sich noch, was für zwei Punkte dies sind. Herr Maschke hat gezeigt*),

---

*) a. a. O. S. 209. Herr Maschke beweist (§ 4), daß die sechs Hauptpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 dreimal in der Weise harmonisch liegen, daß (1, 5) von (2, 4); (2, 6) von (3, 5); (1, 6) von (3, 4) harmonisch getrennt werden, und nennt solche sechs Punkte „metharmonisch". Da in der Tabelle bei Herrn Maschke S. 197 die Punkte 1, 2, 3 und 4, 5, 6 durch $(x_1 x_3 x_2)\,(x_4 x_6 x_5)$ sich zyklisch vertauschen, so kann man sechs metharmonische Punkte auch erklären als zwei zu derselben ternär-zyklischen

daß die Gruppe, welche die 6 Hauptpunkte einer Hauptgeraden in sich überführt, imprimitiv ist, und daß die Systeme der Imprimitivität zwei Punktetripel sind. Es müssen also die hier in Betracht kommenden zwei Punkte einer jeden Geraden wegen ihrer Überführbarkeit ineinander mit dem gemeinsamen Punkte der 7 Geraden demselben System der Imprimitivität angehören.

Fassen wir zusammen:

Zu jeder der in § 2 beschriebenen Teilkonfigurationen von 15 Tetraedern und 90 Geraden gehören 7 sich in einem und demselben Punkte P schneidende Geraden der Konfiguration I und ihre 7 in einer und derselben Ebene E liegende Gegengeraden derart, daß die ausgezeichneten Ecken der Tetraeder auf den erstgenannten 7 Geraden liegen, und die ausgezeichneten Ebenen der Tetraeder durch die letztgenannten 7 Geraden gehen. P und E sind der ausgezeichnete Punkt und die ausgezeichnete Ebene des ausgezeichneten Tetraeders der Teilkonfiguration.

Die Tetraederecken bezw. Tetraederebenen, die derselben jener 7 Geraden angehören, bilden mit P bezw. E dasselbe Tripel der Imprimitivität von Hauptpunkten bezw. Hauptebenen jener Geraden.

§ 5.

Die zu derselben Geraden der Konfiguration I und ihrer Gegengeraden gehörigen Tetraeder.

Zu jeder Geraden G und ihrer Gegengeraden G_0 der Konfiguration I gehören zwei Sextupel von Tetraedern unserer Konfiguration. Das eine Sextupel hat seine ausgezeichneten Ecken auf G und schickt seine ausgezeichneten Ebenen durch G_0, für das andere Sextupel ist es umgekehrt. Denn jede Gerade der Konfiguration I besitzt 6 Hauptpunkte und 6 Hauptebenen; zu jedem Hauptpunkt aber und zu jeder Hauptebene gehört ein einziges Tetraeder.

Gehen wir z. B. von der Geraden $G \equiv 3\,\lambda\,\lambda\,\lambda\,\mu\,\mu\,\mu$ aus, so können wir als Hauptpunkte dieser Geraden mit Herrn Maschke (vgl. a. a. O. S. 196, Abs. 2, Tabelle S. 197) deren Schnittpunkte mit den Geraden $\mu\,3\,\lambda\,\mu\,\mu\,\lambda\,\lambda$; $\mu\,\mu\,3\,\lambda\,\lambda\,\mu\,\lambda$; $\mu\,\lambda\,\mu\,3\,\lambda\,\lambda\,\mu$; $\lambda\,\lambda\,\mu\,\mu\,3\,\mu\,\lambda$; $\lambda\,\mu\,\lambda\,\mu\,\lambda\,3\,\mu$; $\lambda\,\mu\,\mu\,\lambda\,\mu\,\lambda\,3$ annehmen, unabhängig von unserer früheren Festsetzung (S. 301), da die letztere auf die Überlegungen des vorliegenden Paragraphen ganz ohne Einfluß ist. Wir erhalten dann die folgende Tabelle:

Projektivität einer Geraden gehörige Punktetripel (1, 2, 3), (4, 5, 6), die so liegen, daß (1, 5) von (2, 4) harmonisch getrennt werden Die beiden Punktetripel sind dann die Systeme der Imprimitivität (vergl. unten § 5).

Punkt:		1	2	3	4	5	6
ist der Schnitt mit:		$\mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda$	$\mu \mu 3 \lambda \lambda \mu \lambda$	$\mu \lambda \mu 3 \lambda \lambda \mu$	$\lambda \lambda \mu \mu 3 \mu \lambda$	$\lambda \mu \lambda \mu \lambda 3 \mu$	$\lambda \mu \mu \lambda \mu \lambda 3$
α	Zu den Punkten gehörige Tetraeder:	241563	124356	412635	421365	142536	214653
β		536214	653421	365142	356412	635241	563124
γ		412356	241635	124563	142653	214365	421536
δ		365421	536142	635214	635124	563412	356241
ε		124635	412563	241356	214536	412653	142365
ζ		653142	365214	536421	563241	356124	635412

Bezeichnen wir nun die Gerade 241563 mit $\alpha 1$ und in analoger Weise die anderen Geraden, so übersieht man sofort::

Die Geraden:	liegen in der durch G gehenden Ebene:	Die Geraden:	gehen durch den auf G_0 liegenden Punkt:
$\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3$	E_α	$\beta 1, \beta 2, \beta 3$	P_β
$\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3$	E_γ	$\delta 1, \delta 2, \delta 3$	P_δ
$\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3$	E_ε	$\zeta 1, \zeta 2, \zeta 3,$	P_ζ
$\alpha 4, \alpha 5, \alpha 6$	$\mathfrak{E}_\alpha$	$\beta 4, \beta 5, \beta 6$	$\mathfrak{P}_\beta$
$\gamma 4, \gamma 5, \gamma 6$	$\mathfrak{E}_\gamma$	$\delta 4, \delta 5, \delta 6$	$\mathfrak{P}_\delta$
$\varepsilon 4, \varepsilon 5, \varepsilon 6$	$\mathfrak{E}_\varepsilon$	$\zeta 4, \zeta 5, \zeta 6$	$\mathfrak{P}_\zeta$

In der intransitiven Gruppe von 36 Kollineationen und Korrelationen*), welche die Gerade und ihre Gegengerade mit den dazu gehörigen Tetraedern invariant lassen, sind 8 verschiedene ternär-zyklische Kollineationen enthalten, und bei diesen spielen jene Gerade und Gegengerade eine besondere Rolle. Diese Kollineationen sind:

$$1)\ (x_1 x_2 x_3),\quad 2)\ (x_1 x_3 x_2),\quad 3)\ (x_4 x_5 x_6),\quad 4)\ (x_4 x_6 x_5),\quad 5)\ (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_6 x_5),$$
$$6)\ (x_1 x_3 x_2)(x_4 x_5 x_6),\quad 7)\ (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6),\quad 8)\ (x_1 x_3 x_2)(x_4 x_6 x_5).$$

Von diesen Kollineationen sind die ersten 4 geschart; die Achsen der Kollineationen sind für 1) und 2):

$$0\,0\,0\,0\,\eta\,1\,\eta^2 \quad \text{und} \quad 0\,0\,0\,0\,\eta^2\,1\,\eta \quad \left(\eta = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

für 3) und 4):

$$\eta\,1\,\eta^2\,0\,0\,0\,0 \quad \text{und} \quad \eta^2\,1\,\eta\,0\,0\,0\,0,$$

d. h. die beiden Paare von Verbindungslinien der Doppelpunkte der auf

*) Vergl. Maschke, a. a. O. S. 200f.

der Geraden und Gegengeraden durch die Hauptpunkttripel (1, 2, 3), (4, 5, 6) bestimmten ternär-zyklischen Projektivität. Die andern Kollineationen sind planar-ternär-zyklisch, u. z. trägt bei 5) und 6) G die Reihe einzeln invariant bleibender Punkte und G_0 das Büschel einzeln invariant-bleibender Ebenen; bei 7) und 8) ist es umgekehrt.

Schließlich kann jetzt auch die oben offen gelassene Frage entschieden werden, ob nämlich die durch die ausgezeichnete Ecke eines unserer Tetraeder gehenden Geraden sämtlich von erster oder von zweiter Art sind. Es geht nämlich $\alpha 1$ durch den Punkt 1 von $3\,\lambda\,\lambda\,\lambda\,\mu\,\mu\,\mu$, und dieser Punkt ist die ausgezeichnete Ecke des Tetraeders, von welchem $\alpha 1$ eine Kante ist. $\alpha 1$ wird aber von den Geraden $\alpha 2$ und $\alpha 3$, die mit $\alpha 1$ zusammen in der Ebene $E\alpha$ liegen, geschnitten; also ist $\alpha 1$ von der zweiten Art. Da man nun $\alpha 1$ durch eine Kollineation, für welche die Konfiguration invariant ist, in jede andere Gerade von zweiter Art, durch eine Korrelation aber in jede Gerade erster Art überführen kann, so folgt:

Die drei durch die ausgezeichnete Ecke eines beliebigen der 120 Tetraeder gehenden Geraden sind von zweiter Art, die drei in der ausgezeichneten Ebene liegenden Geraden sind von erster Art.

Über die Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung.

Von

A. Timpe in Danzig.

Herr H. A. Schwarz*) hat in einer vom Jahre 1873 datierenden Abhandlung ein vollständiges System voneinander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise des Satzes von der Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung aufgestellt. Die hauptsächlichsten dieser Voraussetzungen sind die, daß die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung und die eine der beiden in Betracht kommenden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung vorhanden und stetig sind. Herr J. Thomae**) hat gezeigt, daß die Voraussetzung der *Stetigkeit* der einen partiellen Ableitung erster Ordnung überflüssig ist, und Herr U. Dini***) hat den Umfang der an die betrachtete Funktion zu stellenden Voraussetzungen noch weiter herabgemindert. Doch sind die Beweise dieser Autoren etwas beschwerlich und nicht ganz durchsichtig†). Im folgenden soll, auf der Grundlage des Thomaeschen Systems von Voraussetzungen, eine andere, wie mir scheint, anschaulichere Formulierung des Beweises des in Rede stehenden fundamentalen Satzes mitgeteilt werden††).

Wir sprechen den Satz folgendermaßen aus:

Es sei $f(x, y)$ eine Funktion der beiden stetig veränderlichen reellen Variabeln x, y, die für alle einem zweifach ausgedehnten, zusammenhängenden

---

*) Verhandl. d. Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft 1873, p. 259 = Ges. math. Abhandlungen 2, p. 275.

**) Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Halle 1875, p. 22.

***) Analisi infinitesimale 1, 1878, p. 122.

†) Vgl. die zusammenfassende Darstellung von O. Stolz, Grundzüge d. Diff.- u. Integralrechnung, Leipzig 1893, p. 146 ff. Über die Literatur des Satzes vgl. ferner den angeführten Aufsatz von H. A. Schwarz und Encykl. d. math. Wiss. II A 2, Nr. 10 (A. Voss).

††) Die Fassung traf ich nach Rücksprache mit den Herren Geheimrat v. Mangoldt und Professor O. Blumenthal.

Bereich $\mathfrak{B}$ *angehörenden Wertepaare* x, y *eindeutig erklärt ist. Es werde angenommen, daß die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y), \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

und die partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right] = f_{xy}(x, y)$$

überall im Bereiche $\mathfrak{B}$ *vorhanden und daß die Ableitungen* $f_x(x, y)$ *und* $f_{xy}(x, y)$ *daselbst stetig sind. Dann existiert auch die zweite Ableitung*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] = f_{yx}(x, y)$$

für jedes im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ *gelegene Wertepaar* x_0, y_0, *und zwar ist*

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Es sei $(x_0 + h,\ y_0 + k)$ eine der Stelle (x_0, y_0) benachbarte Stelle im Bereich $\mathfrak{B}$, und man betrachte den Ausdruck

(1) $$V = f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0 + k) + f(x_0,\ y_0).$$

Indem man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung zuerst nach x auf die Funktion

$$\varphi(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y)$$

bei festgehaltenem y, dann nach y auf die entstehende Funktion

$$\varphi_x(x + \vartheta h, y)$$

bei festem x und ϑ anwendet, gelangt man in bekannter Weise zu der Formel:

(2) $$V = hk \cdot f_{xy}(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta' k);$$

hier bedeuten ϑ, ϑ' zwischen 0 und 1 liegende, von h und k abhängende Zahlen.

Um nun zu entscheiden, ob der Differentialquotient f_{yx} an der Stelle (x_0, y_0) vorhanden ist, haben wir zu untersuchen, ob der Grenzwert

$$\lim_{h=0} \lim_{k=0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0 + k) + f(x_0,\ y_0)}{hk}$$

oder

(3) $$\lim_{h=0} \lim_{k=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta' k)$$

existiert. Diese Untersuchung erledigt sich naturgemäß in zwei Schritten.

Erstens haben wir zu prüfen, ob der Grenzwert

$$\lim_{k=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta' k), \quad h \neq 0$$

vorhanden ist. Nach Voraussetzung existiert im Bereiche $\mathfrak{B}$ die Ableitung $f_y(x, y)$, also der Grenzwert

$$\lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.$$

Demnach haben wir

$$\lim_{k=0} \frac{[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0 y_0)]}{hk}$$

$$= \frac{1}{h}\,[f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)], \quad h \neq 0$$

oder auch, wenn die rechte Seite gleich N gesetzt wird:

(4) $$\lim_{k=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta' k) = N.$$

Zweitens haben wir zu prüfen, ob der Grenzwert

$$\lim_{h=0} \lim_{k=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta h,\ g_0 + \vartheta' k) = \lim_{h=0} N$$

vorhanden ist. Sehen wir h als fest, k als veränderlich an, so gibt es nach Gleichung (4) in dem Bereiche $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$, $y_0 \leqq y \leqq y_0 + k$ Stellen, an welchen der Wert von f_{xy} sich um weniger als eine beliebig kleine vorgeschriebene Zahl von N unterscheidet. Als stetige Funktion nimmt aber f_{xy} in diesem Bereich eine *abgeschlossene* Wertemenge, folglich auch den Wert N selbst an. Da dies richtig bleibt, wie klein auch k gewählt werden mag, so muß eine Stelle, an welcher $f_{xy} = N$ ist, dem Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$, $y = y_0$ angehören, und wir können daher schreiben:

(5) $$N = f_{xy}(x_0 + \vartheta'' h, y_0), \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \vartheta'' \leqq 1.$$

Daraus folgt nun sofort:

$$\lim_{h=0} \lim_{k=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta' k) = \lim_{h=0} f_{xy}(x_0 + \vartheta'' h, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Damit ist das Vorhandensein des Grenzwertes (3) nachgewiesen und zugleich gezeigt, daß

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Göttingen, August 1907.

Über die Krümmung in der Variationsrechnung.

Von

Georg Landsberg in Kiel.

Inhaltsverzeichnis.*)

I. Die Krümmung in der Flächentheorie.

Während die ältere Variationsrechnung vorzugsweise das Problem der Herstellung der Differentialgleichungen behandelt hatte, denen die Integralkurven, die sogenannten Extremalen, genügen, beschäftigt sich die moderne Theorie mit den eigentlichen Fragen des Maximums oder Minimums, also mit der Vergleichung des für eine Extremale entstehenden Integralwertes mit dem entsprechenden Werte für eine andere Kurve. Hierbei werden aber der Regel nach die beiden verglichenen Kurven als benachbart angenommen, und in manchen Untersuchungen, z. B. in den Sätzen über die konjugierten Punkte einer Extremale, wird des weiteren vorausgesetzt, daß die beiden Kurven in ihrem gemeinsamen Anfangspunkt einen beliebig kleinen Richtungsunterschied haben. Es gibt aber spezielle Aufgaben der Variationsrechnung, insbesondere nämlich das Problem der geodätischen Linien und seine Verallgemeinerungen, in denen derartige das Feld beschränkende Annahmen gar nicht oder in viel geringerem Umfange erforderlich sind. Hier haben die Untersuchungen von Darboux,

*) Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit ist bereits in meinem Vortrage „Über die Totalkrümmung" (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XVI, 1907, S. 36—46) veröffentlicht.

v. Mangoldt und Hadamard*) weitgehende Möglichkeiten erschlossen, merkwürdige Aussagen über den Verlauf und die Lageneigenschaften der Integralkurven zu machen, und in der letzten der genannten Arbeiten wird mit begründetem Nachdruck darauf hingewiesen, daß alle diese Sätze sich als Folgerungen aus dem Gaußschen Theoreme über die Totalkrümmung geodätischer Dreiecke und seiner von Ossian Bonnet aufgestellten Erweiterung erweisen. Die Methode der Herleitung dieses Satzes beruht, wie man weiß, darauf, daß ein Flächenintegral *für ein endliches Gebiet* gebildet und auf ein Linienintegral zurückgeführt wird. Es entsteht daher die Frage, ob und in welchem Umfange sich dieses fundamentale Theorem auf das allgemeine Problem der Variationsrechnung übertragen läßt, zunächst in dem einfachsten Falle, daß das Integral nur *eine* unbestimmte Funktion und deren erste Ableitung enthält. In demselben Umfang, in dem dies gelingt, darf man alsdann auch erwarten, die in der Flächentheorie gewonnenen Methoden in der Variationsrechnung zur Anwendung bringen und so zu Sätzen über allseitig *endlich* ausgedehnte Felder gelangen zu können.

Um aber die natürliche Grundlage für diese Untersuchung zu schaffen und eine präzisere Problemstellung zu ermöglichen, erscheint es vor allen Dingen erforderlich, noch einmal auf die Elemente der Gaußschen Krümmungstheorie zurückzugehen. Gauß hat bekanntlich gezeigt, daß die Krümmung einer Fläche in einem ihrer Punkte und damit auch die Totalkrümmung eines Gebietes nur von dem Ausdrucke des Linienelementes

$$ds = \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2},$$

nicht aber von der Gestaltung der Fläche *im Raume* abhängen und somit Biegungsinvarianten sind, und seine Methoden ergeben auch für die erst von Minding eingeführte geodätische Krümmung einer Flächenkurve das gleiche Resultat. Aber die *Definition* dieser grundlegenden Begriffe erfolgt durch die sphärische Abbildung der Fläche, also durch Benutzung von Konstruktionen, welche für die Fläche selbst keine charakteristische Bedeutung haben und erst bei einer Erweiterung des Gebietes durch Hinzufügung einer neuen Dimension einen Inhalt bekommen.**) Will man

*) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, III. partie. S. 104 ff. (1894).

H. v. Mangoldt, Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. Crelles J. Bd. 91, p. 23—54 (1881).

J. Hadamard, Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. Liouvilles Journ. (5e serie) t. III, p. 331—388 (1897). Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. ibid. t. IV, p. 27—73 (1898).

**) In dem Artikel „Prinzipien der Geometrie“ der Encyklopädie d. math. Wissen-

aber diese Begriffe auf das Feld eines Problems der Variationsrechnung übertragen, so darf man ausschließlich von solchen Konstruktionen Gebrauch machen, welche ohne dimensionale Erweiterung des Feldes ausführbar sind. Es muß daher zunächst eine Definition der Grundbegriffe der Krümmung aufgestellt werden, welche die zweidimensionale Fläche nirgends überschreitet; eine solche mag kurz eine *innere* Definition genannt werden.

Hierzu gelangen wir in sehr einfacher Weise durch eine geeignete Interpretation der Formeln, die sich bei Verwendung der Gaußschen geodätischen Parameter ergeben. Führt man nämlich als Parameterkurven eine Schar geodätischer Linien ($q =$ const.) und ihre rechtwinkligen Trajektorien ($p =$ const.) ein und wählt p als Bogenlänge der geodätischen Linien, gezählt von einer festen Trajektorie, so wird das Quadrat des Linienelementes ausgedrückt durch:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2, \tag{1}$$

wo m eine Funktion von p, q ist. Für den Winkel ϑ, den eine durch die Differentiale (dp, dq) bestimmte Richtung im Punkte (p, q) mit der zugehörigen ersten Parameterlinie ($q =$ const.) bildet, hat man also:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds}, \quad \sin\vartheta = \frac{m\,dq}{ds}, \quad \operatorname{cotg}\vartheta = \frac{dp}{m\,dq}. \tag{2}$$

Mit Benutzung des Winkels ϑ wird die Formel für die geodätische Krümmung:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{d\vartheta + \frac{\partial m}{\partial p}\,dq}{ds}, \tag{3}$$

also die Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$d\vartheta = -\frac{\partial m}{\partial p}\,dq. \tag{4}$$

Schließlich ergibt sich für die Flächenkrümmung:

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}. \tag{5}$$

Bei diesen Formeln ist zu beachten, daß eine der Trajektorien $p = p_0$ als völlig willkürliche Kurve L_0 auf der Fläche gewählt werden kann, und daß alsdann die Schar der geodätischen Linien $q =$ const. und die Parallelkurven $p =$ const. eindeutig bestimmt sind.

---

schaften (III A B 1) von F. Enriques wird auf S. 96 geradezu gesagt, daß „in der abstrakten Mannigfaltigkeit u, v der Ausdruck Krümmung an sich jede anschauliche Bedeutung verliere und nur noch eine aus E, F, G und ihren Differentialquotienten zusammengesetzte Differentialinvariante sei". Diese Behauptung ist nach den folgenden Ausführungen richtig zu stellen.

Die obigen Gleichungen gewinnen nun eine sehr einfache und anschauliche Deutung, wenn wir die sämtlichen Punkte der Kurve L_0 auf der Fläche in rechtwinkliger Richtung zu L_0 um das gleiche Stück ε verschieben und die Änderung betrachten, welche die Bogenlänge s_0 von L_0 bei solcher Verschiebung erfährt. Man hat nämlich alsdann für einen von $q = q_0$ bis $q = q_1$ reichenden Bogen von L_0:

$$(6) \qquad s_0 = \int_{q_0}^{q_1} m(p_0, q)\, dq$$

und für den entsprechenden Bogen der Parallelkurve $p = p_0 + \varepsilon$:

$$s_0(\varepsilon) = \int_{q_0}^{q_1} m(p_0 + \varepsilon, q)\, dq.$$

Betrachtet man also $s_0(\varepsilon)$ als Funktion von ε, so erhält man durch Differentiation bei $\varepsilon = 0$

$$\frac{ds_0}{d\varepsilon} = \int_{q_0}^{q_1} m_p(p_0, q)\, dq$$

und

$$\frac{d^2 s_0}{d\varepsilon^2} = \int_{q_0}^{q_1} m_{pp}(p_0, q)\, dq.$$

Die erste dieser Gleichungen kann mit Hilfe von (3), wenn man berücksichtigt, daß längs der Kurve L_0 $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $d\vartheta = 0$ ist, in die Form

$$(7) \qquad \frac{ds_0}{d\varepsilon} = \int_{q_0}^{q_1} \frac{ds}{\varrho_g}$$

gesetzt werden, während die zweite vermöge (5) in die Gestalt

$$(8) \qquad \frac{d^2 s_0}{d\varepsilon^2} = -\int_{q_0}^{q_1} k\, ds$$

gebracht werden kann.

Die Gleichungen (7) und (8) ergeben somit die Sätze:

„Wenn man die Punkte einer beliebigen Kurve auf der Fläche in senkrechter Richtung zur Kurve um dasselbe Stück ε verschiebt und die Bogenlänge s_0 als Funktion der Verschiebung ε betrachtet, so ist der Differentialquotient $\frac{ds_0}{d\varepsilon}$ gleich dem Integral der geodätischen Krümmung längs der Kurve. Ebenso ist der negativ genommene zweite Differentialquotient $-\frac{d^2 s_0}{d\varepsilon^2}$ gleich dem Integral der Flächenkrümmung längs der Kurve.“

Es ist klar, daß diese Sätze nunmehr auch umgekehrt dazu dienen können, sowohl die geodätische Krümmung als auch die Flächenkrümmung ohne Überschreitung des zweidimensionalen Gebietes zu *definieren*, wenn man nachträglich die Kurve L_0 auf ein Linienelement zusammenzieht, also s_0 gegen Null konvergieren läßt. In der Tat erhält man auf Grund des Mittelwertsatzes aus (7):

(9) $$\frac{1}{\varrho_g} = \lim_{s_0=0} \frac{ds_0}{s_0 \cdot d\varepsilon}$$

und aus (8):

(10) $$k = -\lim_{s_0=0} \frac{d^2 s_0}{s_0\, d\varepsilon^2}.$$

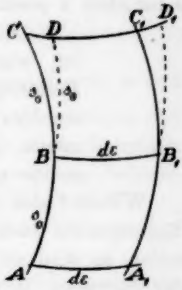


Fig. 1.

Die Gleichung (5) ergibt sodann den Satz, daß der auf der rechten Seite von (10) stehende Grenzwert nur von dem Orte des betrachteten Punktes (p, q), nicht aber von der Richtung des an ihn angelegten Bogenelementes s_0 abhängig ist, und die Gleichungen (9) und (10) besagen (s. Fig. 1):

„Verschiebt man die Punkte eines unendlich kleinen Bogens $ABC = 2s_0$ in senkrechter Richtung zur Kurve um dasselbe unendlich kleine Stück $d\varepsilon$ auf der Fläche, so ist

1. der Differentialquotient $\frac{ds_0}{d\varepsilon}$ gleich dem geodätischen Kontingenzwinkel $\tau = CBD$,

2. der Differentialquotient $\frac{d\tau}{d\varepsilon}$ des Kontingenzwinkels nach ε gleich dem negativen Produkt aus der Flächenkrümmung k und dem Bogenelement s_0.

Die Totalkrümmung $ks_0 d\varepsilon$ des Flächenelementes BB_1A_1A ist somit gleich $-d\tau$, d. h. gleich der Abnahme des Kontingenzwinkels CBD."

Die vier Winkel des Vierecks AA_1BB_1 sind der Reihe nach bis auf unendlich kleine Größen dritter Ordnung $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \tau$, $\frac{\pi}{2} - \tau - d\tau$ und der sphärische Exzeß des Vierecks ist somit $-d\tau$; man erkennt also, daß der letzte Satz auch auf die Bestimmung der Totalkrümmung durch den sphärischen Exzeß führt.

Definiert man die Flächenkrümmung in der hier dargelegten Weise durch die Gleichungen (8) oder (10), so bleibt noch die Frage zu beantworten, welche anschauliche Bedeutung dem Vorzeichen von k alsdann zukommt. Zu einer Interpretation dieses Vorzeichens gelangt man nun am einfachsten, wenn man die Kurve L_0, die nachträglich auf ein Bogen-

element zusammengezogen wird, selbst als geodätische Linie annimmt. Bei dieser Voraussetzung ergibt sich nämlich aus (7) $\frac{ds_0}{ds} = 0$ und die Bogenlänge s_0 wird daher nach (8) bei der betrachteten Verschiebung ein Maximum oder Minimum, je nachdem das Integral $\int k ds$ positiv oder negativ ausfällt, also bei hinreichender Beschränkung der Kurve L_0 auch, je nachdem k positiv oder negativ ist. Es gilt also der Satz:

> „Ein hinreichend kleines Stück einer geodätischen Linie ist, wenn ihre Punkte um dieselbe Strecke in senkrechter Richtung zur Kurve auf der Fläche verschoben werden, stets ein Maximum oder ein Minimum, nämlich das erste oder das zweite, je nachdem die Flächenkrümmung längs der Kurve positiv oder negativ ist."

Während also die geodätische Verbindung zweier hinreichend naher Flächenpunkte stets ein Minimum ist, wenn die Endpunkte festgehalten werden, so wird sie bei der hier betrachteten Verschiebung ein Maximum oder Minimum je nach dem Vorzeichen der Flächenkrümmung in der Nachbarschaft dieser Kurve. Diese Eigenschaft der geodätischen Linien kommt ja schon in der Bezeichnung „größte Kreise" für die geodätischen Linien der Kugel zum Ausdruck. Ein etwas allgemeineres Beispiel bieten die Rotationsflächen, welche bekanntlich positiv oder negativ gekrümmt sind, je nachdem die Meridiane der Rotationsachse die konkave oder die konvexe Seite zuwenden. Unter den rechtwinkligen Trajektorien der Meridiane, den Breitenkreisen, ist der Kehlkreis eine geodätische Linie. Schiebt man dessen Punkte an den Meridianen entlang, so erfährt jeder Kreisbogen offenbar bei positiv gekrümmten Flächen eine Zusammenziehung, bei negativ gekrümmten eine Dehnung.

Wiewohl die hier dargelegte Auffassung der Flächenkrümmung im Grunde genommen nur eine in sich abgeschlossene und auf die sphärische Abbildung verzichtende Interpretation wohlbekannter Gaußscher Formeln ist, so scheint sie doch bisher noch nicht beachtet worden zu sein. Von den Gesichtspunkten der Transformationsgruppen ausgehend, hat Herr Engel*) die Gleichungen (9) und (10) in unwesentlich verschiedener Form aufgestellt und durch Benutzung der Minimalkurven als Parameterkurven bewiesen, ohne indessen den Zusammenhang mit der Gaußschen Formel (5) zu bemerken. Außerdem finde ich nur noch in der Théorie des Surfaces von Herrn Darboux (t. III, Chap. V, p. 95) eine geometrische Deutung der Gaußschen Formeln (5), welche ebenfalls innerer Natur, aber weniger einfach ist und mit der hier gegebenen nicht übereinstimmt.

*) F. Engel, Zur Flächentheorie, 1. Mitteilung. Ber. d. math.-phys. Klasse d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss. z. Leipzig, 1. Juli 1901.

Die Figur der einfach unendlich vielen geodätischen Linien und ihrer rechtwinkligen Trajektorien, welche der vorstehenden Betrachtung zugrunde liegt, tritt nun aber in verallgemeinerter Gestalt auch in dem einfachsten Problem der Variationsrechnung auf. Handelt es sich nämlich um die Extrema des Integrales:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, x', y')\, dt, \tag{1}$$

worin φ in den Ableitungen $x' = \frac{dx}{dt}$ und $y' = \frac{dy}{dt}$ homogen vom ersten Grade ist, so betrachtet man in der Variationsrechnung zusammen mit einer Schar einfach unendlich vieler Extremalen oftmals auch diejenigen Kurven, welche die ersteren transversal schneiden; diese beiden Scharen gehen eben in dem speziellen Falle, daß

$$\varphi = \sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2}$$

ist, in die geradesten Linien der Fläche und ihre rechtwinkligen Schnittkurven über, nur bleibt hierbei zu beachten, daß in dem allgemeineren Falle die Bedingung der transversalen Lage keine *umkehrbare* Beziehung zu sein braucht.*) Es gilt alsdann auch für die allgemeinere Aufgabe der Variationsrechnung der Gaußsche Satz, daß irgend zwei Transversalkurven auf sämtlichen Extremalen der Schar die gleiche Bogenlänge ausschneiden, wenn der Begriff „Bogenlänge“ durch das Integral (11) definiert wird.**) Die bisherigen Untersuchungen der Variationsrechnung beschränkten sich nun aber vorzugsweise auf die Vergleichung entsprechender Bögen von Extremalen, während für die voranstehenden Darlegungen gerade die Vergleichung entsprechender Bögen der zweiten Kurvenschar, der Transversalkurven, die Basis bilden; denn wir sind zur geodätischen Krümmung durch Bildung der ersten, zur Flächenkrümmung durch Bildung der zweiten Differenzen zusammengehöriger Bögen der orthogonalen Trajektorien gelangt. Wir stellen uns daher die Frage, die im folgenden behandelt werden soll, ob und in welchem Umfange sich die zuvor entwickelten Begriffe der geodätischen und der Flächenkrümmung auf ein zu einem Probleme der Variationsrechnung gehöriges Feld übertragen lassen. Wir werden sehen, daß *die Entscheidung für den ersten der beiden Begriffe unbedingt, für den zweiten nur unter bestimmten Restriktionen bejahend ausfällt.*

---

*) Kneser, Variationsrechnung §§ 10 und 11.

**) Kneser, ibid. § 15.

II. Klassifikation der Probleme der Variationsrechnung nach ihrer charakteristischen Zahl.

Die Variation des Integrals

$$(1)\qquad s = \int \varphi(x, y, x', y')\,dt$$

ergibt bekanntlich als Differentialgleichung der Extremalen:

$$(2)\qquad X = \varphi_x - \frac{d\varphi_{x'}}{dt} = 0$$

oder

$$Y = \varphi_y - \frac{d\varphi_{y'}}{dt} = 0$$

und als Bedingung der transversalen Lage:

$$(3)\qquad T = \varphi_{x'}\delta x + \varphi_{y'}\delta y = 0.$$

Die Differentialgleichungen (2) sind wegen der Identität

$$Xx' + Yy' = 0$$

nur mit einer einzigen Gleichung äquivalent, die unter Anwendung der Bezeichnung

$$\Phi = \frac{\varphi_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{\varphi_{x'y'}}{x'y'} = \frac{\varphi_{y'y'}}{x'^2}$$

in die Gestalt:

$$(2\text{a})\qquad Z = \Phi(x'y'' - x''y') + \varphi_{xy'} - \varphi_{yx'} = 0$$

gesetzt werden kann.

Betrachtet man nun ein Feld, bestehend aus einfach unendlich vielen Extremalen und deren Transversalen, so kann ein solches entweder von den Kurven der ersten oder von denen der zweiten Art aus erzeugt werden. Im ersten Falle ist zur Bestimmung des Feldes die ganze Schar der Extremalen, also ein System von Lösungen der Differentialgleichung (2a) mit einer willkürlichen Konstanten erforderlich, und die zugehörigen Transversalen sind alsdann *eindeutig* festgelegt, weil die Gleichung (3) in $\delta x, \delta y$ linear ist. Geht man andererseits, was für unser Ziel erforderlich ist, von den Transversalen aus, so genügt zur Herstellung des Feldes eine einzige Kurve L_0, welche völlig willkürlich angenommen werden kann; es ist aber alsdann vor allem zu beachten, daß sich im allgemeinen an eine solche Kurve mehrere übereinander liegende Felder derart anlegen, daß L_0 für sie eine Spaltkurve bildet. In der Tat ist durch Angabe von L_0 in den Gleichungen (3) das Verhältnis von δx zu δy als Funktion von x und y gegeben; verhalten sich nun $\varphi_{x'}$ und $\varphi_{y'}$ zueinander wie zwei Differentialformen m^{ten} Grades:

(4) $$\mathsf{A} = A_0 x'^m + \binom{m}{1} A_1 x'^{m-1} y' + \cdots + A_m y'^m$$

und

$$\mathsf{B} = B_0 x'^m + \binom{m}{1} B_1 x'^{m-1} y' + \cdots + B_m y'^m,$$

deren Koeffizienten A_p und B_p gegebene Funktionen von x und y sind, so wird durch die Transversalgleichung (3) das Verhältnis $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ m-deutig als Funktion von x, y bestimmt*); es gehen also alsdann von der Spaltkurve L_0 m verschiedene Extremalenscharen aus, und die Ausführung der vorher dargelegten Konstruktion ergibt somit auch m verschiedene und gleichberechtigte Parallelkurven zu L_0. Für die Lösung des gestellten Problems erscheint es daher vor allen Dingen erforderlich, die Probleme der Variationsrechnung nach der Größe der in der Transversalgleichung (3) auftretenden Ordnungszahl m zu klassifizieren. Die Zahl m mag die *charakteristische Zahl des Feldes* heißen.

Wenn nun die Transversalgleichung (3) unter Benützung der Bezeichnungen (4) auf die Form

(5) $$\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y = 0$$

gebracht werden kann, so gibt es einen Proportionalitätsfaktor R von der Beschaffenheit, daß

(6) $$R\varphi_{x'} = \mathsf{A}, \qquad R\varphi_{y'} = \mathsf{B}$$

ist. Da ferner φ in x' und y' homogen vom ersten Grade, also

$$\varphi = \varphi_{x'} x' + \varphi_{y'} y'$$

ist, so folgt weiter

$$R\varphi = \mathsf{A}x' + \mathsf{B}y'$$

und

(7) $$\frac{\varphi_{x'}}{\varphi} = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}x' + \mathsf{B}y'}, \qquad \frac{\varphi_{y'}}{\varphi} = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}x' + \mathsf{B}y'}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen, die man auch in die eine zusammenfassen kann

(8) $$\frac{\varphi_{x'} dx' + \varphi_{y'} dy'}{\varphi} = \frac{\mathsf{A}dx' + \mathsf{B}dy'}{\mathsf{A}x' + \mathsf{B}y'},$$

ergibt sich φ durch Integration. Hierbei ist zu beachten, daß bei der Integration x und y als konstant anzusehen sind, und daß die linke wie

---

*) Bei erschöpfender Behandlung des Problems wird es auch notwendig sein, den Fall zu behandeln, daß die Funktionen A und B *algebraisch* von x' und y' abhängen, also z. B. die Form haben:

$$Ax' + By' + \sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2},$$

doch mag es zuvörderst genügen, die Untersuchung auf den Fall *rationaler* Abhängigkeit zu beschränken.

die rechte Seite der letzten Gleichung im wesentlichen nur von dem Verhältnis $\frac{y'}{x'}$ abhängen. In der Tat erhält die rechte Seite, wenn man x', y' durch tx', ty' ersetzt, nur das Zusatzglied $\frac{dt}{t}$.

Es erscheint angezeigt, sich zunächst bei der Integration auf die Fälle zu beschränken, in denen die Funktion φ *algebraisch* von x' und y' abhängt, denn es sind bisher wohl ausschließlich algebraische Differentialformen der Untersuchung unterworfen worden.*) Wenn man daher die binäre Differentialform der Ordnung $m+1$:

$$\mathsf{A}x' + \mathsf{B}y' = (L_0 x' + M_0 y')(L_1 x' + M_1 y') \cdots (L_m x' + M_m y')$$

in Linearfaktoren zerlegt, so darf man dieselben alsdann als voneinander verschieden voraussetzen; denn man überzeugt sich leicht davon, daß im Falle mehrfacher Faktoren die Integration der Gleichungen (7) auf transzendente Funktionen von x' und y' führt. Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich daher aus der letzten Gleichung:

$$(9) \qquad \frac{\varphi_{x'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{L_h'}{L_h x' + M_h y'}; \qquad \frac{\varphi_{y'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{M_h'}{L_h x' + M_h y'},$$

wobei L_h', M_h' gewisse Funktionen von x und y sind, die noch zu bestimmen sind. Multipliziert man nämlich die erste Gleichung mit x', die zweite mit y' und addiert, so ergibt sich die Identität:

$$1 = \sum_0^m \frac{L_h' x' + M_h' y'}{L_h x' + M_h y'};$$

es muß also jeder dieser Brüche von x', y' unabhängig, d. h.

$$L_h' = r_h L_h, \qquad M_h' = r_h M_h$$

und

$$(10) \qquad \sum_{h=0}^{m} r_h = 1$$

sein.

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (9) ein, so ergibt sich durch Integration:

$$(11) \qquad \varphi = (L_0 x' + M_0 y')^{r_0} (L_1 x' + M_1 y')^{r_1} \cdots (L_m x' + M_m y')^{r_m},$$

worin die Exponenten stets der Relation (10) unterworfen sind. Damit φ

*) Allerdings können auch gelegentlich transzendente Differentialformen Interesse beanspruchen. So führt z. B. das Problem, alle Geometrien aufzustellen, in denen von *Kongruenz* die Rede sein kann, auf Formen des Bogenelementes, die von der Gaußschen wesentlich verschieden und auch in den Differentialen transzendent sein können.

eine algebraische Differentialform sei, müssen die Exponenten r_h überdies rationale, positive oder negative Zahlen sein. Im übrigen brauchen die einzelnen Linearfaktoren nicht reell zu sein, sondern es können paarweise konjugiert imaginäre Linearfaktoren auftreten, die aber alsdann mit gleichen Exponenten behaftet sein müssen, wenn φ reell werden soll.

Ist umgekehrt φ in der Form (11) gegeben, so wird die Transversalgleichung von der Form (5), und sie besitzt die charakteristische Zahl m. Denn man erhält alsdann durch Differentiation.

$$\frac{\varphi_{x'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{r_h L_h}{L_h x' + M_h y'}, \quad \frac{\varphi_{y'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{r_h M_h}{L_h x' + M_h y'},$$

also wenn man zur Beseitigung der Nenner die Form $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$U = \prod_{h=0}^{m} (L_h x' + M_h y') \tag{12}$$

einführt:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \varphi_{x'} \cdot \frac{U}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} r_h L_h \frac{U}{L_h x' + M_h y'} \\ \mathsf{B} &= \varphi_{y'} \cdot \frac{U}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} r_h M_h \frac{U}{L_h x' + M_h y'}, \end{aligned} \tag{13}$$

und es sind also in der Tat in der Transversalgleichung:

$$\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y = 0$$

A und B binäre ganze Formen m^{ten} Grades von x' und y'. Behaftet man die Funktion φ noch mit einem Faktor, der von x', y' unabhängig und somit eine willkürliche Funktion von x, y allein ist, so übt dies auf die Transversalgleichung $\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y = 0$ keinen Einfluß aus, und umgekehrt sieht man sofort, daß, wenn zwei Variationsprobleme auf dieselbe Transversalgleichung führen, die beiden Integranden φ und $\overline{\varphi}$ sich nur um einen derartigen Faktor unterscheiden können.

Die einzelnen Linearfaktoren $L_h x' + M_h y'$ von φ und U bestimmen, gleich Null gesetzt, gewisse reelle oder imaginäre Kurvenscharen, welche für das Problem der Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung sind. Diese Kurven sollen *Nullkurven* genannt werden, falls der zugehörige Exponent r_h positiv ist, sie sollen *Polkurven* heißen, falls r_h negativ ist. In der Tat, führt man das Integral längs einer Nullkurve, so ist $s = 0$, während die Integration längs eines Elementes einer Polkurve nicht ausführbar ist. Die Nullkurven treten bei einem Variationsproblem wegen der Relation (10) stets auf, während die Polkurven, falls

alle Exponenten r_λ positiv sind, in Fortfall kommen. Die Minimalkurven der Infinitesimalgeometrie sind offenbar spezielle Fälle von Nullkurven. Die durch einen Punkt hindurch gelegten reellen Null- und Polkurven teilen die Umgebung des Punktes in eine Anzahl von Winkelräumen, die im Sinne der Analysis Situs unterschieden werden müssen, weil das Variationsproblem in den verschiedenen Räumen verschiedenen Charakter besitzt. In jedem Falle ergibt die Formel (11) eine neue Bedeutung der charakteristischen Zahl. Denn wir entnehmen aus ihr den Satz:

„Die charakteristische Zahl ist um Eins kleiner als die Zahl der Null- und Polkurven des Problems und von der Größe der auftretenden Potenzexponenten unabhängig."

Soll also insbesondere $m = 1$, d. h. die Transversalgleichung bilinear in den Differentialen und Variationen sein, so muß φ von der Form:

$$\varphi = (L_0 x' + M_0 y')^{r_0} (L_1 x' + M_1 y')^{r_1} \qquad (r_0 + r_1 = 1) \tag{14}$$

sein. Alsdann lautet die Transversalgleichung:

$$(E\,dx + F\,dy)\delta x + (\overline{F}\,dx + G\,dy)\delta y = 0, \tag{15}$$

worin

$$E = L_0 L_1, \quad F = r_0 L_0 M_1 + r_1 L_1 M_0, \quad \overline{F} = r_0 L_1 M_0 + r_1 L_0 M_1$$
$$G = M_0 M_1$$

gesetzt ist. Soll außerdem die Beziehung zwischen den Differentialen und den Variationen vertauschbar, also die bilineare Gleichung (15) symmetrisch sein, so muß

$$\overline{F} - F = (r_1 - r_0)(L_0 M_1 - L_1 M_0) = 0$$

sein, und da der zweite Faktor dieses Produktes von Null verschieden ist, ergibt sich $r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$. Somit ist alsdann:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{(L_0 x' + M_0 y')(L_1 x' + M_1 y')} \\ &= \sqrt{E x'^2 + 2F x' y' + G y'^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

und das Problem der geodätischen Linien ist hiernach das Einzige, für welches die charakteristische Zahl gleich 1 und die Bedingung der transversalen Lage involutorisch ist. Das Problem tritt aber hier in umfassenderer Gestalt als in der Flächentheorie auf, weil die Bedingung, daß die quadratische Differentialform φ^2 definit ist, in Fortfall kommt. Wir werden demgemäß, wenn wir die Probleme der Variationsrechnung in der hier dargelegten Art klassifizieren und mit dem einfachsten beginnen, auch die Hauptsätze, welche in der Flächentheorie für die erste Fundamentalform gelten, in der Weise weiterzuführen haben, daß sie für indefinite Formen ihre Geltung behalten.

Das hier zugrunde gelegte Einteilungsprinzip steht auch in Zusammenhang mit der Form derjenigen partiellen Differentialrechnung, welche mit dem Probleme der Variationsrechnung verbunden und von Herrn **Kneser** als Verallgemeinerung der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung aufgefaßt worden ist. Wenn man nämlich das längs einer Extremale erstreckte Integral als Funktion der oberen Grenze (x, y) auffaßt, während die untere Grenze entweder fest ist oder auf einer festen Transversalkurve verbleibt, so bedeutet die so definierte Funktion u den „extremalen Abstand" des Punktes (x, y) von einem festen Punkte oder einer gegebenen Kurve, und sie genügt den Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_{x'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_{y'}, \tag{17}$$

in denen die rechten Seiten nur von dem Verhältnis $\frac{y'}{x'}$ abhängen. Eliminiert man diesen Quotienten aus den beiden Gleichungen, so erhält man die oben bezeichnete partielle Differentialgleichung erster Ordnung für u. In diese Elimination und die Natur der resultierenden Gleichung erhalten wir nun vermöge der vorstehenden Betrachtungen einen genaueren Einblick. Wenn man nämlich in der Gleichung des Linienelementes:

$$s' = \varphi(x', y') = (L_0 x' + M_0 y')^{r_0} (L_1 x' + M_1 y')^{r_1} \cdots (L_m x' + M_m y')^{r_m} \tag{11}$$

x, y konstante Werte erteilt und x', y', s' als homogene Koordinaten eines Punktes betrachtet*), so stellt sie eine algebraische Kurve dar, und man kann zu ihr die zugehörige Gleichung in Linienkoordinaten bilden. Nennt man diese Linienkoordinaten ξ, η, σ, so ergibt sich aus (11):

$$\xi : \eta : \sigma = \varphi_{x'} : \varphi_{y'} : -1,$$

und wir erhalten somit den Satz:

„Man gelangt von einer gegebenen Form des Linienelementes zur Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung, wenn man die Gleichung (11) als homogene Gleichung einer Kurve (der Indikatrix) ansieht und in der zugehörigen Tangentialkoordinatengleichung die Quotienten $-\frac{\xi}{\sigma}$ und $-\frac{\eta}{\sigma}$ resp. durch $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ ersetzt. Beide Gleichungen haben also dasselbe Geschlecht."

Bei der Gaußschen Form (16) des Linienelementes ist zum Beispiel:

$$\xi : \eta : \sigma = Ex' + Fy' : Fx' + Gy' : -s',$$

*) Übrigens ist diese Kurve nichts anderes als die *Indikatrix*, welche Herr **Carathéodory** zur Unterscheidung der starken und schwachen Minima benutzt (Diss. Göttingen 1904, S. 69 und Math. Ann. Bd. 62, S. 457).

woraus sich die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung für u durch Elimination von x', y', s' ergibt:

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2F\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + E\frac{\partial u}{\partial y^2} = EG - F^2.$$

Man kann demgemäß auch leicht nach algebraischen Methoden das Geschlecht und den Grad der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung bestimmen. Bringt man nämlich die Exponenten r_h auf den kleinsten gemeinsamen Nenner n:

$$r_h = \frac{g_h}{n} \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

und bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von g_h und n mit

$$e_h = (g_h, n),$$

so besitzt die algebraische Funktion s' von $\frac{y'}{x'}$ nur an den Stellen

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{L_h}{M_h} = \zeta_h$$

Verzweigungspunkte, und bei ζ_h liegen e_h Verzweigungspunkte übereinander, in denen je $\frac{n}{e_h}$ Blätter der Riemannschen Fläche zusammenhängen. Das Geschlecht der Gleichung (11) und der zugehörigen Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung ist somit:

$$p = \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{m}(n - e_h) - n + 1 = \frac{(m-1)n}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{m} e_h.$$

Zur Bestimmung des Grades berücksichtige man, daß nach (12) und (13)

$$\xi : \eta : \sigma = \mathsf{A} : \mathsf{B} : -\frac{U}{\varphi}$$

ist, worin A und B ganze Formen des Grades m in x' und y' sind und

$$\frac{U}{\varphi} = \prod_{h=0}^{h=m}(L_h x' + M_h y')^{1-r_h}$$

ist. Ist also $r_h < 1$, so verschwindet $\frac{U}{\varphi}$ in jedem bei ζ_h gelegenen Verzweigungspunkte in der Ordnung $\frac{n - g_h}{e_h}$, ist aber $r_h > 1$, so wird der Quotient daselbst in dieser Ordnung unendlich; der Grad ν des Quotienten $\frac{\xi}{\sigma}$ und $\frac{\eta}{\sigma}$ wird hiernach:

$$\nu = \sum_{\alpha}(n - g_\alpha) = n\sum_{\alpha}(1 - r_\alpha),$$

wenn die Summe nur über diejenigen Zahlen g_α resp. r_α erstreckt wird, welche kleiner als n resp. 1 sind. Ist das bei allen Zahlen g_α der Fall, d. h. besitzt der Integrand $\varphi(x, y, x', y')$ nur Null-, aber keine Polkurven,

so ist der Grad ν zufolge der Gleichung (10) gleich mn; treten aber Polkurven auf, so ist er größer als mn.

Die charakteristische Zahl, welche wir hier einführten, ist naturgemäß überhaupt bei allen denjenigen Problemen der Variationsrechnung von ausschlaggebender Bedeutung, bei denen von einer Extremalen nur ein Endpunkt fest liegt, während für den anderen eine Kurve als geometrischer Ort gegeben ist. Die Probleme, für welche $m = 1$ ist, sind dann diejenigen, bei denen der extremale Abstand eines Punktes von einer gegebenen Kurve in der Nachbarschaft der Kurve *eindeutig* bestimmt ist, während er für größere Werte der charakteristischen Zahl eine mehrdeutige Funktion des freien Endpunktes wird, selbst wenn dieser auf die nächste Nachbarschaft der gegebenen Kurve beschränkt bleibt.

III. Die extremale Krümmung und die Feldkrümmung.

Von den beiden Begriffen der geodätischen und der Flächenkrümmung, um deren Verallgemeinerung es sich im folgenden handelt, kann der erste in die Variationsrechnung eingeführt werden, ohne daß eine spezielle Annahme über die Art der Abhängigkeit des Integrales s von den Differentialen erforderlich ist. Es genügt zu diesem Zwecke, aus der Variation des Integrales eine Differentialinvariante in ähnlicher Weise abzuleiten, wie das von Lipschitz bei der Gaußschen Form des Linienelementes geschehen ist.

Unterwerfen wir nämlich das Integral

$$s = \int \varphi(x, y, x', y')dt \tag{1}$$

einer Punkttransformation durch die Gleichungen

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

so gehe dasselbe über in

$$s = \int \psi(u, v, u', v')dt, \tag{1a}$$

wobei

$$\begin{aligned} u' &= u_x x' + u_y y' \\ v' &= v_x x' + v_y y' \end{aligned} \tag{2}$$

ist.

Für die Variation δs erhält man alsdann, je nachdem man die Form (1) oder (1a) des Integrales s zugrunde legt, die beiden Ausdrücke

$$\delta s = \int (X\delta x + Y\delta y)dt = \int (U\delta u + V\delta v)dt,$$

wobei

$$(3)\qquad \begin{aligned} X &= \varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{x'}, & U &= \psi_u - \frac{d}{dt}\psi_{u'}, \\ Y &= \varphi_y - \frac{d}{dt}\varphi_{y'}, & V &= \psi_v - \frac{d}{dt}\psi_{v'}, \end{aligned}$$

ist. Da nun

$$\delta u = u_x \delta x + u_y \delta y, \quad \delta v = v_x \delta x + v_y \delta y$$

ist, so folgen die Identitäten:

$$(4)\qquad X = U u_x + V v_x, \quad Y = U u_y + V v_y.$$

Setzt man nun wie im vorigen Abschnitte auf S. 320:

$$(5)\qquad X = y'Z, \quad Y = -x'Z \text{ und } U = v'W, \quad V = -u'W,$$

wobei

$$(6)\qquad \begin{aligned} Z &= \Phi(x'y'' - x''y') + \varphi_{xy'} - \varphi_{yx'}, \\ W &= \Psi(u'v'' - u''v') + \psi_{uv'} - \psi_{vu'} \end{aligned}$$

ist und Ψ in derselben Beziehung zu ψ, wie Φ zu φ steht, so ergibt sich nach (2) und (4):

$$(7)\qquad Z = W(u_x v_y - u_y v_x);$$

d. h. es unterscheiden sich Z und W nur um einen Faktor, der die Determinante der Transformation ist. Um nun aus dem Differentialausdrucke Z eine absolute Invariante zu bilden, berücksichtige man, daß

$$(8)\qquad \begin{aligned} \Phi &= \frac{\varphi_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{\varphi_{x'y'}}{x'y'} = \frac{\varphi_{y'y'}}{x'^2}, \\ \Psi &= \frac{\psi_{u'u'}}{v'^2} = -\frac{\psi_{u'v'}}{u'v'} = \frac{\psi_{v'v'}}{u'^2} \end{aligned}$$

ist, woraus durch zweimalige Differentiation der Identität $\varphi = \psi$ nach x'

$$(9)\qquad \Phi = \Psi(u_x v_y - u_y v_x)^2 \text{*)}$$

folgt. Es ist somit

$$\frac{Z}{\sqrt{\Phi}} = \frac{W}{\sqrt{\Psi}},$$

dieser Quotient also eine *absolute* Invariante bei beliebiger Transformation der Variabeln x, y. Diese Größe hängt aber noch von dem eingeführten Parameter t ab und zwar in der Weise, daß sie den Faktor $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{\frac{3}{2}}$ erhält, wenn man statt des Parameters t eine beliebige Funktion τ von t ein-

*) Man kann leicht zeigen, daß Φ die einzige Differentialkovariante der Form φ ist, welche für *jede Art der Abhängigkeit von* x', y' aufgestellt werden kann. Sie tritt in dieser Theorie an die Stelle der Hesseschen Kovariante, die ja hier identisch verschwindet, weil φ in x', y' von der Dimension 1 ist.

führt. Dividiert man also noch mit $\sqrt{\varphi^3}$, so ist der so entstehende Quotient

$$(10)\qquad \frac{Z}{\sqrt{\Phi\varphi^3}} = \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi^3}}(x'y'' - x''y') + \frac{\varphi_{xy'} - \varphi_{yx'}}{\sqrt{\Phi\varphi^3}} = \frac{1}{\varrho}$$

sowohl von dem eingeführten Parameter unabhängig, als auch bei beliebiger Punkttransformation des Feldes invariant. Diese Größe soll die *extremale Krümmung der Kurve* im Punkte (x, y) genannt werden; sie hängt von den Koordinaten x und y und deren ersten und zweiten Differentialquotienten ab, und sie ist längs einer Extremalen des Integrales beständig gleich Null.

Liegt speziell das Problem der geodätischen Linien vor, so ist

$$(11)\qquad \psi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.$$

Man findet dann leicht

$$(12)\qquad \Psi = \frac{EG - F^2}{\sqrt{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^3}} = \frac{\Delta^2}{\psi^3} \qquad (\Delta^2 = EG - F^2),$$

woraus sich

$$(13)\qquad \frac{ds^3}{\varrho} = \Delta(du\,d^2v - dv\,d^2u)$$

$$+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & \frac{1}{2}E_u du^2 + E_v du dv + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)dv^2 \\ Fdu + Gdv, & \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)du^2 + G_u du dv + \frac{1}{2}G_v dv^2 \end{vmatrix}$$

oder in den Christoffelschen Bezeichnungen

$$(13a)\qquad \frac{1}{\Delta}\frac{ds^3}{\varrho} = (du\,d^2v - dv\,d^2u)$$

$$+ du\left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}du^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}du\,dv + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}dv^2\right)$$

$$- dv\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}du^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}du\,dv + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}dv^2\right)$$

ergibt. Das sind die bekannten Ausdrücke für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve.*)

Das Integral der extremalen Krümmung

$$(14)\qquad G = \int\frac{ds}{\varrho}$$

entsteht hiernach bis auf einen konstanten Faktor ε aus der Variation des Integrales s:

$$\delta s = \int dt(X\delta x + Y\delta y) = \int dt Z(y'\delta x - x'\delta y),$$

*) Vgl. L. Bianchi, Differentialgeometrie S. 154 und L. Schlesinger, Archiv für Math. und Phys. III. Reihe V, 3. und 4. Heft.

indem über die Variationen δx, δy so verfügt wird, daß

(15) $$y'\delta x - x'\delta y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Phi\varphi}}$$

gesetzt wird. Die Variation δs ist hierbei in der Weise gebildet, daß die Grenzen des Integrales, die sich für $t = t_0$ und $t = t_1$ ergeben, fest bleiben; läßt man diese Annahme fallen, so tritt der vom Integralzeichen freie Bestandteil

$$[\varphi_{x'}\delta x + \varphi_{y'}\delta y]_0^1 = [\psi_{u'}\delta u + \psi_{v'}\delta v]_0^1,$$

der auch wieder invariant ist, als Zusatzglied hinzu.

Der Differentialausdruck

(16) $$d\tau = \frac{ds}{\varrho}$$

enthält die Differentiale von x und y bis zur zweiten Ordnung, da aber nach (10) die Differentiale d^2x und d^2y nur linear und in der Verbindung $(dx\,d^2y - dy\,d^2x)$ in ihn eintreten, so kann man von ihm stets ein *vollständiges Differential* $d\Theta$ so absondern, daß die Differenz $d\tau - d\Theta$ nur noch die *ersten* Differentiale dx und dy enthält. Indem wir diese Reduktion analytisch behandeln, gelangen wir zur Einführung des Begriffes „Winkel" und zur Feststellung der Bedingungen, unter denen von einer nur vom Orte abhängigen Krümmung des Feldes gesprochen werden darf.

Ist nämlich

$$\Theta = \Theta(x, y, x', y')$$

eine Funktion des Ortes (x, y) und der Richtung $\frac{y'}{x'}$ und somit in x', y' homogen von der Ordnung Null, so ergibt die Differentiation *bei fest bleibenden Koordinaten* (x, y), die durch d_p bezeichnet sein mag:

$$d_p\Theta = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x'}x'' + \frac{\partial\Theta}{\partial y'}y''\right)dt,$$

und dieses Differential wird mit dem ersten Summanden von $\frac{ds}{\varrho}$, der nach (10) die Form hat:

$$\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\,(x'y'' - x''y')\,dt,$$

identisch, wenn Θ so bestimmt wird, daß:

(17a) $$\frac{\partial\Theta}{\partial x'} = -y'\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y'} = x'\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}$$

ist. Diese Differentialgleichungen sind miteinander verträglich, weil $R = \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}$ in x', y' homogen von der Ordnung -2, also nach Euler

$$-2R = x'\frac{\partial R}{\partial x'} + y'\frac{\partial R}{\partial y'}$$

oder

$$-\frac{\partial}{\partial y'}(y'R) = \frac{\partial}{\partial x'}(x'R)$$

ist. Es ergibt sich also, indem bei festem (x, y) integriert wird,

(17) $$\Theta = \int (x'dy' - y'dx')\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}},$$

und es ist alsdann $d\tau - d\Theta$ ein Differentialausdruck, der nur noch erste Differentiale dx und dy enthält.

Das Integral Θ, gebildet für einen bestimmten Punkt (x, y) und hinerstreckt von einer Richtung $\left(\frac{y'}{x'}\right)_0 = q_0$ bis zu einer Richtung $\left(\frac{y'}{x'}\right)_1 = q_1$, heiße *der Winkel der beiden Richtungen* (q_0, q_1) *im Punkte* (x, y). Die Funktion Θ, die den partiellen Differentialgleichungen (17a) genügt, bleibt zunächst bis auf eine willkürliche Funktion $w(x, y)$ des Ortes unbestimmt, aber der Winkel zweier durch einen Punkt gehender Richtungen ist durch die Gleichung (17) eindeutig bestimmt. Fügt man zu Θ eine solche Funktion $w(x, y)$ hinzu, so bleibt das Differential $d_p\Theta$ hiervon unberührt, aber das Differential $d\Theta$ erhält alsdann einen Zuwachs

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Durch die Funktion $w(x, y)$ wird nämlich, wie später gezeigt werden soll, erst innerhalb des Feldes in jedem Punkte diejenige Richtung festgelegt, von welcher aus der Winkel Θ gezählt werden soll.

Bildet man nun das vollständige Differential

$$d\Theta = \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\,(x'dy' - y'dx') + A\,dx + B\,dy,$$

so sind

(18) $$A = \int (x'dy' - y'dx')\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\right) = \frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

und $$B = \int (x'dy' - y'dx')\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\right) = \frac{\partial\Theta}{\partial y}$$

ebenso wie Θ Funktionen des Ortes (x, y) und der Richtung $\frac{y'}{x'}$, und es ist nach (10) und (16)

$$d\tau = \frac{ds}{\varrho} = d\Theta + \left(\frac{\varphi_{xy'} - \varphi_{yx'}}{\sqrt{\Phi\varphi}} - Ax' - By'\right)dt,$$

oder

(19) $$d\tau = d\Theta + S\,dt,$$

wo

$$S = \frac{\varphi_{xy'} - \varphi_{yx'}}{\sqrt{\Phi\varphi}} - \Theta_x x' - \Theta_y y'$$

gesetzt ist.

Der Differentialausdruck S, der, ebenso wie φ, von x, y, x', y' abhängig und in x', y' homogen von der Ordnung Eins ist, *ist eine aus φ abgeleitete Differentialkovariante*, denn weil die extremale Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und der Winkel Θ invariante Bedeutung haben, so gilt das gleiche auch von dem Integrale $\int S dt$, und die nochmalige Variation des Integrales $G = \int \frac{ds}{\varrho}$ stimmt bis auf integrable Bestandteile mit der Variation des Integrales $\int S dt$ überein.

Eine weitere Reduktion des Ausdruckes S ist, solange nicht Bestimmungen über die Art der Abhängigkeit der Funktion φ von den Größen x', y' getroffen sind, nicht möglich. Ein besonderes Interesse nimmt nun aber der Fall in Anspruch, daß S in x', y' *linear*, also

(21) $$S = Px' + Qy'$$

ist, wo P und Q Funktionen des Ortes allein sind. Bei dieser Annahme allein darf von einer *Krümmung des Feldes* gesprochen werden, falls dieselbe eine von der Richtung unabhängige Größe sein soll.

Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, so ist, wie vorher gezeigt wurde, der Ausdruck S eine in x' und y' lineare Differentialkovariante; wenn also die Größen M und N in derselben Weise aus der Differentialform ψ abgeleitet werden, wie P und Q aus φ gebildet sind, so unterscheiden sich die beiden Linearformen:

$$Pdx + Qdy \quad \text{und} \quad Mdu + Ndv$$

nur um ein vollständiges Differential einer Ortsfunktion. Hieraus folgt nach bekannter Methode die Relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

und wenn $\bar{I}(\varphi)$ eine nur aus den Koeffizienten der Differentialform φ gebildete algebraische Invariante vom Gewichte Eins ist, so ist der Quotient

$$\frac{P_y - Q_x}{\bar{I}(\varphi)} = \frac{M_v - N_u}{\bar{I}(\psi)}$$

eine bloße Funktion des Ortes und eine absolute Invariante. Wählen wir die Invariante I insbesondere so, daß

(22) $$I(dx\delta y - dy\delta x) = d\omega$$

als Inhaltsmaß des Flächenelementes erklärt werden kann, welches zum Punkte (x, y) und den Differentialen (dx, dy) und $(\delta x, \delta y)$ gehört, so werde nunmehr

$$K = \frac{P_y - Q_x}{I} \tag{23}$$

als *die Krümmung des Feldes im Punkte* (x, y) definiert. Nach Einführung dieses Begriffes wird die Totalkrümmung T eines Gebietes $\mathfrak{G}$ das Flächenintegral

$$T = \int_{\mathfrak{G}} K d\omega = \iint_{\mathfrak{G}} (P_y - Q_x)(dx\delta y - dy\delta x), \tag{24}$$

und dieses ist nach dem Greenschen Satze zurückgeführt auf das über die Berandung $\mathfrak{R}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ erstreckte Integral

$$-\int_{\mathfrak{R}} (P dx + Q dy) = -\int_{\mathfrak{R}} S dt$$

und somit nach (19) darstellbar als die Differenz der beiden Integrale

$$G = \int_{\mathfrak{R}} d\tau = \int_{\mathfrak{R}} \frac{ds}{\varrho} \quad \text{und} \quad \Sigma = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta, \tag{25}$$

von denen das erste das Integral der extremalen Krümmung in (14) ist, das zweite der *„sphärische Exzeß der Begrenzung* $\mathfrak{R}$*"* heißen möge, weil es die natürliche Verallgemeinerung der unter diesem Namen in der Flächentheorie auftretenden Größe ist. Das Resultat dieser Betrachtung, deren Ziel es war, den Umfang des der Krümmungstheorie zugänglichen Gebietes abzugrenzen, ist hiernach der Satz:

> „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei einem Probleme der Variationsrechnung eine nur vom Orte abhängige Krümmung des Feldes eingeführt werden kann, besteht darin, daß der Differentialausdruck $S dt = d\tau - d\Theta$ in der Gleichung (19) in dx, dy linear ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Totalkrümmung eines Gebietes
>
> $$T = \Sigma - G, \tag{25a}$$
>
> wobei Σ der sphärische Exzeß der Begrenzung, G das in positivem Sinne über die Begrenzung erstreckte Integral der extremalen Krümmung ist".

Es soll nun zur Ergänzung dieses Satzes gezeigt werden, daß die hier auftretende notwendige und hinreichende Bedingung, wenn wir die Klassifikation des vorigen Abschnittes für die Probleme der Variationsrechnung zugrunde legen, *für den Fall* $m = 1$ *stets, hingegen für größere Werte von* m *im allgemeinen nicht erfüllt ist.*

I. Es sei nämlich

$$\varphi = (L_0 x' + M_0 y')^{r_0} (L_1 x' + M_1 y')^{r_1} \qquad (r_0 + r_1 = 1); \tag{26}$$

dann erhält man durch logarithmische Differentiation nach x' und y':

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{x'}}{\varphi} &= \frac{r_0 L_0}{L_0 x' + M_0 y'} + \frac{r_1 L_1}{L_1 x' + M_1 y'}, \\ \frac{\varphi_{y'}}{\varphi} &= \frac{r_0 M_0}{L_0 x' + M_0 y'} + \frac{r_1 M_1}{L_1 x' + M_1 y'}. \end{aligned} \tag{27}$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich für die Größe Φ in (8) nach leichter Zwischenrechnung mit Rücksicht auf die Gleichung $r_0 + r_1 = 1$:

$$\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}} = \sqrt{-r_0 r_1}\, \frac{L_0 M_1 - L_1 M_0}{(L_0 x' + M_0 y')(L_1 x' + M_1 y')}. \tag{28}$$

Demgemäß wird der Winkel Θ in (17) durch das folgende nach $\frac{y'}{x'}$ auszuführende Integral bestimmt:

$$\begin{aligned} \Theta &= \sqrt{-r_0 r_1} \int \frac{(L_0 M_1 - L_1 M_0)(x' dy' - y' dx')}{(L_0 x' + M_0 y')(L_1 x' + M_1 y')} \\ &= \sqrt{-r_0 r_1} \log \frac{L_1 x' + M_1 y'}{L_0 x' + M_0 y'}. \end{aligned} \tag{29}$$

Durch Einführung des Winkels Θ erhalten die vier Ableitungen $\varphi_{x'}$, $\varphi_{y'}$, φ_x, φ_y, einfachere Gestalten, durch welche die Bildung des Ausdruckes S erleichtert wird. Es ist nämlich zufolge der letzten Gleichung, wenn $\sqrt{-r_0 r_1} = \alpha$ gesetzt wird:

$$\frac{L_1 x' + M_1 y'}{\varphi} = e^{\frac{r_0 \Theta}{\alpha}},$$

$$\frac{L_0 x' + M_0 y'}{\varphi} = e^{-\frac{r_1 \Theta}{\alpha}},$$

also werden die Gleichungen (27):

$$\begin{aligned} \varphi_{x'} &= r_0 L_0 e^{\frac{r_1 \Theta}{\alpha}} + r_1 L_1 e^{-\frac{r_0 \Theta}{\alpha}}, \\ \varphi_{y'} &= r_0 M_0 e^{\frac{r_1 \Theta}{\alpha}} + r_1 M_1 e^{-\frac{r_0 \Theta}{\alpha}}, \end{aligned} \tag{30}$$

Ebenso erhält man durch logarithmische Differentiation der Gleichung (26) nach x und y:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= r_0 \left(\frac{\partial L_0}{\partial x} x' + \frac{\partial M_0}{\partial x} y'\right) e^{\frac{r_1 \Theta}{\alpha}} + r_1 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} x' + \frac{\partial M_1}{\partial x} y'\right) e^{-\frac{r_0 \Theta}{\alpha}}, \\ \varphi_y &= r_0 \left(\frac{\partial L_0}{\partial y} x' + \frac{\partial M_0}{\partial y} y'\right) e^{\frac{r_1 \Theta}{\alpha}} + r_1 \left(\frac{\partial L_1}{\partial y} x' + \frac{\partial M_1}{\partial y} y'\right) e^{-\frac{r_0 \Theta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{31}$$

Bildet man hiernach den Ausdruck in (3) und (5)

$$\varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{x'} = y' Z,$$

so erhält man nach gehöriger Reduktion und Berücksichtigung von (28)

$$(32)\qquad Z = r_0\left(\frac{\partial M_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial y}\right) e^{\frac{r_1 \Theta}{\alpha}} - r_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right) e^{-\frac{r_0\Theta}{\alpha}} + \sqrt{\Phi\varphi}\,\frac{d\Theta}{dt}$$

Nach (10) ist nun

$$\frac{Z}{\sqrt{\Phi\varphi}} = \frac{\varphi}{\varrho} = \frac{ds}{\varrho\, dt},$$

also erhält man:

$$\frac{ds}{\varrho} = d\Theta + \frac{r_0\left(\frac{\partial M_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial y}\right)dt}{(L_0 x' - M_0 y')\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}} + \frac{r_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right)dt}{(L_1 x' + M_1 y')\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}}$$

oder nach (28)

$$(33)\ \frac{ds}{\varrho} = d\Theta + \frac{r_0}{\alpha}\,\frac{\left(\frac{\partial M_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial y}\right)(L_1 dx + M_1 dy)}{L_0 M_1 - L_1 M_0} + \frac{r_1}{\alpha}\,\frac{\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right)(L_0 dx + M_0 dy)}{L_0 M_1 - L_1 M_0}.$$

Es ist also in der Tat die Differenz:

$$\frac{ds}{\varrho} - d\Theta = S dt$$

in dx, dy linear und gleich

$$P dx + Q dy,$$

wobei

$$(34)\qquad \begin{aligned} P &= \frac{r_0\left(\frac{\partial M_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial y}\right)L_1 + r_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right)L_0}{\sqrt{-r_0 r_1}\,(L_0 M_1 - L_1 M_0)} \\ Q &= \frac{r_0\left(\frac{\partial M_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial y}\right)M_1 + r_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right)M_0}{\sqrt{-r_0 r_1}\,(L_0 M_1 - L_1 M_0)} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Es existiert somit in diesem Falle, wie auch die Koeffizienten L_h und M_h der Form φ gewählt sein mögen, stets eine Feldkrümmung K, und zwar ist dieselbe, da die einzige Invariante vom Gewichte Eins die Determinante

$$J = L_0 M_1 - L_1 M_0$$

ist,

$$(35)\qquad K = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{L_0 M_1 - L_1 M_0}.$$

Die Umrechnung dieser Größe in die üblichen Formen, die für die Annahme $r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$ der Exponenten eintreten kann, soll später erfolgen.

II. Es sei

$$\varphi = \sqrt[n]{Ex'^n + Gy'^n} \tag{36}$$

oder

$$ds^n = Edx^n + Gdy^n,$$

wo E und G beliebige Funktionen von x und y sind. Dann ist

$$\varphi_{x'} = E\left(\frac{dx}{ds}\right)^{n-1}, \qquad \varphi_{y'} = G\left(\frac{dy}{ds}\right)^{n-1},$$

woraus sich durch nochmalige Differentiation nach x'

$$\sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}} = \frac{\sqrt{(n-1)EG}\,(x'y')^{\frac{n}{2}-1}}{Ex'^n + Gy'^n}$$

ergibt. Es ist somit

$$\Theta = \int \frac{\sqrt{(n-1)EG}\,(x'y')^{\frac{n}{2}-1}(x'dy' - y'dx')}{Ex'^n + Gy'^n} = \frac{2\sqrt{n-1}}{n} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Gy'^n}{Ex'^n}}.$$

Setzt man hiernach $\alpha = \frac{n}{2\sqrt{n-1}}$, so wird

$$\operatorname{tg}^2 \alpha\Theta = \frac{G}{E}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad \cos^2 \alpha\Theta = E\left(\frac{dx}{ds}\right)^n, \qquad \sin^2 \alpha\Theta = G\left(\frac{dy}{ds}\right)^n.$$

Somit ergibt sich für die Ableitungen der Funktion φ:

$$\varphi_x = \frac{1}{n}\,\frac{E_x x'^n + G_x y'^n}{s'^{n-1}}, \quad \varphi_y = \frac{1}{n}\,\frac{E_y x'^n + G_y y'^n}{s'^{n-1}}$$

und

$$\varphi_{x'} = \sqrt[n]{E} \cos^{\frac{2(n-1)}{n}} \alpha\Theta, \quad \varphi_{y'} = \sqrt[n]{G} \sin^{\frac{2(n-1)}{n}} \alpha\Theta.$$

Bildet man nunmehr

$$\frac{\varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{x'}}{y'} = Z,$$

so findet man

$$Z = \frac{1}{n}\,\frac{G_x y'^{n-1} - E_y x'^{n-1}}{s'^{n-1}} + \sqrt{\Phi\varphi}\,\frac{d\Theta}{dt}.$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{Z\,dt}{\sqrt{\Phi\varphi}} = \frac{ds}{\varrho} = d\Theta + \frac{1}{n}\,\frac{G_x y'^{n-1} - E_y x'^{n-1}}{\sqrt{(n-1)EG}\,(x'y')^{\frac{n}{2}-1}}\,dt.$$

Man erkennt hieraus, daß das Differential

$$\frac{ds}{\varrho} - d\Theta$$

nur im Falle $n = 2$, in dem die charakteristische Zahl $m = 1$ ist, *bei beliebiger Wahl der Funktionen E und G* in dx, dy linear wird; ist n

hingegen > 2, also $m > 1$, so wird das Differential vom höheren Grade, es sei denn, daß E eine Funktion von x allein und G eine Funktion von y allein wird. Nur in diesen ganz partikulären Fällen könnte also von einer allein vom Orte abhängigen Krümmung die Rede sein, während bei allgemeiner Annahme der Funktionen E und G eine nicht von der Richtung, sondern nur vom Orte abhängige Feldkrümmung jedenfalls nicht existieren kann.

IV. Der Winkel zweier Richtungen.*)

Es soll nunmehr der durch die Formel (17) des vorigen Abschnittes

(1) $$d_p\Theta = \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\,(x'dy' - y'dx')$$

eingeführte „Winkel" zweier Richtungen näher diskutiert werden. Diese Untersuchung ist nach verschiedenen Gesichtspunkten zu führen. Erstens ist es von vornherein ersichtlich, daß unser Winkel in Zusammenhang mit der Weierstraßschen E-Funktion stehen muß, die ja auch von dem Unterschiede zweier Richtungen abhängt. Sodann aber sind die Unstetigkeiten und die Periodizitätseigenschaften der Funktion Θ zu erörtern. Schließlich bleibt, da die Funktion $\Theta(x, y, x', y')$ nur bis auf eine Funktion der Koordinaten allein durch die Gleichung (1) definiert ist, auch noch die geometrische Bedeutung der so verbliebenen Unbestimmtheit zu ermitteln.

1. Die Weierstraßsche Funktion E ist für zwei verschiedene von demselben Punkte (x, y) ausgehende Richtungen (x', y') und $(\bar{x}', \bar{y}')$ gegeben durch:

(2) $$\begin{aligned} E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = \bar{x}'(\varphi_{x'}(x, y; \bar{x}', \bar{y}') - \varphi_{x'}(x, y; x', y')) \\ + \bar{y}'(\varphi_{y'}(x, y; \bar{x}', \bar{y}') - \varphi_{y'}(x, y; x', y')). \end{aligned}$$

Nimmt man nun die beiden Richtungen als benachbart an, indem man

$$\bar{x}' = \xi, \quad \bar{y}' = \eta, \qquad x' = \xi + d\xi, \quad y' = \eta + d\eta$$

setzt, und entwickelt die Klammergrößen nach Taylor bis auf Größen, die von dritter Ordnung unendlich klein sind, so erhält man:

$$\begin{aligned} &- E(x, y; \xi + d\xi, \eta + d\eta; \xi, \eta) \\ &= \xi\left(\varphi_{\xi\xi}d\xi + \varphi_{\xi\eta}d\eta + \tfrac{1}{2}\varphi_{\xi\xi\xi}d\xi^2 + \varphi_{\xi\xi\eta}d\xi\,d\eta + \tfrac{1}{2}\varphi_{\xi\eta\eta}d\eta^2\right) \\ &+ \eta\left(\varphi_{\eta\xi}d\xi + \varphi_{\eta\eta}d\eta + \tfrac{1}{2}\varphi_{\eta\xi\xi}d\xi^2 + \varphi_{\eta\xi\eta}d\xi\,d\eta + \tfrac{1}{2}\varphi_{\eta\eta\eta}d\eta^2\right), \end{aligned}$$

*) Vgl. hierzu G. A. Bliss, A generalization of the notion of angle. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 7, S. 184—196 (1906), wo für definite Bogenelemente eine als Winkel bezeichnete Größe eingeführt wird; dieselbe ist aber nicht mit der hier definierten Größe identisch, wiewohl sie in speziellen Fällen mit ihr übereinkommen kann.

wobei die Indizes immer Differentiationen nach den letzten beiden Argumenten der Funktion $\varphi(x, y; \xi, \eta)$ bedeuten. Nun ist nach Euler

$$\varphi_{\xi\xi}\xi + \varphi_{\xi\eta}\eta = 0, \quad \varphi_{\eta\xi}\xi + \varphi_{\eta\eta}\eta = 0,$$

so daß die Glieder erster Ordnung in Fortfall kommen, und

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi\xi\xi}\xi + \varphi_{\xi\xi\eta}\eta &= -\varphi_{\xi\xi} = -\Phi\eta^2 \\ \varphi_{\xi\eta\xi}\xi + \varphi_{\xi\eta\eta}\eta &= -\varphi_{\xi\eta} = \Phi\xi\eta \\ \varphi_{\eta\eta\xi}\xi + \varphi_{\eta\eta\eta}\eta &= -\varphi_{\eta\eta} = -\Phi\xi^2, \end{aligned}$$

also ergibt sich

$$E(x, y; \xi + d\xi, \eta + d\eta; \xi, \eta) = \frac{1}{2}\Phi(\eta\, d\xi - \xi\, d\eta)^2, \tag{3}$$

oder bei Einführung des Differentiales $d\Theta$:

$$E(x, y; \xi + d\xi, \eta + d\eta; \xi, \eta) = \frac{1}{2}\varphi\, d\Theta^2. \tag{3a}$$

Bei kleinen Richtungsunterschieden ist also die Weierstraßsche E-Funktion unendlich klein von zweiter Ordnung und dem Quadrate des Winkels $d\Theta$ der beiden Nachbarrichtungen proportional; der Proportionalitätsfaktor von $2E\,dt$ ist das Bogenelement $ds = \varphi\, dt$.

Bei endlichen Richtungsunterschieden treten aber die beiden Größen E und Θ in keinen Zusammenhang und die nachfolgende Untersuchung wird zur Genüge zeigen, daß sie wesensungleich sind, indem der Winkel ein wirkliches Maß für den Richtungsunterschied darstellen soll, während die Weierstraßsche Funktion eine Streckendifferenz ist, die auch von dem Winkel der beiden Strecken abhängig wird; nur für Nachbarrichtungen läßt sich die zweite Funktion auf die erste zurückführen.

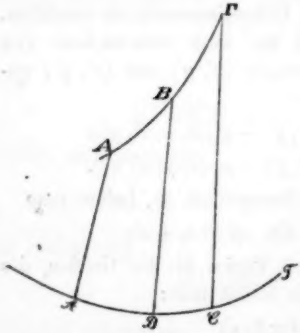


Fig. 2.

Solche Verhältnisse liegen nun aber vor, wenn eine Schar von Extremalen eine Kurve einhüllt, und daher lassen sich auch die Sätze, welche Herr Kneser (l. c. §§ 24—26) über solche Enveloppen abgeleitet hat, aus der letzten Gleichung gewinnen. In der Tat ist ja (s. Figur 2), wenn eine Schar von Extremalen $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$, $C\Gamma$, $\cdots$ durch eine Kurve $\mathfrak{T} = ABC\cdots$ transversal geschnitten wird, die Weierstraßsche Funktion E geometrisch definiert durch

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}')dt = A\mathsf{A} + \mathsf{AB} - B\mathsf{B},$$

wobei AB ein Bogenelement einer Schnittkurve und $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$ die Längen

der zugehörigen Extremalen bedeuten und die Argumente x, y; x', y' und $\bar{x}', \bar{y}'$ sich der Reihe nach auf den Punkt A und die Richtungen der beiden Kurven $\mathsf{A}\mathit{A}$ und AB in ihm beziehen. Hüllen nun die Extremalen $\mathit{A}\mathsf{A}$, $\mathit{B}\mathsf{B}$, $\mathit{C}\Gamma$, $\cdots$ eine Kurve $\mathfrak{E} = \mathsf{AB}\Gamma\cdots$ ein, so ist längs der Kurve $\mathfrak{E}$ $d\Theta$ und also nach der Gleichung (3a) auch $E = 0$ und somit

$$\mathsf{AB} = \mathit{B}\mathsf{B} - \mathit{A}\mathsf{A},$$

und diese Gleichung gilt nunmehr offenbar auch, wenn A und B einen endlichen Abstand voneinander haben. Die letzte Relation ist aber eben die Verallgemeinerung der zwischen dem Bogen der Evolute und dem Krümmungsradius der Evolvente bestehenden Beziehung, welche Herr Kneser zum Beweise dafür benutzt, daß das Minimum in den extremalen Brennpunkten, resp. in den konjugierten Punkten aufhört.

2. Zur Feststellung der Form des Integrales, durch welches der Winkel Θ dargestellt wird, gehen wir auf die Gleichungen (13) des zweiten Kapitels zurück, nach welchen

$$\frac{\varphi_{x'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{r_h L_h}{L_h x' + M_h y'}, \quad \frac{\varphi_{y'}}{\varphi} = \sum_{h=0}^{m} \frac{r_h M_h}{L_h x' + M_h y'}$$

ist. Durch Differentiation folgt hieraus

$$\frac{\varphi_{x'x'}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_{x'}}{\varphi}\right)^2 = -\sum_{h=0}^{m} \frac{r_h L_h^2}{(L_h x' + M_h y')^2},$$

und da $\varphi_{x'x'} = y'^2 \Phi$ ist, so ergibt sich nach einfacher Zwischenrechnung:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\Phi}{\varphi} = -\sum_{(g,h)} \frac{r_g r_h (L_g M_h - L_h M_g)^2}{(L_g x' + M_g y')^2 (L_h x' + M_h y')^2} \equiv S,$$

wobei die Summe über alle $\frac{m(m+1)}{2}$ Kombinationen (g, h) der beiden Indizes erstreckt ist. Das Integral

$$\text{(5)} \qquad \Theta = \int \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\,(x'dy' - y'dx') = \int \sqrt{S}\,(x'dy' - y'dx')$$

ist hiernach im allgemeinen ein hyperelliptisches Integral, welches aber, wie schon die Gleichung (28) des vorigen Abschnittes zeigte, unter gewissen Bedingungen (z. B. stets für $m = 1$) rational werden kann. Zuweilen ist es zweckmäßiger, dieses Integral in nicht homogener Form darzustellen. Setzt man nämlich

$$-\frac{M_h}{L_h} = \zeta_h \quad \text{und} \quad R(z) = \sum_{h=0}^{m} \frac{r_h}{z - \zeta_h},$$

so ergibt sich Θ auch in der Form:

(5a)
$$\Theta = \int dz \sqrt{R'(z) + R(z)^2},$$

und wenn wir das Bogenelement in die Form:

$$ds = f(x, y, p)dx \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

setzen, so findet man

(5b)
$$\Theta = \int_{p_0}^{p_1} dp \sqrt{\frac{f_{pp}}{f}}.$$

Da der Zähler der unter dem Wurzelzeichen stehenden rationalen Funktion im allgemeinen, wie die Formel (4) zeigt, den Grad $2(m-1)$ hat, so ist das Geschlecht des hyperelliptischen Gebildes gleich $m-2$, falls $m > 1$ ist.

Bei Bestimmung der Unstetigkeiten des Integrales Θ sind die Fälle $m = 1$ und $m > 1$ zu sondern. Ist $m = 1$, so gilt die Formel (29) des vorigen Abschnittes:

(6)
$$\Theta = \sqrt{-r_0 r_1} \log \frac{L_1 x' + M_1 y'}{L_0 x' + M_0 y'},$$

es besitzt also Θ zwei logarithmische Unstetigkeiten, die den Null- und Polkurven des Bogenelementes ds entsprechen. Ist insbesondere $r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$ und wird

(7)
$$(L_0 x' + M_0 y')(L_1 x' + M_1 y') = Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2$$

gesetzt, so ist

(8)
$$\Theta = \frac{i}{2} \log \frac{Ex' + (F - \sqrt{F^2 - EG})y'}{Ex' + (F + \sqrt{F^2 - EG})y'}.$$

Ist also die quadratische Form (7) definit und somit $\Delta^2 = EG - F^2$ positiv, so wird Θ reell und gleich

(9)
$$\Theta = \arccos \frac{E\,dx + F\,dy}{\sqrt{E}\,ds} = \arcsin \frac{\Delta\,dy}{\sqrt{E}\,ds}.$$

Ist hingegen die Form (7) indefinit, also $-D^2 = EG - F^2$ negativ, so ist Θ rein imaginär und gleich

(10)
$$\Theta = \frac{1}{2} i \log \frac{E\,dx + (F + D)\,dy}{E\,dx + (F - D)\,dy} = i \log \frac{E\,dx + (F + D)\,dy}{\sqrt{E}\,ds}.$$

Ist andererseits $m \geq 2$, so enthält das Integral Θ eine Quadratwurzel, und die Stellen $z = \zeta_h$, die den Null- und Polkurven

$$L_h x' + M_h y' = 0$$

entsprechen, sind logarithmische Unstetigkeiten des Integrales.

Für $m > 1$ ist also das Integral (5) *ein hyperelliptisches Integral dritter Gattung vom Geschlechte* $(m-2)$ *mit* $2(m+1)$ *singulären Punkten, die paarweise mit entgegengesetzt gleichen Residuen auf der zugehörigen Riemannschen Fläche übereinander liegen.* Die Residuen der beiden bei $z = \zeta_h$ gelegenen singulären Stellen sind $\pm\sqrt{r_h(r_h-1)}$, wie unmittelbar aus Gleichung (5a) festgestellt werden kann.

Da das Integral Θ bei unserer Untersuchung über einen Teil der reellen Achse zu erstrecken ist, so ergeben sich für die Ausführung dieser Integration gar keine Hindernisse, falls die Null- und Polkurven, die ja den Stellen $z = \zeta_h$ entsprechen, sämtlich imaginär sind. Falls aber ein Teil dieser Kurven reell ausfällt, so wird man zur Vermeidung der Integrationshemmungen auf der reellen Achse am einfachsten die zugehörigen Stellen $z = \zeta_h$ bei der Integration durch kleine nach unten gewölbte Halbkreise umgehen und berücksichtigen, daß das Integral, um einen solchen Halbkreis erstreckt, den Wert $\pi i\sqrt{r_h(r_h-1)}$ erhält. Der Winkel zweier Richtungen hat, wenn die Integrale (5) nur über die reelle Achse erstreckt werden, nur dann einen Sinn, wenn die beiden Werte von $z = \frac{x'}{y'}$, zwischen denen das Integral (5a) erstreckt ist, auf einem undurchbrochenen Teile der reellen Achse gelegen sind, oder in anderer Ausdrucksweise, wenn die beiden Richtungen der Schenkel des Winkels nicht durch eine reelle Null- oder Polkurve getrennt werden. Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so können und wollen wir das Integral (5) in der eben dargelegten Weise als komplexes Integral verstehen, wodurch es nunmehr eindeutig bestimmt ist und endlich bleibt.

Durch die an sich willkürliche Festsetzung, welche wir über den Integrationsweg von Θ getroffen haben, wird auch eine Entscheidung darüber herbeigeführt, in welcher Weise die verschiedenen Zweige der im allgemeinen mehrdeutigen Funktion φ, die das Bogenelement darstellt, sich beim Passieren der Stellen $z = \zeta_h$ ineinander fortsetzen sollen. Wenn zunächst die Stellen ζ_h sämtlich komplex sind, so wird φ längs der reellen Achse weder Null noch unendlich und besitzt also ein festes Vorzeichen, etwa das positive. Die Funktion nimmt also auch für die entgegengesetzten Richtungen (dx, dy) und $(-dx, -dy)$ gleiche Werte an und es ist somit, wenn wir die Terminologie des Herrn Hamel*) benutzen, das starke Monodromieaxiom der Ebene erfüllt. Wenn hingegen eine oder mehrere der Stellen ζ_h reell sind, so erhält die Funktion φ bei Überschreitung einer solchen Stelle den Faktor $e^{\pi i r_h}$; in den verschiedenen Winkelräumen, in welche die Ebene vermöge der Pol- und Nullkurven durch

*) Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Ann. Bd. 57, 1903.

den Punkt (x, y) zerlegt wird, unterscheiden sich also die Linienelemente durch das Hinzutreten komplexer Faktoren von der Form $e^{\pi i \alpha}$, die gewissermaßen als heterogene Einheiten dazu dienen, den verschiedenartigen Charakter des Linienelements in den verschiedenen Winkelräumen zum Ausdruck zu bringen. Hiernach muß alsdann in jedem einzelnen Falle festgestellt werden, welche Änderung das Linienelement erfahren hat, wenn $p = \frac{y'}{x'}$ die ganze reelle Achse durchlaufen hat, und welche Art von Monodromieaxiom erfüllt ist, d. h. nach wievielmaliger solcher Drehung das Linienelement seinen ursprünglichen Wert annimmt. In jedem Falle aber ist die Periode des Integrals Θ:

$$(11) \qquad \omega = \int_{-\infty}^{-\infty} \sqrt{\frac{\Phi}{\varphi}}\,(x'dy' - y'dx')$$

der Zuwachs, welchen der Winkel beim Übergang durch Drehung von einer Richtung zur entgegengesetzten erfährt.

In diesem Zusammenhange mag noch darauf hingewiesen werden, daß nach Einführung des Begriffes „Winkel" die extremale Krümmung einer Kurve in neuer Weise definiert werden kann. Stellt man nämlich neben die Gleichung (19) des vorigen Abschnittes:

$$d\tau = d\Theta + S dt$$

eine zweite, indem man an die betrachtete Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkte (x, y) eine extremale Tangente legt, so ist für diese zufolge der Differentialgleichung der Extremalen:

$$d_1\tau = d_1\Theta + S dt = 0,$$

also ist

$$d\tau = d\Theta - d_1\Theta,$$

und hier ist die Differenz $d\Theta - d_1\Theta$ nichts anderes als der extremale Kontingenzwinkel, den die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkte (x, y) mit ihrer extremalen Tangente bildet. Es folgt also:

Das Differential $d\tau = \frac{ds}{\varrho}$ *ist der extremale Kontingenzwinkel der Kurve,* d. i. *der Winkel zweier konsekutiver, die Kurve tangierender Extremalen.*

3. Die bisherigen Ausführungen über den Winkel zweier Richtungen erfolgten unter der Voraussetzung, daß beide von demselben Punkte ausgehen; in diesem Falle ist es gleichgültig, welche unter den möglichen Bestimmungen über die Funktion $\Theta(x, y; x', y')$ getroffen wird. Anders hingegen liegt die Sache, wenn es sich um den Winkel zweier Richtungen handelt, welche im Anfangspunkte P und im Endpunkte P_1 eines Bogens

$\mathfrak{B} = PP_1$ auftreten; in diesem Falle ist der Winkel der beiden Richtungen das über den Bogen $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral:

$$\int_{\mathfrak{B}} d\Theta = \Theta(x_1, y_1;\ x_1', y_1') - \Theta(x, y;\ x', y'), \tag{12}$$

wobei sich die Argumente x, y, x', y' und x_1, y_1, x_1', y_1' resp. auf die Punkte P und P_1 beziehen. Ändert man nämlich die Funktion Θ um eine willkürliche, aber eindeutige Funktion $u(x, y)$ des Ortes, was zulässig ist, so erfährt auch das Integral eine Änderung $u(x_1, y_1) - u(x, y)$. Trifft man über die Funktion Θ eine bestimmte Verfügung, so ergibt die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Theta(x, y;\ x', y') = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta\left(x, y;\ 1, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

die Schar derjenigen Kurven, längs deren Θ verschwindet und von denen ab der Winkel Θ gezählt werden muß.

Ist aber der Bogen $\mathfrak{B}$ eine geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$, welche wir der Einfachheit halber als Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, von singulären Punkten freien Flächenstückes annehmen wollen, dann erhält das zu ihm gehörige Integral (12) offenbar wieder denselben Wert, gleichgültig, welche der möglichen Bestimmungen wir über die Funktion Θ treffen.

Im übrigen sind bei der Berechnung derartiger Randintegrale

$$\sum = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta,$$

welche im vorigen Abschnitte kurz als „sphärischer Exzeß" der Begrenzung bezeichnet worden sind, zwei Fälle wohl voneinander zu unterscheiden, je nachdem nämlich zu dem Linienelemente φdt reelle Pol- und Nullkurven gehören oder nicht.

Ist zunächst das Linienelement definit, die Pol- und Nullkurven also imaginär, so kann jede beliebige geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$ als Begrenzung auftreten, und wenn dieselbe keine Ecken hat, so ist das zugehörige Integral

$$\sum = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta = 2\omega, \tag{13}$$

wobei ω die in (11) definierte Periode des Integrals ist.

In der Tat ist die Größe Σ von der Form der Begrenzungskurve alsdann ganz unabhängig, denn da das Integral ausführbar ist, so ist die einer Änderung der Begrenzung entsprechende Variation

$$\delta \int d\Theta = 0;$$

der Integralwert bleibt also derselbe, wenn die Randkurve auf einen Punkt im Innern zusammengezogen wird. Treten hingegen auf der Begrenzungskurve n Ecken auf, so beweist man in gleicher Art, daß das in positivem Sinn herumgeführte Integral

$$\sum = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta = 2\omega - A \tag{13a}$$

ist, wo A die Summe der Außenwinkel bedeutet. An Stelle der Außenwinkel kann man natürlich auch die Summe W der Innenwinkel einführen, wodurch man, da $W + A = n\omega$ ist,

$$\sum = W - (n-2)\omega$$

erhält und somit für $\omega = \pi$ auf die übliche Form des sphärischen Exzesses kommt.

Wesentlich andere Verhältnisse treten ein, wenn *reelle* Pol- und Nullkurven existieren. Das Integral Σ darf alsdann überhaupt nur über solche Kurven erstreckt werden, die in keinem ihrer Punkte von einer Pol- oder Nullkurve berührt werden, weil derartige Stellen logarithmische Unstetigkeitspunkte des Winkelintegrales herbeiführen. Man hat also in diesem Falle festzustellen, welche Bedingungen der Kurve $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{R}$ aufzuerlegen sind, damit diese Voraussetzung erfüllt sei. Es erscheint aber angezeigt, diese eigentümlichen Lageneigenschaften der Kurven für jede Form des Linienelements besonders zu untersuchen, da die Besonderheit der auftretenden Bedingungen erst so einer vollständigen Diskussion fähig wird.

V. Definite und indefinite Gaußsche Formen des Linienelementes.

Es sollen jetzt noch die erlangten Resultate auf die Gaußsche Form des Linienelementes:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

angewandt und hierbei vor allem der bisher noch nicht untersuchte Fall berücksichtigt werden, daß die quadratische Form ds^2 indefinit, also $EG - F^2$ negativ ist.

I. Ist die Form definit, also

$$\Delta^2 = EG - F^2 \tag{2}$$

positiv, so sind die Formeln für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ und den Winkel Θ auf S. 329 in (13) und S. 340 in (9) gegeben, und es gilt die Hauptgleichung:

$$\frac{ds}{\varrho_g} = d\Theta + P\,du + Q\,dv, \tag{3}$$

worin

$$P = \frac{2F_u - E_v - \frac{FE_u}{E}}{2\Delta}, \tag{4}$$

$$Q = \frac{G_u - \frac{FE_v}{E}}{2\Delta}$$

gesetzt ist. Ferner ist (s. Gl. 35 des Abschnittes III)

$$K = \frac{P_v - Q_u}{\Delta} \tag{5}$$

die Krümmung des Feldes, und die Relation (25a) desselben Abschnitts

$$T = \Sigma - G \tag{6}$$

oder

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{G}} K d\omega = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta - \int_{\mathfrak{R}} \frac{ds}{\varrho_g} \tag{6a}$$

wird die Gleichung von **Ossian Bonnet**.

Es werde noch bemerkt, daß in dieser Formel die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem die Kurve in dem betreffenden Punkte auf der positiven oder auf der negativen Seite ihrer geodätischen Tangente liegt; positiv ist diejenige Seite der geodätischen Tangente, nach welcher der Winkel Θ wächst.

II. Ist die Form ds^2 indefinit, also

$$EG - F^2 = -D^2 \tag{7}$$

negativ, so gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei reelle Minimalkurven, welche, falls E von Null verschieden ist, die Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$E du + (F + D) dv = 0 \tag{8}$$

und

$$E du + (F - D) dv = 0$$

sind und resp. als *erste* und *zweite* Minimalkurve bezeichnet sein sollen.

In jedem Punkte des Feldes bestimmen die Tangenten der beiden Minimalkurven zwei Paare von Scheitelwinkeln, derart, daß das Linienelement in dem einen reell, in dem anderen rein imaginär ausfällt. Die Punkte, für welche die beiden Minimalkurven zusammenfallen, also $D = 0$ ist, müssen von der Untersuchung ausgeschlossen werden.

Konstruiert man in sämtlichen Punkten eines Bogens $\mathfrak{B}$ die beiden Minimalkurven, so erhalten diejenigen Punkte singulären Charakter, in denen $\mathfrak{B}$ von einer der beiden Minimalkurven berührt wird, weil an einer

solchen Stelle der Bogen $\mathfrak{B}$ aus dem einen der beiden Scheitelwinkel in den anderen übertritt und der Winkel Θ und die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ alsdann unendlich werden. Wir müssen uns daher bei der Aufstellung des Analogons zum Satze von Ossian Bonnet auf solche Gebiete $\mathfrak{G}$ beschränken, deren Berandung $\mathfrak{R}$ nirgends von den Minimalkurven berührt wird. Außerdem soll vorausgesetzt werden, daß das Gebiet $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend ist und keinen Punkt der Kurve $D = 0$ enthält, weil diese Annahmen, wenn sie nicht von vornherein erfüllt sind, in bekannter Weise durch geeignete Hilfslinien realisiert werden können. Dann wollen

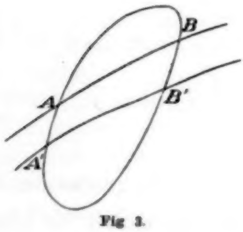


Fig 3.

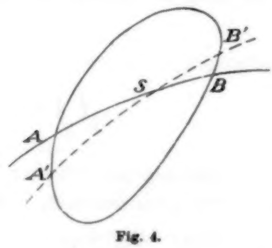


Fig. 4.

wir zunächst zeigen, daß die Randkurve notwendigerweise Ecken besitzen muß. Es gilt nämlich der Satz: *Wenn die Randkurve $\mathfrak{R}$ des einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}$ keine Ecken besitzt, so wird sie von jeder der beiden Scharen von Minimalkurven mindestens in zwei Punkten berührt.*

Es seien nämlich A und B zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer Minimalkurve mit der Berandung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$. Verrückt man alsdann den Punkt A um ein hinreichend kleines, aber endliches Stück nach A', so muß sich (s. Fig. 3) der zweite Schnittpunkt B' notwendig in entgegengesetzter Richtung wie der erste auf $\mathfrak{R}$ bewegen, falls $A'B'$ demselben System von Minimalkurven angehört wie AB. Denn anderenfalls würden (s. Fig. 4) sich AB und $A'B'$ in einem inneren Punkte S von $\mathfrak{G}$ schneiden, und

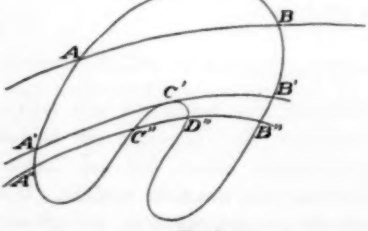


Fig. 5.

das ist unmöglich, weil durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ zufolge der Annahme, daß D nirgends verschwinde, nur eine erste oder eine zweite Minimalkurve hindurchgeht. Bewegt sich also der Punkt A nach der einen oder

der anderen Richtung auf dem Rande $\mathfrak{R}$ fort, so rückt der Punkt B auf ihn zu, und es muß also eine Stelle geben, wo beide Punkte zusammenfallen und somit bei einer Kurve ohne Ecken Berührung eintritt. Das gleiche trifft auch dann zu, wenn bei diesem Bewegungsprozeß die Kurve AB sich in mehrere Teile auflöst (s. Fig. 5), indem eine solche Teilungsstelle notwendig auch eine Stelle der Berührung sein muß.

Stellen wir nun auch hier die Hauptgleichung auf:

$$\frac{ds}{\varrho_g} = d\Theta + P du + Q dv, \tag{9}$$

so sind bei den früheren Einführungen die vier Größen $\frac{1}{\varrho_g}$, Θ, P und Q sämtlich mit dem Faktor i behaftet; nach Weglassung dieses bei unserer Untersuchung überflüssigen Faktors erhalten wir die Formeln:

$$-\frac{D}{\varrho_g}\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\left(E_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right) - \frac{d}{ds}\frac{E du + F dv}{ds}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}\log\frac{E du + (F+D)dv}{E du + (F-D)dv} = \log\frac{E du + (F+D)dv}{\sqrt{E}\,ds} \\ &= -\log\frac{E du + (F-D)dv}{\sqrt{E}\,ds},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}P &= \frac{\frac{E_u F}{E} + E_v - 2F_u}{2D} \\ Q &= \frac{\frac{E_v F}{E} - G_u}{2D},\end{aligned} \tag{12}$$

und es wird alsdann ebenso, wie vorher:

$$K = \frac{P_v - Q_u}{D} \tag{13}$$

und

$$T = \Sigma - G, \tag{14}$$

wo

$$T = \iint\limits_{\mathfrak{S}} K d\mathfrak{u}, \quad \Sigma = \int\limits_{\mathfrak{R}} d\Theta, \quad G = \int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{ds}{\varrho_g}. \tag{15}$$

Wir müssen nun zuvörderst die Art der Veränderung des in (11) eingeführten Winkels diskutieren, um über die Bedeutung des sphärischen Exzesses Σ ins Klare zu kommen. Zufolge der Gleichung (11) ist der Winkel irgend zweier durch einen Punkt P hindurchgehenden Richtungen (du, dv) und (d_1u, d_1v) nichts anderes als der halbe Logarithmus des Doppelverhältnisses, den sie mit den beiden Minimalkurven durch den

Punkt P bilden. Der Winkel fällt hiernach reell aus, falls die beiden Richtungen in ein und dasselbe der beiden von den Minimalkurven gebildete Paare von Scheitelwinkeln hineinfallen; er ist hingegen komplex und von der Form $\alpha \pm \pi i$, falls die beiden Richtungen die Minimalkurven trennen.

Bildet man also den Winkel Θ (s. Figur 6), indem man eine Gerade um einen festen Punkt $\mathfrak{O} = (u, v)$ von der Anfangsrichtung $\mathfrak{A}$ ab, für welche $dv = 0$ und du positiv ist, in positivem Sinne fortbewegt, so wächst der Winkel Θ von Null ab, vorausgesetzt, daß wir uns in demjenigen Winkel befinden, in welchem das Linienelement reell ist, weil alsdann

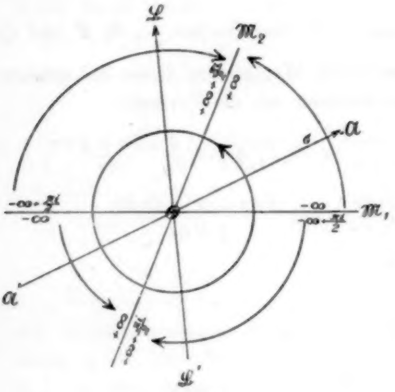


Fig. 6.

$$\frac{d\Theta}{d\frac{dv}{du}} = \frac{D\,du^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

positiv ist. Er wird sodann positiv unendlich, wenn der bewegliche Schenkel Tangente der Minimalkurve $\mathfrak{M}_2$ wird, erhält beim Überschreiten der Richtung $\mathfrak{M}_2$ den Zuwachs $+\frac{\pi i}{2}$ und nimmt nunmehr in dem links anstoßenden Nebenwinkel bis $-\infty + \frac{\pi i}{2}$ ab; beim Überschreiten des negativen Schenkels von $\mathfrak{M}_1$ verliert er den Zusatz $\frac{\pi i}{2}$ und nimmt jetzt wieder von $-\infty$ bis $+\infty$ zu, um bei nochmaligem Überschreiten von $\mathfrak{M}_2$ wieder von $+\infty + \frac{\pi i}{2}$ bis $-\infty + \frac{\pi i}{2}$ abzunehmen und sodann in dem ersten der vier Winkelräume wieder von $-\infty$ bis zu dem Anfangswerte Null wachsend zurückzulaufen. Für die Richtung $\mathfrak{B}$, die zu $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ harmonisch liegt, hat der Winkel den Wert $+\frac{\pi i}{2}$; Θ ist somit positiv oder hat wenigstens einen positiven reellen Bestandteil, sobald der freie Schenkel in den Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ oder seinen Scheitelwinkel hinein fällt, er ist hingegen in den beiden Räumen $\mathfrak{B}\mathfrak{O}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'\mathfrak{O}\mathfrak{A}$ negativ oder besitzt einen negativen reellen Bestandteil. Das Vorzeichen des reellen Bestandteils eines Winkels ist hiernach keineswegs ausschließlich von der Drehungsrichtung abhängig, sondern überdies noch durch die Alternative mitbestimmt, ob der Winkel ganz in denjenigen hineinfällt, den der erste

Strahl mit dem zu den Minimalrichtungen harmonischen Strahl bildet oder ob das Gegenteil der Fall ist.*)

Bilden wir jetzt den sphärischen Exzeß eines Gebietes $\mathfrak{G}$, welches ein n-Eck $E_0E_1E_2 \cdots E_{n-1}$ sein möge, so ist zufolge der Annahme, daß keine Seite von einer Minimalkurve berührt werde, die Winkeländerung $\int d\Theta$ für jede der Seiten E_hE_{h+1} reell. Bezeichnet man also mit $\Theta_{h,h+1}$ und $\Theta'_{h,h+1}$ den Winkel Θ am Anfangs- und am Endpunkt der Seite E_hE_{h+1}, so ist der Exzeß

$$\sum = (\Theta'_{01} - \Theta_{01}) + (\Theta'_{12} - \Theta_{12}) + (\Theta'_{23} - \Theta_{23}) + \cdots + (\Theta'_{n-1,0} - \Theta_{n-1,0}).$$

In dieser Summe kann aber z. B. die Differenz $\Theta_{12} - \Theta'_{01}$ durch den Außenwinkel ersetzt werden, welcher an der Ecke E_1 auftritt und mit A_1 bezeichnet sein möge, und es ist somit:

$$\sum = -A_0 - A_1 - A_2 - \cdots - A_{n-1}, \tag{16}$$

oder wenn J_h den zu A_h gehörigen in positivem Sinne durchlaufenen Innenwinkel bedeutet, da $A_h + J_h = 0$ ist,

$$\sum = J_0 + J_1 + J_2 + \cdots + J_{n-1}. \tag{16a}$$

In diesen Summen können allerdings die einzelnen Summanden A_h, resp. J_h sehr wohl imaginär sein, wenn nämlich der Winkel J_h eine der Minimalkurven enthält, die andere ausschließt, die Gesamtsumme der imaginären Bestandteile muß aber ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein, von welchem wegen der Vieldeutigkeit des in (11) auftretenden Logarithmus abgesehen werden kann. Die reellen Bestandteile der in (16) oder (16a) auftretenden Summanden können ebensowohl positiv wie negativ sein, wie schon auseinandergesetzt wurde, so daß also hier ganz andere Verhältnisse vorliegen, wie bei der Bildung der analogen Summe in der gewöhnlichen Flächentheorie.

*) Auf Grund dieser Ausführungen bedarf der letzte Satz meiner auf S. 313 zitierten Note einer Korrektur.

Kiel, August 1907.

On the limits of certain infinite series and integrals.

By

T. J. I'a. Bromwich of Cambridge (England).

Four investigations*) have appeared recently which deal with various extensions of Abel's well known theorem on the continuity of $\sum a_n x^n$; the following note, although quite elementary, seems to include all the results hitherto obtained, and shews more clearly the reasons for the various conditions which have been given.

It will be seen that the conditions requisite to prove Theorems B, C (§§ 3, 4, below) are less stringent (at least in theory) than those given by the authors quoted: thus, instead of requiring that $\sum n^k |v_n|$ is convergent and imposing various further conditions**) on all the differences $\Delta^2 v_n, \Delta^3 v_n, \ldots, \Delta^{k+1} v_n$, we only require that $n^k |v_n|$ shall tend to zero as n tends to ∞, and that $\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n|$ shall be less than a number K, independent of the variable x. In §§ 1, 2 we discuss the case $k = 1$ at some length, as the case most frequently used in applications; and it is proved that the conditions of Theorem A include those given in all the previous investigations on this subject.

§ 5 contains a discussion of a question suggested by a comparison of §§ 3, 4: *Are the mean-values of Cesàro and Hölder necessarily the same, for a given oscillatory series?* This question is answered in the affirmative for $k = 1, 2$: for higher values of k, we can only say that Cesàro's mean certainly exists whenever Hölder's mean exists, but the converse has not been proved to be true.

In § 6 we obtain two theorems on the limiting values of integrals, which correspond to Theorem A and a theorem due to Dedekind (and Cahen) referred to in § 1.

*) L. Fejér, Math. Annalen, Bd. 58, 1904, p. 51. G. H. Hardy, Proc. Lond. Math. Soc. (2), vol. 3, 1906, p. 247; and Math. Annalen, Bd. 64, 1907, p. 77. C. N. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 8, 1907, p. 299.

**) That these conditions are really superfluous is clear from the Lemma proved in § 4.

§ 1.

Series summable by a single mean.

Suppose that the series $\sum a_n$ can be summed by taking a single mean, so that if

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

then

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

has a definite limit s as n tends to ∞.

It follows that we can find a constant C such that

$$|s_0 + s_1 + \cdots + s_n| < (n+1)C.$$

Then

$$|s_n| = |(s_0 + s_1 + \cdots s_n) - (s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1})| < (2n+1)C$$

and so

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < 4nC.$$

Again if we write

$$\sigma_n = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$$

we find

$$s_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$$

and so

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sigma_n - 2\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}.$$

These preliminary results being established we proceed next to enunciate and prove the first theorem, which is a direct generalization of one due to Dedekind and Cahen*).

Theorem A. *Suppose*

1) *that the series* $\sum a_n$ *is summable by a single mean, as just explained;*

2) *that* v_n *is a function of* x *with the properties:*

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & \sum n\,|\Delta^2 v_n| < K^{**)} \\ (\beta) & \lim\limits_{n\to\infty} n v_n = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{if } x > 0,$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x\to 0} v_n = 1,$$

*) See E. Landau, Münchener Sitzungsberichte Bd. 36, 1906, pp. 157, 160.

**) Since all the terms in the series $\sum n\,|\Delta^2 v_n|$ are *positive*, this condition implies the convergence of the series.

where K is independent of x and n. Then the series $\sum a_n v_n$ converges if x is positive, and

$$\lim_{x\to 0} \sum a_n v_n = s.$$

For we have identically

$$\begin{aligned} & a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= \sigma_0 v_0 + (\sigma_1 - 2\sigma_0) v_1 + (\sigma_2 - 2\sigma_1 + \sigma_0) v_2 + \cdots + (\sigma_n - 2\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}) v_n \\ &= \sigma_0 \Delta^2 v_0 + \sigma_1 \Delta^2 v_1 + \cdots + \sigma_{n-1}\Delta^2 v_{n-1} + \sigma_n v_n - \sigma_{n-1} v_{n+1} \end{aligned}$$

where

$$\Delta^2 v_n = v_n - 2v_{n+1} + v_{n+2}.$$

Now, since $|\sigma_n| < (n+1)C$, and since $\sum n |\Delta^2 v_n|$ is convergent, it follows that the series $\sum \sigma_n \Delta^2 v_n$ is absolutely convergent; so that

$$\sigma_0 \Delta^2 v_0 + \sigma_1 \Delta^2 v_1 + \cdots + \sigma_{n-1}\Delta^2 v_{n-1}$$

tends to a definite limit as n tends to infinity.

Also

$$|\sigma_n v_n| < (n+1) C |v_n|, \qquad |\sigma_{n-1} v_{n+1}| < n C |v_{n+1}|,$$

so that $\sigma_n v_n$ and $\sigma_{n-1} v_{n+1}$, tend to zero as n tends to infinity, in virtue of condition (β). It follows that $\sum_0^\infty a_n v_n$ is convergent and that

$$(1) \qquad \sum_0^\infty a_n v_n = \sum_0^\infty \sigma_n \Delta^2 v_n.$$

Taking the special case $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$, we find $\sigma_n = n+1$ and so (1) gives

$$(2) \qquad v_0 = \sum_0^\infty (n+1)\Delta^2 v_n$$

Thus, combining (1) and (2), we find that

$$(3) \qquad \sum_0^\infty a_n v_n - s v_0 = \sum_0^\infty \{\sigma_n - (n+1)s\} \Delta^2 v_n.$$

Now $\frac{\sigma_n}{n+1}$ has s as its limit, so that we can determine m in such a way as to satisfy the inequality

$$\left|\frac{\sigma_n}{n+1} - s\right| < \varepsilon, \quad \text{if } n \geqq m$$

or

$$|\sigma_n - (n+1)s| < (n+1)\varepsilon, \qquad \text{if } n \geqq m.$$

Also, for all values of n

$$|\sigma_n| < (n+1)C, \text{ and } |s| \leqq C.$$

Making use of these inequalities in (3) we have

$$\left|\sum_0^{\infty} a_n v_n - s v_0\right| < 2C\sum_0^{m-1}(n+1)\,|\Delta^2 v_n| + \varepsilon\sum_m^{\infty}(n+1)\,|\Delta^2 v_n|$$

$$(4)\qquad < 2C\sum_0^{m-1}(n+1)\,|\Delta^2 v_n| + \varepsilon K$$

in virtue of condition (α).

Now as x tends to 0, $\Delta^2 v_n$ tends to 0 in virtue of condition (γ); and, since m has now been fixed, it follows that

$$(5)\qquad \lim_{x\to 0}\sum_0^{m-1}(n+1)\,|\Delta^2 v_n| = 0\,.$$

Thus from (4) and (5), we find that

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\left|\sum_0^{\infty} a_n v_n - s v_0\right| \leqq \varepsilon K$$

where ε may be taken as small as we please, by proper choice of the index m: but this choice of m does not affect the limit on the left, and so this limit must be actually zero.

Hence

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_0^{\infty} a_n v_n - s v_0\right) = 0$$

or

$$\lim_{x\to 0}\sum_0 a_n v_n = s\,.$$

§ 2.

Comparison of the theorem of § 1 with earlier results.

Consider first C. N. Moore's Theorem I*); it is there assumed that for all positive values of x

$$|v_n| < A\,(nx)^{-(2+\varrho)},\quad |\Delta^2 v_n| < Bn^{-2}(nx)^{-\varrho},$$

and that

$$\Delta^2 v_n \geqq 0,\quad (0 \leqq nx \leqq c),$$

where A, B, ϱ, c are certain positive constants.

When these conditions hold good, (β) of § 1 is obviously satisfied.

To examine (α), suppose that x is such that c falls between νx and $(\nu+1)x$, so that

$$|\Delta^2 v_n| = \Delta^2 v_n,\quad 0 \leqq n \leqq \nu.$$

*) Trans. Amer. Math. Society, vol. 8, April 1907, p. 300.

Now, taking $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0, \cdots$ in (1) of § 1, we have

$$\sum n\,\Delta^2 v_n = v_1$$

so that

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| - v_1 = \sum_{\nu+1}^{\infty} n\{|\Delta^2 v_n| - \Delta^2 v_n\} \leqq 2\sum_{\nu+1}^{\infty} n\,|\Delta^2 v_n|.$$

Or, using Moore's condition,

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| - v_1 < 2B\sum_{\nu+1}^{\infty} n^{-(1+\varrho)}x^{-\varrho}$$

and by a well-known elementary theorem this again is less than

$$\frac{2B}{\varrho}\,\frac{1}{(\nu x)^{\varrho}} < \frac{2B}{\varrho(c-x)^{\varrho}}.$$

Consequently condition (α) is satisfied if $x \leqq c' < c$.

I note incidentally that in the same way Moore's Theorem II (l. c. p. 307) can be deduced from the theorem of Dedekind and Cahen already mentioned, which requires the condition $\sum|\Delta v_n| < k$.

We consider next Hardy's Theorem I*) which requires (for $k=1$) that

$$v_n \geqq 0,\ \Delta v_n \geqq 0,\ \Delta^2 v_n \geqq 0$$

and that $\sum n v_n$ is convergent for $x > 0$.

Under these conditions we have

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| = \sum n\,\Delta^2 v_n = v_1$$

so that condition (α) of § 1 is satisfied; and $n v_n$ tends to zero, so that condition (β) is also satisfied. Thus our Theorem A includes Hardy's Theorem I (for $k=1$).

As regards Hardy's Theorem II**), we then suppose that

$$v_n = \varphi(nx),$$

where

$$|\varphi''(\xi)| \leqq \frac{K}{\xi^{2+\varrho}}, \qquad \text{if } \xi \geqq 1,$$

and also

$$|\varphi''(\xi)| \leqq M, \qquad \text{if } 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Now we have at once

$$\Delta^2\varphi(nx) = \varphi\{(n+2)x\} - 2\varphi\{(n+1)x\} + \varphi(nx)$$
$$= \int_0^x dt \int_0^x \varphi''(nx+t+v)\,dv$$

so that

$$|\Delta^2 v_n| \leqq Mx^2, \qquad \text{if } 0 < nx \leqq 1,$$

---

*) Math. Annalen, Bd. 64, p. 78.

**) See p. 86 of the paper quoted.

and also

$$|\Delta^2 v_n| \leqq \frac{Kx^2}{(nx)^{2+\varrho}}, \qquad \text{if } nx \geqq 1.$$

Hence, since ϱ is positive, we find

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| \leqq Mx^2 \sum_1^{\nu} n + \sum_{\nu+1}^{\infty} \left\{ \frac{Kx^2}{(nx)^{2+\varrho}} \right\}$$

$$\leqq \frac{1}{2} Mx^2 \nu(\nu+1) + \left(\frac{K}{\nu(1+\varrho)}\right)(\nu x)^{-\varrho}$$

where ν is the integral part of $\frac{1}{x}$, and thus we get

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| \leqq \frac{1}{2} M(1+x) + 2^{\varrho} Kx$$

so that under Hardy's conditions, we can apply Theorem A of § 1 above. It is of course to be remembered that (for $k=1$) Hardy's Theorem II is the same as Fejér's result*), which is therefore also included under § 1 above.

Finally, if we use Hardy's Theorem III**), we must suppose that $\Delta^2 v_n$ changes sign only a finite number of times, say r times. We have then

$$\sum n\,|\Delta^2 v_n| \leqq |v_1| + 4rM$$

if M is the maximum of $n\,|v_n|$: and so condition (α) is again satisfied.

It is therefore clear that Theorem A includes all previous results which apply to the case $k=1$.

§ 3.

Series which are k-times indeterminate.

Following Cesàro***) we say that *a series is k-times indeterminate* if the limit of $\frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}$ exists and is finite as n tends to infinity, but the limit of $\frac{S_n^{(k-1)}}{A_n^{(k-1)}}$ does not exist; here we write for brevity

$$S_n^{(k)} = s_n + ks_{n-1} + \frac{k(k+1)}{2!} s_{n-2} + \cdots + \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} s_0$$

*) Math. Annalen, Bd. 58, p. 62.

**) See p. 88 of the paper quoted.

***) Bulletin des Sciences mathématiques (2), t. 14, 1890, p. 114; the definition of „*une série k fois indéterminée*" is given on p. 119. See also Borel, Séries Divergentes p. 91, where, however, the precise definition is not elaborated for higher values than $k=1$. The reader may also consult Cesàro, „Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze" Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli 28 ottobre 1893; and Bromwich, Infinite Series (London, 1908), Arts. 122—129.

and

$$A_n^{(k)} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}.$$

More briefly, we may define $S_n^{(k)}$ by means of the identities

$$\sum S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{-k} \sum s_n x^n = (1-x)^{-(k+1)} \sum a_n x^n$$

from which it follows that

$$\sum s_n x^n = (1-x)^k \sum S_n^{(k)} x^n$$

and

$$\sum a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum S_n^{(k)} x^n.$$

It results at once from the last identity that

$$(1) \quad a_n = S_n^{(k)} - (k+1) S_n^{(k)} + \frac{(k+1)k}{2!} S_{n-2}^{(k)} - \cdots + (-1)^{k+1} S_{n-k-1}^{(k)}$$

where it is to be understood that when a negative suffix occurs in the formula, the corresponding $S^{(k)}$ is to be replaced by zero; so that, for example,

$$a_0 = S_0^{(k)}, \quad a_1 = S_1^{(k)} - (k+1) S_0^{(k)},$$

and so on.

If we now substitute for $a_0, a_1, \ldots, a_n$ their values given by these formulae, we find that

$$(2) \quad \begin{aligned} &a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \\ &= S_0^{(k)} \Delta^{k+1} v_0 + S_1^{(k)} \Delta^{k+1} v_1 + \cdots + S_{n-k-1}^{(k)} \Delta^{k+1} v_n + R_n, \end{aligned}$$

where

$$(3) \quad \begin{aligned} R_n = {} & S_{n-k}^{(k)} \{ v_{n-k} - (k+1) v_{n-k+1} + \cdots + (-1)^k (k+1) v_n \} \\ & + S_{n-k+1}^{(k)} \left\{ v_{n-k+1} - (k+1) v_{n-k+2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2!} v_n \right\} \\ & + \cdots\cdots \\ & + S_n^{(k)} v_n. \end{aligned}$$

Now when the series is k-times indeterminate we can find a constant C, so that, for all values of n,

$$\left| \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} \right| < C$$

or

$$(4) \qquad |S_n^{(k)}| < C' n^k, \quad \text{since } \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{A_n^{(k)}}{n^k} \right\} = \frac{1}{k!}.$$

Thus from (3) and (4) we find that

$$\begin{aligned} |R_n| < {} & C'(n-k)^k \{ |v_{n-k}| + (k+1) |v_{n-k+1}| + \cdots + (k+1) |v_n| \} \\ & + C'(n-k+1)^k \left\{ |v_{n-k+1}| + (k+1) |v_{n-k+2}| + \cdots + \frac{(k+1)k}{2!} |v_n| \right\} \\ & + \cdots + C' n^k |v_n|. \end{aligned}$$

Now remembering that

$$1 + (k+1) + \frac{(k+1)k}{2!} + \cdots + (k+1) + 1 = 2^{k+1},$$

we see that the last inequality gives

$$|R_n| < 2^{k+1} C' \{ (n-k)^k |v_{n-k}| + (n-k+1)^k |v_{n-k+1}| + \cdots + n^k |v_n| \}.$$

Thus R_n will tend to zero as n tends to ∞, provided that

(5) $$\lim_{n \to \infty} (n^k v_n) = 0.$$

Under this condition, then, we see from (2) that the series $\sum_0^\infty a_n v_n$ converges or diverges with the series $\sum_0^\infty S_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n$.

Now, since $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{A_n^{(k)}}{n^k} \right\} = \frac{1}{k!}$ and $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} \right\}$ is finite, it follows that the series $\sum_0^\infty S_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n$ is absolutely convergent provided that

(6) $$\sum_0^\infty n^k \, | \Delta^{k+1} v_n |$$

is convergent.

Thus, under the two conditions (5) and (6), we have the equation

(7) $$\sum_0^\infty a_n v_n = \sum_0^\infty S_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n,$$

in which both sides converge, and the right hand is *absolutely* convergent, although the series on the left may not converge absolutely.

In particular if we write

$$a_0 = 1, \; a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0,$$

we find

$$s_0 = s_1 = s_2 = \cdots = 1$$

and so

$$S_n^{(k)} = A_n^{(k)}.$$

Thus the equation $\sum a_n v_n = \sum S_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n$ gives in this special case the identity

(8) $$v_0 = \sum_0^\infty A_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n.$$

Combining (7) and (8) we find that

(9) $$\sum_0^\infty a_n v_n - s v_0 = \sum_0^\infty \{ S_n^{(k)} - s A_n^{(k)} \} \Delta^{k+1} v_n,$$

where s may be any number.

Suppose now that s is Cesàro's limit, so that

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}\right\}=s,$$

while

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{A_n^{(k)}}{n^k}\right\}=\frac{1}{k!}.$$

Thus we can find m so that

$$\left|S_n^{(k)}-sA_n^{(k)}\right|<\varepsilon n^k,\quad \text{if } n\geqq m.$$

Further we can find a constant C such that

$$\left|S_n^{(k)}\right|<Cn^k,\quad |s|\,A_n^{(k)}<Cn^k$$

for all values of n. So we find on using these inequalities in (9)

$$(10)\qquad \left|\sum_0^\infty a_n v_n - s v_0\right|\leqq \sum_0^\infty \left|S_n^{(k)}-sA_n^{(k)}\right|\left|\Delta^{k+1}v_n\right|$$

$$<2C\sum_0^{m-1}(n+1)^k\left|\Delta^{k+1}v_n\right|+\varepsilon\sum_m^\infty n^k\left|\Delta^{k+1}v_n\right|.$$

Let us now introduce the further conditions that v_n is a function of x such that

$$(11)\qquad \lim_{x\to 0} v_n=1,\quad\text{and}\quad \sum_0^\infty n^k\left|\Delta^{k+1}v_n\right|<K,\quad \text{if } x>0$$

where K is independent of x and n.

Thus, as in § 1, since $\lim_{x\to 0}\Delta^{k+1}v_n=0$, we find from (10) and (11) that

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\left|\sum_0^\infty a_n v_n - s v_0\right|\leqq \varepsilon K,$$

and since ε may be made arbitrarily small by proper choice of m (which does not affect the limit on the left) we see that

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_0^\infty a_n v_n - s v_0\right)=0,$$

or

$$\lim_{x\to 0}\sum_0^\infty a_n v_n = s.$$

Thus we have proved:

Theorem B. *Suppose*

1) *that* $\sum a_n$ *is k-times indeterminate and has the sum s in Cesàro's sense,*

2) *that* v_n *is a function of* x *with the properties:*

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha) & \sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| < K^{*)} \\ (\beta) & \lim\limits_{n\to\infty} n^k v_n = 0\end{array}\right\} \text{ if } x > 0,$$

$$(\gamma) \qquad \lim_{x\to 0} v_n = 1,$$

where K *is independent of* x *and* n. *Then the series* $\sum a_n v_n$ *converges if* x *is positive, and*

$$\lim_{x\to 0} \sum a_n v_n = s.$$

This is obviously the exact extension of Theorem A, given in § 1; we proceed next to consider the effect of using Hölder's mean instead of Cesàro's in this theorem.

§ 4.

Series for which Hölder's k-fold mean exists.

The results obtained in § 3 are not capable of being compared directly with the corresponding conclusions of Hardy's paper. Indeed Hardy does not use Cesàro's limit at all, but employs instead another kind of generalized mean, first introduced into analysis by Hölder**); for the sake of brevity, we shall refer to this mean as *Hölder's mean.*

Hölder repeats the process of taking the arithmetic mean as often as may prove necessary: thus if we write

$$(n+1) H_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n,$$

and

$$(n+1) H_n^{(r+1)} = H_0^{(r)} + H_1^{(r)} + \cdots + H_n^{(r)}, \quad (r = 1, 2, 3, \cdots),$$

it may happen that $H_n^{(k)}$ tends to a definite finite limit s as n tends to infinity. When this in the case, we say that *Hölder's k-fold mean exists and is equal to s.*

We shall now obtain the theorems, analogous to those of § 3, which apply when this k-fold mean exists.

If we apply the transformation used by Hardy (l. c., p. 81) to the sum

$$(1) \qquad a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

taken up to n terms, instead of to infinity, it will be seen that the sum takes the form

$$s_0 \Delta v_0 + s_1 \Delta v_1 + \cdots + s_n \Delta v_n + s_n v_{n+1}.$$

---

*) As we have already pointed out in connexion with Theorem A, this condition implies the convergence of the series $\sum n^k \left|\Delta^{k+1} v_n\right|$.

**) Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, p. 535.

Now (as Hardy points out) $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n^k} = 0$, so that $\lim (s_n v_{n+1}) = 0$, provided that we make use of the hypothesis $\lim (n^k v_n) = 0$, which is the same as condition (β) in § 3. Thus for our purpose we may replace the sum by

(2) $$s_0 \Delta v_0 + s_1 \Delta v_1 + \cdots + s_n \Delta v_n.$$

Similarly, writing

$$(n+1) H_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n,$$

we find that the sum (1) is equal to

$$H_0^{(1)} \Delta^2 v_0 + 2 H_1^{(1)} \Delta^2 v_1 + \cdots + (n+1) H_n^{(1)} \Delta^2 v_n + (n+1) H_n^{(1)} \Delta v_{n+1}$$

and again the last term tends to zero as n tends to infinity, because $\lim (n^k v_n) = 0$, and $\lim \frac{H_n^{(1)}}{n^{k-1}} = 0$.

If we continue this process we get a set of expressions equivalent to (1), namely,

(3) $$H_0^{(1)} \Delta^2 v_0 + 2 H_1^{(1)} \Delta^2 v_1 + \cdots + (n+1) H_n^{(1)} \Delta^2 v_n,$$

(4) $$H_0^{(2)} \Delta^3 v_0 + 2^2 H_1^{(2)} \Delta^3 v_1 + \cdots + (n+1)^2 H_n^{(2)} \Delta^3 v_n - H_0^{(2)} \Delta^2 v_1 - \cdots - (n+1) H_{n-1}^{(2)} \Delta^2 v_n,$$

and so on. The general result is

(5) $$\sum_{\mu=0}^{k-1} (-1)^\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} f_{k-\mu}^{(k)}(\nu) \, H_{\nu-\mu}^{(k)} \, \Delta^{k+1-\mu} v_\nu$$

where the polynomial $f_{k-\mu}^{(k)}(\nu)$ is of degree $(k-\mu)$ in ν and is the same polynomial as that used by Hardy (l. c. p. 82). It is then easy to see that the argument given in § 3 can be at once extended to shew that each of the series

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(\nu) \, H_{\nu-\mu}^{(k)} \, \Delta^{k+1-\mu} v_\nu$$

is absolutely convergent provided that all the series $\sum n^\lambda |\Delta^{\lambda+1} v_n|$ are convergent, when λ takes the values $1, 2, \cdots, k$. Thus $\sum_0^\infty a_n v_n$ is then convergent. And if in addition each of the series $\sum n^\lambda |\Delta^{\lambda+1} v_n|$ is less than a fixed number K, we can prove by a method similar to that of § 3 that

$$\lim_{x\to 0} \sum a_n v_n = s.$$

We have, however, *apparently* introduced k separate conditions as to the differences $\Delta^2 v_n, \cdots, \Delta^{k+1} v_n$, whereas in § 3 we only needed the *one* condition $\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| < K$. We now proceed to shew that this one

condition includes all the others; and obviously this statement will be established by proving the following lemma.

Lemma. *If* $\sum n^\lambda |\Delta u_n| < K$, *then* $\sum n^{\lambda-1} |u_n| < K$ *provided that* $\lim u_n = 0$, λ *being any positive integer.*

For since $\sum n^\lambda |\Delta u_n|$ converges, so also does $\sum |\Delta u_n|$: let us write then

(6) $$U_n = |\Delta u_n| + |\Delta u_{n+1}| + |\Delta u_{n+2}| + \cdots.$$

Thus

(7) $$U_n - U_{n+1} = |\Delta u_n|$$

and

(8) $$U_n - U_p \geqq |\Delta u_n + \Delta u_{n+1} + \cdots + \Delta u_{p-1}| \geqq |u_n - u_p|, \quad \text{if } p > n.$$

But, since both u_p and U_p tend to 0 as p tends to ∞, the last inequality gives

(9) $$U_n \geqq |u_n|.$$

Now we see from (7) that

(10) $$\sum_1^\nu n^\lambda |\Delta u_n| = \sum_1^\nu n^\lambda (U_n - U_{n+1}) = \sum_1^\nu \{n^\lambda - (n-1)^\lambda\} U_n - \nu^\lambda U_{\nu+1}$$

and

(11) $$\nu^\lambda U_{\nu+1} = \nu^\lambda \{|\Delta u_{\nu+1}| + |\Delta u_{\nu+2}| + \cdots\} < \sum_{\nu+1}^\infty n^\lambda |\Delta u_n|.$$

Thus, using (10) and (11), we find

$$\sum_1^\nu \{n^\lambda - (n-1)^\lambda\} U_n = \sum_1^\nu n^\lambda |\Delta u_n| + \nu^\lambda U_{\nu+1} < \sum_1^\infty n^\lambda |\Delta u_n| < K.$$

Hence, letting ν tend to ∞, we obtain

(12) $$\sum_1^\infty \{n^\lambda - (n-1)^\lambda\} U_n \leqq K.$$

But

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\lambda - (n-1)^\lambda}{\lambda n^{\lambda-1}} = 1$$

and so, since U_n is positive, we see from (12) that*)

$$\sum_1^\infty n^{\lambda-1} U_n \leqq K.$$

*) K not denoting the same number as before, but still a *fixed* value independent of x.

Now from (9) we have

$$U_n \geqq |u_n|$$

so that finally

$$\sum_1^\infty n^{\lambda-1} |u_n| < K,$$

which is the inequality stated in the lemma.

Thus we now have proved

Theorem C. *Suppose*

1) *that* $\sum a_n$ *is summable by taking* k *arithmetic means in Hölder's manner, and that* s *is its sum;*

2) *that* v_n *is a function of* x *with the properties:*

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & \sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| < K \\ (\beta) & \lim\limits_{n\to\infty} n^k v_n = 0 \end{array}\right\} \text{ if } x > 0,$$

$$(\gamma) \qquad \lim_{x\to 0} v_n = 1.$$

Then the series $\sum a_n v_n$ *is convergent if* $x > 0$ *and*

$$\lim_{x\to 0} \sum a_n v_n = s.$$

The similarity between Theorems B, C leads to the conjecture that whenever either Cesàro's limit or Hölder's mean exists, the other must also exist. But so far, I have only completely proved this conjecture for $k=2$; the proof will be found in § 5.

Let us now compare Theorem C with Hardy's Theorems*); in Theorem I, Hardy assumes that**) $\Delta^{k+1} v_n \geqq 0$, so that

$$\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| = \sum n^k \Delta^{k+1} v_n \leqq k! \sum A_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n.$$

Now we proved incidentally in § 3 (see equation (8) p. 357) that

$$\sum A_n^{(k)} \Delta^{k+1} v_n = v_0$$

so that condition (α) is satisfied when $\Delta^{k+1} v_n \geqq 0$.

In Hardy's Theorem II, we take

$$v_n = \varphi(nx)$$

where

$$|\varphi^{k+1}(\xi)| \leqq M, \quad \text{if } 0 \leqq \xi \leqq 1$$

and

$$|\varphi^{k+1}(\xi)| \leqq \frac{K}{\xi^{k+1+\varrho}}, \quad \text{if } \xi \geqq 1, \qquad \text{(where } \varrho > 0)$$

---

*) As already stated in § 2, the results of Fejér and Moore only apply to the case $k=1$.

**) Hardy also supposes $v_n \geqq 0$, $\Delta v_n \geqq 0$, $\cdots$, $\Delta^k v_n \geqq 0$, but we do not make use of these inequalities here.

Thus, exactly as in § 2, we find that

$$|\Delta^{k+1} v_n| \leqq M x^{k+1}, \quad \text{if } 0 < nx \leqq 1$$

and

$$|\Delta^{k+1} v_n| \leqq \frac{K x^{k+1}}{(n x)^{k+1+\varrho}}, \quad \text{if } nx \geqq 1.$$

Then, taking ν to be the integral part of $\frac{1}{x}$, we have

$$\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| \leqq M x^{k+1} \sum_1^{\nu} n^k + K x^{-\varrho} \sum_{\nu+1}^{\infty} n^{-(1+\varrho)}$$

and

$$\sum_1^{\nu} n^k < \int_1^{\nu+1} t^k \, dt < \frac{(\nu+1)^{k+1}}{k+1}, \quad \sum_{\nu+1}^{\infty} n^{-(1+\varrho)} < \int_{\nu}^{\infty} t^{-(1+\varrho)} \, dt = \frac{1}{\varrho \nu^{\varrho}}.$$

Hence

$$\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| < \frac{M}{k+1} (1+x)^{k+1} + \frac{2^{\varrho} K}{\varrho}$$

and so condition (α) is again satisfied.

Under the conditions given in Hardy's Theorem III, $\Delta^{k+1} v_n$ changes sign only a finite number of times, say r times. Then

$$\sum n^k |\Delta^{k+1} v_n| \leqq |\Delta^k v_1| + 4 r M$$

where M is the maximum of $n^k |\Delta^k v_n|$; and so condition (α) holds here also.

Thus Hardy's Theorems I—III are included under Theorem C above: but it ought to be observed that it often happens that Hardy's conditions are the easiest to use in practical applications

§ 5.

Connexion between Cesàro's limit and Hölder's mean.

Let us write $C_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}$, where $S_n^{(k)}$, $A_n^{(k)}$ have the meanings assigned to these symbols in § 3; then $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^{(k)}$ is Cesàro's limit. Also $H_n^{(k)}$ has the meaning explained in § 4, so that $\lim\limits_{n\to\infty} H_n^{(k)}$ is Hölder's mean.

We shall shew that *for $k = 1, 2$, when $H_n^{(k)}$ has a limit s, then $C_n^{(k)}$ also tends to the same limit s; and conversely, when $C_n^{(k)}$ has a limit s, $H_n^{(k)}$ tends to the limit s.*

The case $k=1$ needs no proof beyond the remark that identically

$$H_n^{(1)} = C_n^{(1)}$$

which is obviously true on comparison of the two definitions.

Next, suppose that $H_n^{(2)}$ has a limit s; then consider $S_n^{(2)}$. We have

$$\begin{aligned} S_n^{(2)} &= (n+1)s_0 + ns_1 + \cdots + s_n \\ &= H_0^{(1)} + 2H_1^{(1)} + \cdots + (n+1)H_n^{(1)} \\ &= (n+1)^2 H_n^{(2)} - nH_{n-1}^{(2)} - (n-1)H_{n-2}^{(2)} - \cdots - H_0^{(2)}; \end{aligned}$$

also

$$A_n^{(2)} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Thus

$$C_n^{(2)} = 2\left[\frac{n+1}{n+2}H_n^{(2)} - \frac{nH_{n-1}^{(2)} + (n-1)H_{n-2}^{(2)} + \cdots + H_0^{(2)}}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Now, since

$$\lim H_n^{(2)} = s$$

we have also

$$\lim \frac{n+1}{n+2} H_n^{(2)} = s.$$

Further, by an extension (due to Stolz*)) of Cauchy's theorem on the limits of quotients, we have

$$\lim \frac{nH_{n-1}^{(2)} + (n-1)H_{n-2}^{(2)} + \cdots + H_0^{(2)}}{(n+1)(n+2)} = \lim \frac{(n+1)H_n^{(2)}}{2(n+2)} = \frac{1}{2}s.$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{(2)} = s, \quad \text{if } \lim_{n\to\infty} H_n^{(2)} = s.$$

On the other hand, if it is known that $C_n^{(2)}$ tends to a definite limit s, we remark that

$$S_n^{(2)} - S_{n-1}^{(2)} = (n+1)H_n^{(1)}$$

so that

$$\begin{aligned} (n+1)H_n^{(2)} &= H_0^{(1)} + H_1^{(1)} + \cdots + H_n^{(1)} \\ &= S_0^{(2)} + \frac{1}{2}\{S_1^{(2)} - S_0^{(2)}\} + \cdots + \frac{1}{n+1}\{S_n^{(2)} - S_{n-1}^{(2)}\}. \end{aligned}$$

---

*) Stolz, Mathematische Annalen, Bd. 14, 1879, p. 234; Allgemeine Arithmetik, Bd. 1, p. 173. Bromwich, Infinite Series, p. 378. The theorem states that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{\varphi(n+1) - \varphi(n)}$$

provided that the right-hand limit exists, and that $\varphi(n)$ tends *steadily* to ∞ with n (so that $\varphi(n+1) > \varphi(n)$). Cauchy's theorem is given by taking $\varphi(n) = n$.

Thus

$$(n+1)\,H_n^{(2)} = \frac{S_0^{(2)}}{1\cdot 2} + \frac{S_1^{(2)}}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{S_{n-1}^{(2)}}{n(n+1)} + \frac{S_n^{(2)}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{C_0^{(2)} + C_1^{(2)} + \cdots + C_{n-1}^{(2)}\right\} + \frac{1}{2}(n+2)\,C_n^{(2)}$$

or

$$H_n^{(2)} = \frac{C_0^{(2)} + C_1^{(2)} + \cdots + C_n^{(2)}}{2(n+1)} + \frac{1}{2}C_n^{(2)}.$$

If we apply Cauchy's theorem to the fraction above we get

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_0^{(2)} + C_1^{(2)} + \cdots + C_n^{(2)}}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}s$$

and so

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{(2)} = s, \quad \text{if } \lim_{n\to\infty} C_n^{(2)} = s.$$

Thus *Hölder's mean and Cesàro's limit are certainly equivalent for* $k=1, 2$.

It seems probable (as already remarked at the end of § 4) that these limits may be always equivalent, in the sense that the existence of either implies that of the other and also the equality of the two limits. And in fact Dr. K. Knopp has proved*) that when $H_n^{(k)}$ has a definite limit s, then also $\lim C_n^{(k)} = s$; but the proof of the converse theorem**) appears to present algebraical complications which I have not so far succeeded in surmounting.

It is, however, clear from Knopp's result that Cesàro's limit is at least as general as Hölder's mean; and, on account of the greater simplicity of the algebra (compare §§ 3, 4) it seems preferable to use the former rather than the latter, as a definition of the „sum" of an oscillatory series.

§ 6.

Corresponding theorems for integrals.

In view of the results obtained by Moore (l c. p. 311—325) it would seem at first sight likely that a set of conditions (for convergence factors in summable integrals) could be formulated which would be exactly parallel

*) Inauguraldissertation, Berlin 1907, p. 19—23; this dissertation reached me during the investigations given here. I had already obtained Dr. Knopp's result for $k=3$ but had not established it in general.

**) If true, this theorem would be: When $C_n^{(k)}$ tends to a definite limit, then $H_n^{(k)}$ tends to the same limit.

to those of §§ 1, 3 above for series. But this expectation is not quite fulfilled in the case corresponding to that of § 1, and so far I have not carried the investigations further.

Suppose that the function $\varphi(t)$ is uniformly continuous for all values of $t \geqq a > 0$, and that the integral

$$(1) \qquad \int_a^\infty \varphi(t)\,dt$$

is summable*) and has the sum s. Suppose further that the function $f(x,t)$ has the property

$$(2) \qquad \lim_{x \to 0} f(x,t) = 1$$

then we wish to determine conditions corresponding to (α), (β) of § 1 which will justify the equation

$$(3) \qquad \lim_{x \to 0} \int_a^\infty f(x,t)\,\varphi(t)\,dt = s.$$

Moore proves (l. c. p. 315) that when the integral (1) is summable, and $\varphi(t)$ is uniformly continuous, then

$$(4) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{\varphi_1(t)}{t^2} = 0.$$

The equation (4) should be contrasted with the result used in § 1, that when a series is summable (by a single mean) a constant C can be found so that

$$|s_n| < (2n+1)\,C;$$

but it appears that when $\varphi(t)$ has a summable integral, there is no reason for the existence of a constant C such that

$$|\varphi(t)| < Ct;$$

just as a function may have a convergent integral (to ∞) and yet need not be always less than a fixed value.

If now we apply the process of integration by parts, we find that

---

*) That is if

$$\int_a^t \varphi(t)\,dt = \varphi_1(t),$$

and

$$\int_a^t \varphi_1(t)\,dt = \varphi_2(t),$$

then

$$\lim_{t \to \infty} \left\{\frac{\varphi_2(t)}{t}\right\} = s.$$

$$(5)\qquad \int_a^t \varphi(t) f(x,t)\, dt = \varphi_1(t) f(x,t) - \int_a^t \varphi_1(t) \frac{\partial f}{\partial t}\, dt$$
$$= \varphi_1(t) f(x,t) - \varphi_2(t) \frac{\partial f}{\partial t}$$
$$+ \int_a^t \varphi_2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\, dt.$$

This transformation suggests the conditions which here must correspond to (α), (β) of § 1. In fact we shall assume that $f(x,t)$ satisfies the conditions

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & \displaystyle\int_a^\infty t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right| dt < K \\ (\beta) & t^2 |f| < X \end{array}\right\} \text{ if } x > 0$$

where K is independent of x and t; but X may depend on x, though not on t.

Then in virtue of (α) $\int_a^\infty (t-a) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt$ is a convergent integral; and on integration we find that

$$(6)\qquad \int_a^t (t-a) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\, dt = (t-a)\frac{\partial f}{\partial t} - f(x,t) + f(x,a).$$

Thus as t tends to ∞, it is clear from (6) that $t\frac{\partial f}{\partial t}$ must tend to some definite limit; otherwise $\int_a^\infty (t-a) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt$ could not be convergent.

But, in virtue of (β), tf tends to zero, and so $t\frac{\partial f}{\partial t}$ cannot have any other limit than zero*) and so we have

$$(7)\qquad \lim_{t\to\infty} t\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Now it follows from (4) that

$$(8)\qquad \lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) f(x,t) = 0$$

as a consequence of condition (β).

Also, since

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\frac{\varphi_2(t)}{t}\right\} = s$$

*) In general if $F(t)$ tends to zero, it is easy to see that

$$\varliminf_{t\to\infty} F'(t) \leqq 0 \leqq \varlimsup_{t\to\infty} F'(t).$$

it follows from (7) that

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\varphi_2(t)\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=0. \tag{9}$$

Finally, we see that

$$\int_a^\infty \varphi_2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,dt \tag{10}$$

is an absolutely convergent integral, because

$$\lim\left\{\frac{\varphi_2(t)}{t}\right\}=s \quad\text{and}\quad \int_a^\infty t\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|dt$$

converges in virtue of (α).

Thus we see from (5), (8), (9) and (10) that *the integral*

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,f(x,t)\,dt$$

is convergent for all positive values of x.

Further the same four equations shew that

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,f(x,t)\,dt=\int_a^\infty \varphi_2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,dt. \tag{11}$$

In particular from (6) and (7) we find the special result

$$\int_a^\infty (t-a)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,dt=f(x,a). \tag{12}$$

Thus, combining (11) and (12) we obtain

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,f(x,t)\,dt-s\,f(x,a) \tag{13}$$

$$=\int_a^\infty \{\varphi_2(t)-s\,(t-a)\}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,dt.$$

The equation (13) exactly corresponds to equation (3) in § 1; and by repeating the argument given there, certain obvious changes being made, and using condition (α), it is easy to prove that

$$\lim_{x\to 0}\int_a^\infty \varphi(t)\,f(x,t)\,dt=\lim_{x\to 0} s\,f(x,a)=s.$$

Thus we obtain the result:

Theorem D. *Suppose that $\varphi(t)$ is uniformly continuous for $t\geqq a>0$, and that the integral*

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$$

is summable and has the sum s. Then

$$\lim_{x \to 0} \int_a^\infty \varphi(t) f(x,t)\, dt = s$$

provided that

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & \displaystyle\int_a^\infty t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right| dt < K \\ (\beta) & t^2 |f| < X \end{array}\right\} \quad \text{if } x > 0,$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \to 0} f(x,t) = 1$$

where K is independent of x and t; while X is independent of t, though not necessarily independent of x.

It is also easy to establish the following theorem:

Theorem E. *Suppose that the integral*

$$\int_a^\infty \varphi(t)\, dt$$

converges to the value s. Then

$$\lim_{x \to 0} \int_a^\infty \varphi(t) f(x,t)\, dt = s$$

provided that

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & \displaystyle\int_a^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| dt < K \\ (\beta) & \displaystyle\lim_{t \to \infty} f(x,t) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{if } x > 0,$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \to 0} f(x,t) = 1,$$

where K is independent of x and t.

It is easy to modify the method used at the beginning of § 2 to prove that the conditions of Theorems D, E include those given by Moore (l. c. pp. 318, 325).

Save for the form of the condition (β), Theorem D corresponds precisely to Theorem A for series; while Theorem E is the exact analogue of the theorem of Dedekind and Cahen already referred to in § 1.

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

III. Teil.

Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen.*)

Von

ERHARD SCHMIDT in Bonn.

Einleitung.**)

Unter einer nichtlinearen Integralgleichung verstehe ich eine Funktionalgleichung von folgender Art: Es soll für $a \leqq s \leqq b$ eine stetige Funktion $u(s)$ so bestimmt werden, daß eine für $a \leqq s \leqq b$ definierte gleichmäßig konvergente unendliche Reihe gleich Null wird, deren Glieder aus der gesuchten Funktion $u(s)$ und weiteren gegebenen Funktionen durch die Operationen der Integration und Multiplikation, also auch Potenzierung zu positiven ganzen Exponenten, entstehen. So ist z. B.

$$0 = u(s) + v(s) + \int_a^b\int_a^b K(s, t_1, t_2)\, u(t_1)^2 u(t_2)^3 v(t_2)^2 dt_1\, dt_2,$$

wo $u(s)$ gesucht und $v(s)$ und $K(s, t_1, t_2)$ gegeben sind, eine solche nichtlineare Integralgleichung. Ebenso nun wie die gewöhnliche nichtlineare nach x aufzulösende Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

in der Umgebung einer Lösung eine und nur eine Lösung zuläßt, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ ist, im anderen Falle aber Verzweigungen eintreten, so hängt

*) Diese Abhandlung hat im Februar 1906 der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn als Habilitationsschrift vorgelegen.

**) Diese Einleitung ist, bis auf unwesentliche Änderungen eine Wiederholung der Inhaltsanzeige des vorliegenden Teiles, welche sich am Schluß der dem I. Teil voraufgehenden zusammenfassenden Einleitung Math. Ann. Bd. 63, S. 438 findet.

auch der Lösbarkeitscharakter einer nichtlinearen Integralgleichung in der Umgebung einer regulären Lösung von einer abgeleiteten linearen Integralgleichung ab. Läßt diese keine Nulllösungen*) zu, so ist die nichtlineare Integralgleichung in der Umgebung der vorausgesetzten Lösung eindeutig lösbar; gibt es aber Nulllösungen, so treten *funktionale Verzweigungen* ein, für welche es gelingt, die den Puiseuxschen entsprechenden Sätze aufzustellen.

Diese Theoreme ermöglichen es, wie ich demnächst auseinandersetzen werde, z. B. bei den nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten zu verfolgen und zwar mit Beherrschung der *Verzweigungen*, d. h. derjenigen Lösungen, in deren Umgebung es für willkürlich, aber genügend wenig veränderte Randwerte nicht mehr *eine*, sondern *mehrere* Lösungsflächen gibt. Der Verzweigungscharakter hängt davon ab, ob die Jacobische derivierte Differentialgleichung bei den Randwerten Null von Null verschiedene Lösungen hat oder nicht, eine Frage, die leicht zu entscheiden ist, indem man sie nach Hilbert auf die Frage nach der Existenz von Nulllösungen einer linearen Integralgleichung zurückführt.

Auch die von Poincaré entdeckte Bifurkation in der Theorie der rotierenden Gleichgewichtsfiguren ergibt sich, wie ich zeigen werde, als solche Verzweigung einer nichtlinearen Integralgleichung.

Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen werden in der vorliegenden Untersuchung nur folgende der Fredholmschen Fundamentalsätze benutzt: Es sei der „*Kern*" $K(s, t)$ eine für $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ definierte, stetige, reelle oder komplexe Funktion. Man bezeichne als „*Nulllösung in s*" des Kernes jede nicht identisch verschwindende stetige Funktion $\varphi(s)$, welche identisch in s der Gleichung

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

genügt, und als „*Nulllösung in t*" jede nicht identisch verschwindende stetige Funktion $\psi(t)$, welche identisch in t die Gleichung

$$\psi(t) - \int_a^b K(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

erfüllt.

Dann gelingt es die Gesamtheit der Nulllösungen zu bestimmen, und zwar ist die Anzahl der linear unabhängigen Nulllösungen in s stets endlich und gleich der Anzahl der linear unabhängigen Nulllösungen in t.

Ist diese Anzahl gleich Null, d. h. gibt es überhaupt keine Nulllösungen,

---

*) Die Erklärung dieses Terminus findet sich unten.

so läßt sich ein „lösender Kern" bestimmen d. h. eine stetige Funktion $\Gamma(s, t)$, *so daß die Gleichungen*

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

$$f(s) + \int_a^b \Gamma(s, t)\, f(t)\, dt = \varphi(s)$$

wechselseitig auseinander folgen.

Außer dem ursprünglichen Fredholmschen*) Beweis für diese Sätze und dem von Hilbert**) mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln geführten, möchte ich den von mir im II. Teil***) gegebenen sehr elementaren Beweis erwähnen, dessen Methode in der vorliegenden Untersuchung wiederkehrt, indem sie sich auch für die Lösung der nichtlinearen Integralgleichung als valent erweist.

---

*) Acta Mathematica Bd. 27.

**) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" IV$^{\text{te}}$ und V$^{\text{te}}$ Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., 1906, S. 157—227 und S. 433—480.

***) Math. Ann. Bd. 64. Es ist hier vielleicht der Ort, dieses Auflösungsverfahren durch einige Worte zu ergänzen. Es besteht in einer höchst elementaren Reduktion der linearen Integralgleichung auf n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, sobald ein System von n Paaren stetiger Funktionen

$$\alpha_1(s),\ \beta_1(t);\ \alpha_2(s),\ \beta_2(t);\ \cdots;\ \alpha_n(s),\ \beta_n(t)$$

ermittelt ist, welches den Kern $K(s, t)$ so weit approximiert, daß

$$\int_a^b\int_a^b \Big(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu(s)\, \beta_\nu(t)\Big)^2 ds\, dt < 1$$

wird.

Was ich nun an dieser Stelle hinzufügen möchte, ist folgende einfache Herstellung eines solchen Systems von Funktionenpaaren $\alpha_\nu(s)$, $\beta_\nu(t)$:

Man teile das von t durchlaufene Gebiet in n Teilgebiete $i_1, i_2, \cdots, i_n$ und wähle in jedem derselben einen Punkt $t_1, t_2, \cdots, t_n$. Dann setze man für $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$

$$\alpha_\nu(s) = K(s, t_\nu)$$

und $\beta_\nu(t)$ gleich derjenigen stückweise stetigen Funktion, welche innerhalb des Teilgebiets i_ν gleich 1 und in allen anderen Teilgebieten gleich Null ist.

Da über die Größe von n frei verfügt werden kann, so folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit des Kernes, daß die Teilgebiete i_ν so klein gewählt werden können, daß bei dieser Bestimmung der Funktionen $\alpha_\nu(s)$, $\beta_\nu(t)$

$$\Big| K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu(s)\, \beta_\nu(t) \Big| \leq \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} a \leq s \leq b \\ a \leq t \leq b \end{pmatrix}$$

wird, wo ε eine vorgeschriebene, beliebig kleine, von Null verschiedene positive Größe

§ 1.

Die Integralpotenzreihe einer Argumentfunktion.

Unter einem *Integralpotenzglied* m^{ten} *Grades* der für $a \leqq s \leqq b$ definierten stetigen Argumentfunktion $u(s)$ verstehen wir einen Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad u(s)^{\alpha_0} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1, t_2, \cdots, t_\varrho) u(t_1)^{\alpha_1} u(t_2)^{\alpha_2} \cdots u(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} dt_1 \, dt_2 \cdots dt_\varrho,$$

wo die reelle oder komplexe Koeffizientenfunktion K für

$$a \leqq s \leqq b, \; a \leqq t_1 \leqq b, \; a \leqq t_2 \leqq b, \cdots, a \leqq t_\varrho \leqq b$$

stetig definiert ist, und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ eine *beliebige* Anzahl ganzer Zahlen bezeichnen, welche den Bedingungen genügen

$$(2) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = m, \; \alpha_0 \geqq 0, \; \alpha_1 \geqq 1, \; \alpha_2 \geqq 1, \cdots, \alpha_\varrho \geqq 1.$$

So soll auch jeder Ausdruck von der Form

$$(3) \qquad K(s) u(s)^m,$$

wo die Koeffizientenfunktion $K(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig definiert ist, als ein Integralpotenzglied m^{ten} Grades aufgefaßt werden, in welchem $\alpha_0 = m$ und $\varrho = 0$ ist. Durch Vertauschung der Integrationsbuchstaben setzen wir ferner als erreicht voraus, daß

$$(4) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots \geqq \alpha_\varrho$$

ist. Wir bezeichnen zwei Integralpotenzglieder m^{ten} Grades dann als von gleichem *Typus*, wenn ihre Exponentenfolgen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ übereinstimmen. Die Anzahl aller Typen m^{ten} Grades ist dann endlich.

Ferner bestehen, wie leicht ersichtlich, die Sätze:

I. Das Produkt eines Integralpotenzgliedes m^{ten} mit einem solchen n^{ten} Grades, läßt sich als Integralpotenzglied $m + n^{\text{ten}}$ Grades schreiben.

II. Ersetzt man in einem Integralpotenzglied m^{ten} Grades die Argumentfunktion $u(s)$ durch ein Integralpotenzglied n^{ten} Grades von $v(s)$, so läßt sich das Resultat als ein Integralpotenzglied $m \cdot n^{\text{ten}}$ Grades von $v(s)$ schreiben.

Unter einer *Integralpotenzform* m^{ten} Grades verstehen wir die Summe einer endlichen Anzahl von Integralpotenzgliedern m^{ten} Grades, welche wir

---

bedeutet. Wählt man ε genügend klein, so folgt aus dieser letzten Ungleichung die zu beweisende a fortiori. Daß die benutzten Funktionen β_ν nicht stetig, sondern bloß stückweise stetig sind, ändert nichts.

In der erwähnten Abhandlung bezieht sich alles auf das reelle Gebiet, und es wäre daher noch zu bemerken, daß die Zulassung komplexer Kerne und Funktionen keinerlei Änderung in den Sätzen oder der Beweisanordnung nötig macht.

alle als von verschiedenem Typus voraussetzen können, da Glieder von gleichem Typus durch Addition der Koeffizientenfunktionen in eines zusammengezogen werden können.

Eine von $u(s)$ unabhängige Funktion von s läßt sich auffassen als eine Integralpotenzform 0^{ten} Grades der Argumentfunktion $u(s)$.

Die Summe zweier Integralpotenzformen m^{ten} Grades gibt wieder eine solche. Ferner bestehen wie für Integralpotenz*glieder* die oben angegebenen Sätze I und II auch für Integralpotenz*formen*.

Wir wollen im folgenden Integralpotenzformen m^{ten} Grades der Argumentfunktion $u(s)$ durch Symbole wie

$$(5)\qquad W_m\binom{s}{u},\quad V_m\binom{s}{u},\quad P_m\binom{s}{u}$$

bezeichnen. Bedeutet p eine Konstante, so besteht die Gleichung

$$(6)\qquad W_m\binom{s}{pu} = p^m W_m\binom{s}{u}.$$

Ersetzt man $u(s)$ durch 1, so ergibt sich

$$(7)\qquad W_m\binom{s}{p} = p^m W_m\binom{s}{1}.$$

Durch die Symbole

$$(8)\qquad |W|_m\binom{s}{u},\quad |V|_m\binom{s}{u},\quad |P|_m\binom{s}{u}$$

bezeichnen wir dann diejenigen Integralpotenzformen, welche aus den Formen (5) hervorgehen, wenn sämtliche Koeffizientenfunktionen durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Ferner sollen durch die Symbole

$$(9)\qquad \begin{gathered} \tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{w},\ \cdots,\ (\widetilde{u+w}),\ \cdots \\ \widetilde{W}_m,\ \widetilde{V}_m,\ \widetilde{P}_m,\ |\widetilde{W}|_m,\ |\widetilde{V}|_m,\ |\widetilde{P}|_m \end{gathered}$$

die Maxima der absoluten Beträge der stetigen Funktionen

$$u(s),\ v(s),\ w(s),\ \cdots,\ u(s)+w(s),\ \cdots$$

$$W_m\binom{s}{1},\ V_m\binom{s}{1},\ P_m\binom{s}{1},\quad |W|_m\binom{s}{1},\ |V|_m\binom{s}{1},\ |P|_m\binom{s}{1}$$

für $a \leqq s \leqq b$ bezeichnet werden. Dann folgen bei Berücksichtigung von (7) die Relationen

$$(10)\qquad \left|W_m\binom{s}{u}\right| \leqq |W|_m\binom{s}{|u|} \leqq |W|_m\binom{s}{\tilde{u}} = |W|_m\binom{s}{1}\tilde{u}^m \leqq |\widetilde{W}|_m \tilde{u}^m.$$

Unter einer *regulär* konvergenten *Integralpotenzreihe* $\mathfrak{P}\binom{s}{u}$ der Argumentfunktion $u(s)$ verstehen wir eine Reihe von der Form

$$(11)\qquad W_0(s) + W_1\binom{s}{u} + W_2\binom{s}{u} + \cdots + W_m\binom{s}{u} + \cdots \text{ ad inf.,}$$

für welche

(12) $$|\widetilde{W}|_0 + |\widetilde{W}|_1 \bar{u} + |W|_2 \bar{u}^2 + \cdots + |\widetilde{W}|_m \bar{u}^m + \cdots$$

konvergiert. Konvergiert also eine Integralpotenzreihe regulär für eine bestimmte Funktion $u(s)$, so konvergiert sie wegen (10) auch *absolut* und *gleichmäßig* und stellt mithin eine *stetige* Funktion von s dar. Sie konvergiert ferner regulär für jede andere Argumentfunktion, deren absoluter Betrag ein kleineres Maximum hat.

Ebenso folgt leicht: Die Summe und das Produkt zweier regulär konvergenten Integralpotenzreihen einer Argumentfunktion geben wieder regulär konvergente Integralpotenzreihen.

§ 2.

Die Integralpotenzreihe mehrerer Argumentfunktionen.

Unter einem *Integralpotenzglied* der beiden für $a \leqq s \leqq b$ definierten stetigen Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ von m^{tem} Grade in $u(s)$ und von n^{tem} in $v(s)$ verstehen wir einen Ausdruck von der Form

(13) $$u(s)^{\alpha_0} v(s)^{\beta_0} \int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1, t_2, \cdots, t_\varrho)\, u(t_1)^{\alpha_1} v(t_1)^{\beta_1} u(t_2)^{\alpha_2} v(t_2)^{\beta_2} \cdots$$
$$\cdots u(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} v(t_\varrho)^{\beta_\varrho}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_\varrho,$$

wo die reelle oder komplexe Koeffizientenfunktion K eine stetige Funktion ihrer Argumente ist, und $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_\varrho, \beta_\varrho$ eine *beliebige* Anzahl von Paaren nicht negativer ganzer Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen genügen

(14) $$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = m \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\varrho = n \\ \alpha_1 + \beta_1 \geqq 1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geqq 1 \\ \vdots \\ \alpha_\varrho + \beta_\varrho \geqq 1. \end{cases}$$

So soll auch der Ausdruck

$$K(s)\, u(s)^m\, v(s)^n,$$

wo die Koeffizientenfunktion $K(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig definiert ist, als ein Integralpotenzglied m^{ten} Grades in $u(s)$ und n^{ten} in $v(s)$ aufgefaßt werden. Wie im vorigen Paragraphen kann man als durch Vertauschung der Integrationsbuchstaben erreicht voraussetzen, daß

(15) $$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots \geqq \alpha_\varrho$$

ist, und daß, wenn $\alpha_\mu = \alpha_\nu$ und $\nu > \mu$ ist, $\beta_\mu \geqq \beta_\nu$ ist.

Wir bezeichnen zwei Integralpotenzglieder der beiden Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ als von gleichem Typus, wenn die Exponenten $\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_\varrho\beta_\varrho$ in beiden übereinstimmen. Die Anzahl aller Typen von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$ ist dann endlich.

Unter einer *Integralpotenzform* der Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$ verstehen wir die Summe einer endlichen Anzahl von Integralpotenzgliedern von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$, welche wir alle als von verschiedenem Typus voraussetzen dürfen, da Glieder von gleichem Typus durch Addition der Koeffizientenfunktionen in eines zusammengezogen werden können.

Die Summe zweier Integralpotenzformen, deren jede in $u(s)$ von m^{tem} und in $v(s)$ von n^{tem} Grade ist, gibt wieder eine solche. Das Produkt einer Integralpotenzform m^{ten} Grades in $u(s)$ und n^{ten} Grades in $v(s)$ mit einer Integralpotenzform m'^{ten} Grades in $u(s)$ und n'^{ten} Grades in $v(s)$ gibt eine Integralpotenzform $m+m'^{\text{ten}}$ Grades in $u(s)$ und $n+n'^{\text{ten}}$ Grades in $v(s)$.

Wir bezeichnen Integralpotenzformen von m^{tem} Grade in $u(s)$ und von n^{tem} Grade in $v(s)$ durch Symbole wie

$$(16)\qquad W_{mn}\binom{s}{u\ v},\quad V_{mn}\binom{s}{u\ v},\quad P_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Bedeuten p und q Konstante, so bestehen die Gleichungen

$$(17)\qquad W_{mn}\binom{s}{pu\ qu} = p^m q^n W_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Ersetzt man hier $u(s)$ und $v(s)$ durch 1, so ergibt sich

$$(18)\qquad W_{mn}\binom{s}{p\ q} = p^m q^n W_{mn}\binom{s}{1\ 1}.$$

Wir bezeichnen ferner wie im vorigen Paragraphen durch die Symbole

$$(19)\qquad |W|_{mn}\binom{s}{u\ v},\quad |V|_{mn}\binom{s}{u\ v},\quad |P|_{mn}\binom{s}{u\ v}$$

diejenigen Integralpotenzformen, welche aus den Formen (16) hervorgehen, wenn sämtliche Koeffizientenfunktionen durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, und durch die Symhole

$$(20)\qquad \widetilde{W}_{mn},\ \widetilde{V}_{mn},\ \widetilde{P}_{mn},\ |\widetilde{W}|_{mn},\ |\widetilde{V}|_{mn},\ |\widetilde{P}|_{mn}$$

die Maxima der absoluten Beträge der stetigen Funktionen

$$W_{mn}\binom{s}{1\ 1},\ V_{mn}\binom{s}{1\ 1},\ P_{mn}\binom{s}{1\ 1},\ |W|_{mn}\binom{s}{1\ 1},\ |V|_{mn}\binom{s}{1\ 1},\ |P|_{mn}\binom{s}{1\ 1}.$$

Bei Berücksichtigung von (18) ergeben sich dann die Relationen

$$(21)\quad \left|W_{mn}\binom{s}{u\ v}\right| \leqq |W|_{mn}\binom{s}{|u|\ |v|} \leqq |W|_{mn}\binom{s}{\tilde{u}\ \tilde{v}} = |W|_{mn}\binom{s}{1\ 1}\tilde{u}^m\tilde{v}^n \leqq |\widetilde{W}|_{mn}\tilde{u}^m\tilde{v}^n.$$

Unter einer regulär konvergenten *Integralpotenzreihe* der beiden Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\ v}$$

verstehen wir eine Reihe von der Form

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} W_{mn}\binom{s}{u\ v}, \tag{22}$$

für welche

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} |\widetilde{W}|_{mn}\,\tilde{u}^m\,\tilde{v}^n \tag{23}$$

konvergiert. Wenn daher eine Integralpotenzreihe zweier Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ regulär konvergiert, so konvergiert sie wegen (21) auch absolut und gleichmäßig und stellt mithin eine stetige Funktion von s dar; sie konvergiert ferner auch regulär für jedes andere Paar von Argumentfunktionen, deren absolute Beträge bezüglich kleinere Maxima haben.

Aus dem Vorstehenden ist leicht ersichtlich, wie die Integralpotenzform und die regulär konvergente Integralpotenzreihe einer beliebigen endlichen Anzahl von Argumentfunktionen zu definieren sind. Ebenso folgt leicht, daß die Summe und das Produkt zweier regulär konvergenten Integralpotenzreihen mehrerer Argumentfunktionen wieder solche geben.

§ 3.

Integralpotenzreihen von Integralpotenzreihen.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen ergibt sich ohne Schwierigkeit:

Es sei

$$W(s) = W_0(s) + W_1\binom{s}{u} + W_2\binom{s}{u} + \cdots + W_m\binom{s}{u} + \cdots, \tag{24}$$

wo die Integralpotenzreihe rechts für $\tilde{u} \leq h$ regulär konvergiere. Es sei ferner

$$u(s) = V_1\binom{s}{v} + V_2\binom{s}{v} + \cdots + V_m\binom{s}{v} + \cdots, \tag{25}$$

wo in der letzten Integralpotenzreihe das Glied 0^{ten} Grades $V_0(s)$ als identisch verschwindend vorausgesetzt wird. Dann konvergiert die Integralpotenzreihe der Argumentfunktion $v(s)$, welche sich durch Einführung von (25) in (24) *formal* ergibt, regulär und stellt $W(s)$ dar, sobald (25) regulär konvergiert und

$$|\widetilde{V}|_1\,\tilde{v} + |\widetilde{V}|_2\,\tilde{v}^2 + \cdots + |\widetilde{V}|_m\,\tilde{v}^m + \cdots \leq h$$

ist.

Dieses Theorem gilt auch für Integralpotenzreihen mehrerer Argumentfunktionen. Wenn z. B. die Argumentfunktionen einer Integralpotenzreihe zweier Argumentfunktionen durch Integralpotenzreihen dreier Argumentfunktionen ersetzt werden, so lautet das Theorem: Es sei

$$H(s) = \mathfrak{P}\binom{s}{u\ v}, \tag{26}$$

wo die Integralpotenzreihe rechts für $\tilde{u} \leqq h$, $\tilde{v} \leqq k$ regulär konvergiere. Es sei ferner

$$u(s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} W_{mnp}\binom{s}{w_1\ w_2\ w_3}, \tag{27}$$

$$v(s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} V_{mnp}\binom{s}{w_1\ w_2\ w_3}, \tag{28}$$

wo in den Integralpotenzreihen (27) und (28) die Glieder 0^{ten} Grades in w_1, w_2 und w_3 $W_{000}(s)$, $V_{000}(s)$ als identisch verschwindend vorausgesetzt werden. Dann konvergiert die Integralpotenzreihe der Argumentfunktionen $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$, welche sich durch Einführung von (27) und (28) in (26) *formal* ergibt, regulär und stellt $H(s)$ dar, sobald (27) und (28) regulär konvergieren und

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} |\widetilde{W}|_{mnp}\, \tilde{w}_1^m\, \tilde{w}_2^n\, \tilde{w}_3^p \leqq h,$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} |\widetilde{V}|_{mnp}\, \tilde{w}_1^m\, \tilde{w}_2^n\, \tilde{w}_3^p \leqq k$$

ist.

§ 4.

Umkehrung der Integralpotenzreihe.

Es sei für $a \leqq s \leqq b$ eine Integralpotenzreihe

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\ v} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} W_{mn}\binom{s}{u\ v} \tag{29}$$

gegeben, welche für

$$\tilde{u} < h, \quad \tilde{v} < k \tag{30}$$

regulär konvergiere. Es sei ferner das Glied 0^{ten} Grades $W_{00}(s) = 0$, so daß also identisch in s die Gleichung

$$\mathfrak{P}\binom{s}{0\ 0} = 0 \tag{31}$$

bestehe.

Wir stellen uns das Problem, bei gegebener Funktion $v(s)$ die Funktion $u(s)$ so zu bestimmen, daß identisch in s die Gleichung

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\ v} = 0 \tag{32}$$

erfüllt wird.

Wie beim Umkehrungsproblem gewöhnlicher Potenzreihen haben wir zunächst die Form 1^{ten} Grades in $u(s)$ und 0^{ten} Grades in $v(s)$

$$W_{10}\binom{s}{u\ v} = A(s)\,u(s) + \int_a^b B(s,t)\,u(t)\,dt \tag{33}$$

zu betrachten. Wir machen nun die Voraussetzung, daß der absolute Betrag der Koeffizientenfunktion $A(s)$ für das ganze Definitionsintervall $a \leqq s \leqq b$ größer als eine von Null verschiedene positive Konstante ist. Dann können wir durch Division der Integralpotenzreihe durch diese Koeffizientenfunktion bewirken, daß in der resultierenden Integralpotenzreihe die betreffende Koeffizientenfunktion gleich 1 wird. Diese Voraussetzung entspricht bei den nachfolgenden Anwendungen auf Differentialgleichungen der Annahme, daß die Lösungen in der Umgebung regulärer Stellen der in der Differentialgleichung explizite vorkommenden Koeffizienten behandelt werden. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir also ohne die Allgemeinheit einzuschränken annehmen, daß

$$W_{10}\binom{s}{u\ v} = u(s) - \int_a^b C(s,t)\,u(t)\,dt \tag{34}$$

ist.

Wie bei den Fundamentaltheoremen über die Funktionaldeterminante und die Existenz impliziter Funktionen hat man hier zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

1. **Fall:** Es gebe keine von Null verschiedene stetige Funktion $\varphi(s)$, so daß für $a \leqq s \leqq b$

$$\varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{35}$$

ist, oder mit anderen Worten: der Kern $C(s,t)$ habe keine Nulllösung.*) Dieser Fall entspricht dem Fall der nicht verschwindenden Funktionaldeterminante d. h. dem Fall, wo das lineare homogene Gleichungssystem, dessen Koeffizienten die Funktionaldeterminante bilden, keine von Null verschiedene Lösung hat.

*) Siehe die letzten Sätze der Einleitung.

2. Fall: Der Kern habe Nulllösungen d. h. die Gleichung (35) lasse von Null verschiedene Lösungen zu. Dieser Fall entspricht dem Fall der verschwindenden Funktionaldeterminante.

In beiden Fällen läßt sich unser Problem der Auflösung der Funktionalgleichung (32) erledigen. Im ersten Fall ist die Lösung eindeutig; im zweiten gibt es, wie die Analogie vermuten läßt, in der Tat *funktionale* Verzweigungen, für welche wir die den Puiseuxschen Sätzen entsprechenden entwickeln werden.

§ 5.

Der Fall der eindeutigen Lösbarkeit.

Wir wenden uns zur Behandlung des ersten Falles, d. h. wir machen also die Voraussetzung, daß die Gleichung (35) keine von Null verschiedene Lösung habe.

Dann lassen sich zwei positive Größen $h' \leqq h$ und $k' \leqq k$ so bestimmen, daß, wenn die stetigen Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ den Beschränkungen

(36) $$\bar{u} \leqq h', \quad \bar{v} \leqq k'$$

unterworfen werden, es zu jeder Funktion $v(s)$ eine und nur eine Funktion $u(s)$ gibt, welche unsere Gleichung (32) erfüllt. Diese Lösung $u(s)$ läßt sich als regulär konvergente Integralpotenzreihe der Argumentfunktion $v(s)$ darstellen.

Beweis: Unsere Gleichung (32) läßt sich schreiben

(37) $$u(s) - \int_a^b C(s,t)\, u(t)\, dt = -W_{01}\binom{s}{u\ v} - \sum_{m+n \geqq 2} W_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Da nun der Kern $C(s,t)$ gemäß Voraussetzung keine Nulllösung hat, so läßt sich nach dem Fredholmschen*) Fundamentaltheorem zu ihm ein *lösender* Kern $\Gamma(s,t)$ bestimmen. D. h. es läßt sich eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte stetige Funktion $\Gamma(s,t)$ konstruieren, so daß die Gleichungen

(38) $$\left.\begin{aligned} \varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\, \varphi(t)\, dt &= f(s) \\ f(s) + \int_a^b \Gamma(s,t)\, f(t)\, dt &= \varphi(s) \end{aligned}\right\} (a \leqq s \leqq b)$$

wechselseitig auseinander folgen. Durch Einführung des lösenden Kernes erhalten wir die mit der Gleichung (37) gleichbedeutende Gleichung

*) Siehe die Schlußsätze der Einleitung.

$$(39)\qquad u(s) = -W_{01}\binom{s}{u\,v} - \int_a^b \Gamma(s,t)\,W_{01}\binom{t}{u\,v}\,dt$$
$$+\sum_{m+n\geq 2}\left(-W_{mn}\binom{s}{u\,v} - \int_a^b \Gamma(s,t)\,W_{mn}\binom{t}{u\,v}\,dt\right).$$

Wir setzen für alle Werte von m und n

$$(40)\qquad -W_{mn}\binom{s}{u\,v} - \int_a^b \Gamma(s,t)\,W_{mn}\binom{t}{u\,v}\,dt = P_{mn}\binom{s}{u\,v}$$

und schreiben, um die Unabhängigkeit von $P_{01}\binom{s}{u\,v}$ von der Argumentfunktion $u(s)$ hervorzuheben, statt $P_{01}\binom{s}{u\,v}$ $P_1\binom{s}{v}$. Dann schreibt sich die Gleichung (39)

$$(41)\qquad u(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\,v},$$

wo die Integralpotenzreihe auf der rechten Seite ebenfalls regulär konvergiert, wenn die Ungleichungen (30) erfüllt sind.

Jetzt setzen wir

$$(42)\qquad V_1\binom{s}{v} = P_1\binom{s}{v}$$

und bestimmen für alle Werte von m $V_m\binom{s}{v}$, indem wir auf der rechten Seite der Gleichung (41) für $u(s)$ die Summe

$$(43)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} V_\nu\binom{s}{v}$$

einführen und nur die Integralpotenzglieder m^{ten} Grades in $v(s)$ beibehalten. Die so bestimmte Integralpotenzreihe

$$(44)\qquad u(s) = \sum_{m=1}^{m=\infty} V_m\binom{s}{v}$$

genügt *formal* der Gleichung (41) und mithin auch der Gleichung (32). Diese eben auseinandergesetzte Bildungsregel der Reihe (44) entspricht offenbar genau dem bekannten Auflösungsverfahren einer gewöhnlichen Gleichung von der Form

$$u = av + bu^2 + cuv + dv^2 + \cdots$$

nach u.

Wir wollen jetzt beweisen, daß es eine von Null verschiedene positive Konstante k_1 gibt, so daß für

$$(45)\qquad \tilde{v} \leq k_1$$

die Reihe (44) regulär konvergiert, d. h. so, daß unter der Voraussetzung (45)

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} |\widetilde{V}|_m \tilde{v}^m \tag{46}$$

konvergiert.

Gehen wir statt von der Gleichung (41) von der Gleichung

$$u'(s) = |P|_1 \binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} |P|_{mn} \binom{s}{u' \; v} \tag{47}$$

aus, und entwickeln wir dann nach dem eben angegebenen Verfahren $u'(s)$ in die der Gleichung (47) *formal* genügende Integralpotenzreihe

$$u'(s) = \sum_{m=1}^{m=\infty} V'_m \binom{s}{v}, \tag{48}$$

so ist jede Koeffizientenfunktion dieser letzten Reihe *reell* und *nicht negativ* und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die entsprechende Koeffizientenfunktion der zu untersuchenden Reihe (44). Mithin ist

$$\widetilde{V}'_m \geq |\widetilde{V}|_m. \tag{49}$$

Ersetzen wir in der Reihe (48) $v(s)$ durch die Konstante q, so geht diese Reihe gemäß (7) in die Potenzreihe

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} V'_m \binom{s}{1} q^m \tag{50}$$

über. Diese Reihe, für $u'(s)$ eingeführt, genügt mithin *formal* der Gleichung

$$u'(s) = |P|_1 \binom{s}{1} q + \sum_{m+n>2} |P|_{mn} \binom{s}{u' \; 1} q^n. \tag{51}$$

Man hat also

$$V'_1 \binom{s}{1} = |P|_1 \binom{s}{1} \tag{52}$$

und um $V'_m \binom{s}{1}$ zu bestimmen, hat man auf der rechten Seite der Gleichung (51) für $u'(s)$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} V'_\nu \binom{s}{1} q^\nu \tag{53}$$

einzuführen und dann $V'_m \binom{s}{1}$ gleich dem Koeffizienten von q^m zu setzen.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$p = |\widetilde{P}|_1 q + \sum_{m+n \geq 2} |\widetilde{P}|_{mn} p^m q^n, \tag{54}$$

deren rechte Seite wegen der vorausgesetzten regulären Konvergenz der Reihe (29) für $p \leqq h$, $q \leqq k$ konvergiert. Gemäß dem bekannten Funda-

mentaltheorem über die Existenz impliziter Funktionen gibt es eine Potenzreihe

(55) $$p = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m q^m,$$

welche die Gleichung (54) befriedigt und für $q \leqq k_1$ konvergiert, wo k_1 eine von Null verschiedene positive Konstante bedeutet. Der uns obliegende Konvergenzbeweis für die Reihe (46) ist also wegen der Ungleichungen (49) geliefert, wenn die Ungleichungen

(56) $$\widetilde{V}'_m \leqq A_m \qquad (m = 1, 2, \cdots \text{ ad inf.})$$

nachgewiesen werden. Aus (54), (55), (52) folgt nun

$$A_1 = |\widetilde{P}|_1 = \widetilde{V}'_1.$$

Wir haben also nur noch zu beweisen, daß aus den Ungleichungen

(57) $$\widetilde{V}'_\nu \leqq A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots m-1)$$

die Ungleichung

(58) $$\widetilde{V}'_m \leqq A_m$$

sich ergibt.

Aus dem oben angegebenen Verfahren, $V'_m\binom{s}{1}$ aus der Gleichung (51) zu bestimmen, folgt bei Berücksichtigung von (57), daß $V'_m\binom{s}{1}$ für keinen Wert von s größer ist, als der Koeffizient von q^m, den man erhält, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (51) für $u'(s)$ statt der Summe (53) die Summe

(59) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} A_\nu q^\nu = S_{m-1}$$

einführt. Aus den Gleichungen

(60) $$|P|_{\mu\nu}\binom{s}{S_{m-1}\ 1} q^\nu = |P|_{\mu\nu}\binom{s}{1\ 1} S^\mu_{m-1} q^\nu,$$

(61) $$|P|_{\mu\nu}\binom{s}{1\ 1} \leqq |\widetilde{P}|_{\mu\nu}$$

ergibt sich nun leicht, daß der Koeffizient von q^m nicht kleiner wird, wenn man die Summe (59) — statt auf der rechten Seite von (51) für $u'(s)$ — auf der rechten Seite von (54) für p einführt. Der so gebildete Koeffizient von q^m ist aber gleich A_m. Also ist für jeden Wert von s

$$A_m \geqq V'_m\binom{s}{1}$$

und mithin auch

$$A_m \geqq \widetilde{V}'_m$$

was zu beweisen war.

Die Reihe (44) konvergiert also für $\tilde{v} \leqq k_1$ regulär und genügt *formal* der Gleichung (32), deren rechte Seite für $\tilde{u} \leqq h$, $v \leqq k$ regulär konvergiert. Wählen wir nun die positive Größe k_2 so, daß

(62) $$k_2 \leqq k_1, \quad k_2 \leqq k,$$

und daß

(63) $$\sum_{m=1}^{m=\infty} |\widetilde{V}|_m k_2^m \leqq h$$

ist, so stellt gemäß § 3 nach Einführung von (44) in (32) die *formale* Entwicklung der rechten Seite von (32) nach Integralpotenzgliedern von $v(s)$ den Wert der rechten Seite wirklich dar.

Die Reihe (44) ist also für

(64) $$\tilde{v} \leqq k_2$$

eine Lösung unserer Gleichung (32).

Jetzt wollen wir beweisen, *daß es eine positive Größe $h' \leqq h$ gibt, so daß, wenn die Ungleichungen*

(65) $$\tilde{u} \leqq h', \quad \tilde{v} \leqq h'$$

bestehen, unsere Gleichung (32) *nicht mehr als eine einzige Lösung haben kann.*

Es seien $u(s)$ und $u(s) + w(s)$ zwei Lösungen unserer Gleichung. Dann wäre gemäß (41)

(66) $$u(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\ v},$$

(67) $$u(s) + w(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} P_{mn}\binom{s}{u+w\ \ v}.$$

Denkt man sich auf der rechten Seite der Gleichung (67) jedes Integralpotenzglied nach Integralpotenzgliedern von $w(s)$ entwickelt, und subtrahiert man dann die Gleichung (66) von der Gleichung (67), so ist leicht ersichtlich, daß der absolute Betrag dieser Differenz den Ausdruck

(68) $$\sum_{m+n \geq 2} |P|_{mn}\binom{s}{1\ 1}[(\tilde{u}+\tilde{w})^m \tilde{v}^n - \tilde{u}^m \tilde{v}^n] \leqq \tilde{w} \sum_{m+n \geq 2} |\widetilde{P}|_{mn} m(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n$$

nicht überschreitet. Es ist also für jeden Wert von s

(69) $$|w(s)| \leqq \tilde{w} \sum_{m+n \geq 2} |\widetilde{P}|_{mn} m(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n,$$

wo die Reihe rechts wegen der regulären Konvergenz der Reihe (29) für $\tilde{u}+\tilde{w} \leqq h$, $\tilde{v} \leqq k$ als Differentialquotient einer konvergenten Potenzreihe konvergiert. Aus (69) folgt

(70) $$\tilde{w} \leqq \tilde{w} \sum_{m+n \geq 2} m\ \widetilde{P}_{mn}(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n.$$

Wäre nun $w(s)$ nicht identisch gleich Null, also $\tilde{w}$ von Null verschieden, so würde hieraus sich ergeben

$$(71) \qquad 1 \leqq \sum_{m+n \geqq 2} m \,|\widetilde{P}|_{mn} (\tilde{u} + \tilde{w})^{m-1} \tilde{v}^n.$$

Da nun die Reihe rechts für $\tilde{u} + \tilde{w} = 0$, $\tilde{v} = 0$ verschwindet, so folgt leicht, daß es eine von Null verschiedene positive Konstante $h' \leqq h$ gibt, so daß die Gleichung (71) für $(\widetilde{u+w}) \leqq h'$, $\tilde{u} \leqq h'$, $\tilde{v} \leqq h'$ unmöglich ist, was zu beweisen war.

Wir haben also bewiesen, daß für $\tilde{v} \leqq k_2$ die Integralpotenzreihe (44) regulär konvergiert und eine Lösung der Gleichung (32) darstellt, und daß für $\tilde{u} \leqq h'$, $\tilde{v} \leqq h'$ die Gleichung (32) bei gegebenem $v(s)$ nur *eine einzige* Lösung haben kann. Jetzt bestimmen wir die positive Größe k' so, daß $k' \leqq k_2$, $k' \leqq h'$ ist, und daß für $\tilde{v} \leqq k'$ der Betrag der Reihe (44) h' nicht überschreitet. *Dann besteht das in den ersten Zeilen dieses Paragraphen ausgesprochene Theorem, dessen Beweis uns oblag.*

§ 6.

Verallgemeinerung des Falles der eindeutigen Lösbarkeit.

Ehe wir an die Behandlung des § 4 erwähnten zweiten Hauptfalles herantreten, wollen wir auf eine evidente Verallgemeinerung des im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten hinweisen. Es sei

$$(72) \qquad \mathfrak{P}\binom{s}{u\, v_1\, v_2 \cdots v_n}$$

eine für

$$(73) \qquad \tilde{u} \leqq h,\ \tilde{v}_1 \leqq k_1,\ \tilde{v}_2 \leqq k_2, \cdots, \tilde{v}_n \leqq k_n$$

regulär konvergente Integralpotenzreihe, und es bestehe die Gleichung

$$(74) \qquad \mathfrak{P}\binom{s}{0\, 0\, 0 \cdots 0} = 0.$$

Wir suchen bei gegebenen stetigen Funktionen $v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s)$ die stetige Funktion $u(s)$ so zu bestimmen, daß

$$(75) \qquad \mathfrak{P}\binom{s}{u\, v_1\, v_2 \cdots v_n} = 0 \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

wird.

Wir machen zunächst wie in § 4 die Voraussetzung, daß der Koeffizient von $u(s)$ in unserer Integralpotenzreihe durch Division zu 1 gemacht

werden kann. Dann erhält die Form 0^{ten} Grades in den Argumentfunktionen $v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s)$ und 1^{ten} Grades in $u(s)$ die Gestalt

$$u(s) - \int_a^b C(s,t)\,u(t)\,dt.$$

Wenn nun der erste Hauptfall besteht, d. h. wenn der Kern $C(s,t)$ keine Nulllösung hat, so gibt es positive Konstanten

$$h' \leqq h,\ k_1' \leqq k_1,\ k_2' \leqq k_2, \cdots, k_n' \leqq k_n,$$

so daß unter den Einschränkungen

(76) $$\bar{u} \leqq h',\ \bar{v}_1 \leqq k_1',\ \bar{v}_2 \leqq k_2', \cdots, \bar{v}_n \leqq k_n'$$

es zu jedem Funktionensystem $v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s)$ eine und nur eine stetige Funktion $u(s)$ gibt, welche unsere Gleichung (75) *erfüllt. Diese Lösung läßt sich als eine regulär konvergente Integralpotenzreihe der Argumentfunktionen $v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s)$ darstellen.*

Der Beweis dieses Theorems ist völlig derselbe wie der § 5 geführte. Das Theorem bleibt natürlich bestehen, wenn die Funktionen $v_1(s)$, $v_2(s), \cdots, v_n(s)$ teilweise oder sämtlich sich zu Konstanten spezialisieren, welche dann als Parameter aufgefaßt werden können. *Es ist also auch der Fall erledigt, wo die Integralpotenzreihe nach Potenzen einer Anzahl von Parametern so entwickelt ist, daß die Konvergenz im Sinne des* § 2 *eine reguläre ist.*

§ 7.

Transformation des Kernes.*)

Wir gehen jetzt zur Behandlung des in § 4 erwähnten zweiten Hauptfalles über. Die Gleichung

(35) $$\varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

lasse also von Null verschiedene Lösungen zu. Nach dem Fundamentaltheorem von Fredholm**) sind die Anzahlen der linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen (35) und der Gleichung

(77) $$\psi(t) - \int_a^b C(s,t)\,\psi(s)\,ds = 0$$

stets endlich und dieselben. Jede nicht identisch verschwindende Lösung

*) Bis auf unwesentliche Änderungen stimmt dieser Paragraph mit § 6 vom II. Teil, Math. Ann. Bd. 64 überein. Vergl. auch die diesbezüglichen Untersuchungen von Plemelj „Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung", Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. XV.

**) Siehe die Schlußsätze der Einleitung.

der Gleichung (35) heißt eine Nulllösung in s des Kernes $C(s, t)$, und jede nicht identisch verschwindende Lösung der Gleichung (77) eine Nulllösung in t. Es mögen nun

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_n(s),$$
$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \cdots,\ \psi_n(t)$$

vollständige Systeme linear unabhängiger Nulllösungen in s und t bilden, so daß alle Lösungen der Gleichung (35), d. h. alle Nulllösungen in s, in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \varphi_\nu(s), \tag{78}$$

und alle Lösungen der Gleichungen (77), d. h. alle Nulllösungen in t, in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \psi_\nu(t) \tag{79}$$

darstellbar sind, wo die c_ν willkürliche Konstanten bedeuten. Wir setzen

$$E(s, t) = C(s, t) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s)\, q_\nu(t), \tag{80}$$

wo die $p_\nu(s)$ und $q_\nu(t)$ reelle oder komplexe stetige Funktionen bedeuten. Ferner setze man

$$A_{\mu\nu} = \int_a^b \psi_\mu(r)\, p_\nu(r)\, dr, \tag{81}$$

$$B_{\mu\nu} = \int_a^b \varphi_\mu(r)\, q_\nu(r)\, dr. \tag{82}$$

I. *Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der neue Kern $E(s,t)$ keine Nulllösung mehr hat, darin, daß keine der beiden n-reihigen Determinanten $|A_{\mu\nu}|$ und $|B_{\mu\nu}|$ verschwindet.*

Dem Beweise dieses Kriteriums schicken wir noch eine zweite Formulierung voraus: Aus (78), (82) ergibt sich, daß das Nichtverschwinden der Determinante $|B_{\mu\nu}|$ damit gleichbedeutend ist, daß der Kern $C(s, t)$ keine zu allen q_ν orthogonale Nulllösung in s hat. Ebenso ergibt sich aus (79), (81), daß das Nichtverschwinden der Determinante $|A_{\mu\nu}|$ damit gleichbedeutend ist, daß der Kern keine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t hat. Wir können also unser Kriterium I noch in folgender Form aussprechen:

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr hat, besteht darin, daß der Kern $C(s, t)$ weder*

eine zu allen q_ν orthogonale Nulllösung in s noch eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t hat.

Beweis: Die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt unmittelbar aus ihrer zweiten Formulierung. Denn gäbe es z. B. eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t des Kernes $C(s, t)$, so wäre sie, wie die Verifikation in die Augen springen läßt, auch eine Nulllösung in t des Kernes $E(s, t)$.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, d. h. daß ihr Erfülltsein Nulllösungen von $E(s, t)$ ausschließt. Nehmen wir also an, der Kern $E(s, t)$ habe eine Nulllösung in s, $\varphi(s)$.

$$0 = \varphi(s) - \int_a^b E(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$(83) \qquad \varphi(s) - \int_a^b C(s, t)\, \varphi(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s) \int_a^b q_\nu(t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\psi_\mu(s)\, ds$ und integriert von a bis b, so verschwindet die linke Seite. Man erhält also die Gleichungen

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_{\mu\nu} \int_a^b q_\nu(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n).$$

Hieraus folgen wegen des vorausgesetzten Nichtverschwindens der Determinante $|A_{\mu\nu}|$ die Gleichungen

$$(84) \qquad \int_a^b q_\nu(t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Es müßte also wegen (83), (84) $\varphi(s)$ auch von $C(s, t)$ eine Nulllösung in s sein, welche wegen (84) zu allen q_ν orthogonal wäre, in Widerspruch zur zweiten Formulierung unserer Bedingung. q. e. d.

Setzen wir nun

$$(85) \qquad p_\mu = \overline{\psi}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n),$$

$$(80) \qquad q_\mu = \overline{\varphi}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n),$$

wo das Überstreichen wie gewöhnlich den Übergang zur konjugiert komplexen Größe bezeichnet, so ist unser Kriterium, wie die Formulierung II zeigt, erfüllt. Denn wäre z. B. $\chi(t)$ eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t von $C(s, t)$, so müßte auch $\chi(t)$ zu allen Funktionen von der Form $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \bar{c}_\nu p_\nu$ orthogonal sein, wo die c_ν beliebige Konstanten bedeuten. Wegen (85) und (79) sind aber in dieser Form die konjugierten Funktionen

zu allen Nulllösungen in t des Kernes $C(s, t)$ darstellbar, also auch $\bar{\chi}(t)$. Es müßte $\chi(t)$ also zu $\bar{\chi}(t)$ orthogonal sein, was unmöglich ist.

Wenn also die vollständigen Systeme linear unabhängiger Nulllösungen in s und in t des Kernes $C(s, t)$ von der Anzahl n sind, so läßt sich dieser Kern durch Hinzufügung von n Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t in einen solchen Kern transformieren, der keine Nulllösungen mehr hat. Durch Hinzufügung von weniger als n solchen Produkten kann dies nicht erreicht werden, denn diesen Fall erhält man bei der spezialisierenden Voraussetzung, daß einige der n Funktionen p_ν identisch gleich Null sein müssen. Dann aber verschwindet die Determinante $|A_{\mu\nu}|$.

§ 8.

Die Verzweigung bei einer einfachen Nulllösung.

Wir machen in diesem Paragraphen die Voraussetzung, daß die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (35) und mithin auch der Gleichung (77) gleich 1 ist. Die Gesamtheit aller Nulllösungen in s des Kernes $C(s, t)$ ist also in der Formel

$$c_1\,\varphi_1(s) \tag{87}$$

enthalten und die Gesamtheit aller Nulllösungen in t in der Formel

$$c_1\,\psi_1(t), \tag{88}$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet. Bezeichnen nun $p_1(s)$ und $q_1(t)$ zwei so gewählte stetige Funktionen, daß

$$\int_a^b \psi_1(r)\,p_1(r)\,dr \neq 0, \tag{89}$$

$$\int_a^b \varphi_1(r)\,q_1(r)\,dr \neq 0 \tag{90}$$

ist, und setzt man

$$E(s,t) = C(s,t) + p_1(s)\,q_1(t), \tag{91}$$

so hat gemäß dem Theorem des vorigen Paragraphen der neue Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr, und es läßt sich daher zu $E(s, t)$ ein lösender Kern $\mathsf{E}(s, t)$ bestimmen. Unsere Gleichung (32)

$$0 = \mathfrak{P}\binom{s}{u\,v} = u(s) - \int_a^b C(s,t)\,u(t)\,dt + W_{01}\binom{s}{u\,v} + \sum_{m+n\geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\,v}$$

läßt sich dann schreiben

$$u(s) - \int_a^b E(s,t)u(t)\,dt = -p_1(s)\int_a^b q_1(t)u(t)\,dt - W_{01}\binom{s}{u\,v} - \sum_{m+n\geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\,v}. \tag{92}$$

Führt man den lösenden Kern $\mathsf{E}(s,t)$ gemäß den Formeln (38) ein, so ergibt sich, wenn, ähnlich wie § 5 (40),

$$(93)\qquad -W_{mn}\binom{s}{u\ v}-\int_a^b \mathsf{E}(s,t)W_{mn}\binom{t}{u\ v}dt=P_{mn}\binom{s}{u\ v}$$

gesetzt wird, und für die von $u(s)$ unabhängige Form $P_{01}\binom{s}{u\ v}$ wieder $P_1\binom{s}{v}$ geschrieben wird,

$$(94)\quad u(s)=\Big[-p_1(s)-\int_a^b \mathsf{E}(s,t)p_1(t)\,dt\Big]\int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt+P_1\binom{s}{v}+\sum_{m+n\geq 2}P_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Diese letzte Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$(95)\qquad u(s)=\Big[-p_1(s)-\int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_1(t)\,dt\Big]x+P_1\binom{s}{v}+\sum_{m+n\geq 2}P_{mn}\binom{s}{u\ v},$$

$$(96)\qquad x=\int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt.$$

Die Gleichung (95) können wir gemäß dem Schlußsatz von § 6 nach $u(s)$ auflösen, indem wir x als Parameter betrachten. Wir erhalten, wenn die Ungleichungen

$$(97)\qquad \tilde{v}\leqq k_1,$$

$$(98)\qquad \tilde{u}\leqq h_1,$$

$$(99)\qquad |x|\leqq l_1$$

gefordert werden, wo $k_1\leqq k$, $h_1\leqq h$ und l_1 geeignet gewählte positive Konstanten bedeuten, eine eindeutig bestimmte Lösung

$$(100)\qquad u(s)=\sum_{m+n\geq 1}x^m\,V_n^m\binom{s}{v}.$$

Hierbei bedeutet $V_n^m\binom{s}{v}$ eine Integralpotenzform n^{ten} Grades in $v(s)$, und die Reihe (100), als Integralpotenzreihe von $v(s)$ und x betrachtet, konvergiert regulär und daher auch absolut und gleichmäßig. Führen wir (100) in (96) ein, so ergibt sich

$$(101)\qquad x=\sum_{m+n\geq 1}x^m\int_a^b q_1(t)\,V_n^m\binom{t}{v}dt.$$

Setzen wir

$$(102)\qquad \int_a^b q_1(t)\,V_0^m\binom{t}{v}dt=L_m,\qquad (m=1,2,\cdots \text{ ad inf.})$$

so sind die Konstanten $L_1, L_2, \cdots, L_n, \cdots$ von $v(s)$ unabhängig, und unsere Gleichung (101) nimmt die Gestalt an

(102) $$x = \sum_{m=1}^{m=\infty} L_m x^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b q_1(t) V_n^m \binom{t}{v} dt,$$

wo die zweite Summe als eine regulär konvergente, mit identisch verschwindenden $v(s)$ verschwindende Integralpotenzreihe von $v(s)$ und x betrachtet werden kann. Jetzt wollen wir beweisen, daß

(103) $$L_1 = 1$$

ist.

Gemäß (102) ist

(104) $$L_1 = \int_a^b q_1(t) V_0^1 \binom{t}{v} dt$$

und gemäß (95) und (100) ist

(105) $$V_0^1 \binom{s}{v} = -p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s, t) p_1(t) dt.$$

Nun ist, wenn $\varphi_1(s)$ wie in der Formel (87) eine Nulllösung in s von $C(s, t)$ bedeutet,

(106) $$0 = \varphi_1(s) - \int_a^b C(s,t) \varphi_1(t) dt = \varphi_1(s) - \int_a^b E(s,t) \varphi_1(t) dt$$
$$+ p_1(s) \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt.$$

Führt man hier gemäß (38) den lösenden Kern $\mathsf{E}(s, t)$ ein, so ergibt sich

$$\varphi_1(s) = \left[-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t) p_1(t) dt\right] \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt = V_0^1 \binom{s}{v} \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $q_1(s) ds$ und integriert von a bis b, so erhält man bei Berücksichtigung von (104)

$$\int_a^b q_1(s) \varphi_1(s) ds = L_1 \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt,$$

und hieraus ergibt sich wegen (90) die zu beweisende Gleichung (103).

Unsere Gleichung (102) ist also von der Form

(107) $$0 = \sum_{m=2}^{m=\infty} L_m x^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^m \binom{t}{v} q_1(t) dt,$$

wo die zweite Summe bei identisch verschwindendem $v(s)$ verschwindet.

Wir erhalten also bei gegebenem $v(s)$ alle ihrer Größe nach durch die Ungleichungen (97), (98), (99) *beschränkten Lösungen $u(s)$ unserer Gleichung* (32), *indem wir die Gleichung* (107), *deren Koeffizienten dann gegebene Konstanten sind, nach x auflösen; jede Wurzel dieser Gleichung, deren absoluter Betrag l_1 nicht überschreitet, liefert, in* (100) *eingeführt, eine Lösung unseres Problems.*

Die Gleichung (107) soll die *Verzweigungsgleichung* unseres Problems heißen.

§ 9.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Wir wollen zunächst den allgemeinen Fall betrachten, wo

(108) $$L_2 \neq 0$$

ist. Wir setzen

(109) $$S_1 = \sum_{m=2}^{m=\infty} L_m x^m,$$

(110) $$S_2 = \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^m \binom{t}{v} q_1(t)\, dt.$$

Dann läßt sich eine positive Größe $l_2 \leq l_1$ so bestimmen, daß für

(111) $$0 \leq |x| \leq l_2$$

(112) $$S_1 \neq 0$$

ist. Es bezeichne σ_1 das Minimum von $|S_1|$ für $|x| = l_2$. Wegen der regulären Konvergenz von S_2 läßt sich dann eine von Null verschiedene positive Konstante $k_2 \leq k_1$ so klein wählen, daß für $|x| = l_2$, $\tilde{v} \leq k_2$

(113) $$|S_2| \leq \alpha \cdot \sigma_1$$

bleibt, wo α einen echten Bruch bezeichnet.

Es sei nun

(114) $$\tilde{v} \leq k_2.$$

Die Anzahl der dem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Verzweigungsgleichung wird dann durch das Integral

(115) $$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial x}}{S_1 + S_2}\, dx$$

gegeben, welches im positiven Sinn über den Kreis $|x| = l_2$ zu erstrecken

ist. Um den Wert dieses Integrals zu ermitteln, betrachte man das über denselben Integrationsweg zu erstreckende Integral

(116)
$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{\partial S_1}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial S_2}{\partial x}}{S_1 + \vartheta S_2},$$

welches wegen (113) eine für

$$0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

stetige Funktion von ϑ darstellt. Da dieses Integral die Anzahl der dem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Gleichung

$$S_1 + \vartheta S_2 = 0$$

angibt, so muß es für jeden Wert von ϑ gleich einer ganzen Zahl sein, welche sich wegen der Stetigkeit des Integrals als Funktion von ϑ für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ nicht ändern kann. Mithin ist der Wert des Integrals (116) für $\vartheta = 1$, d. h. der zu ermittelnde Wert des Integrals (115), gleich dem Wert des Integrals (116) für $\vartheta = 0$, also wegen (108) gleich 2.

Die Verzweigungsgleichung hat daher für $\tilde{v} \leqq k_2$ *zwei* dem Betrage nach l_2 nicht überschreitende Lösungen. Führt man diese in (100) ein, so erhält man *zwei* Lösungen unserer zu untersuchenden Gleichung (32). Die Möglichkeit, daß unter weiteren speziellen Voraussetzungen, die sich aus der Verzweigungsgleichung leicht angeben lassen, diese beiden Lösungen zusammenfallen, ist hierbei natürlich nicht ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir die Gleichungen (96, 97, 98, 99), so können wir das bisher Erreichte in folgender Weise zusammenfassen: Ist $L_2 \neq 0$, so hat unsere Gleichung (32) unter den Beschränkungen

(114) $$\tilde{v} \leqq k_2,$$

(117) $$\tilde{u} \leqq h_1,$$

(118) $$\int_a^b q_1(t)\, u(t)\, dt \leqq l_2$$

bei gegebener Funktion $v(s)$ zwei und nur zwei Lösungen.

Die durch die Ungleichung (118) ausgedrückte beschränkende Voraussetzung ist aber dem gestellten Problem nicht naturgemäß, und wir wollen uns daher jetzt von ihr befreien.

Aus (112) folgt leicht, daß man eine positive Größe $k' \leqq k_2$ so bestimmen kann, daß die beiden ihrem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Verzweigungsgleichung für $\tilde{v} \leqq k'$ ihrem Betrage nach unter eine beliebig kleine vorgeschriebene Schranke fallen. Da nun die gesuchten Funktionen $u(s)$ durch die Reihe (100) geliefert werden, indem in ihr für x die Lösungen der Verzweigungsgleichung

eingeführt werden, so folgt, daß es zu jeder positiven Größe $h' \leqq h_1$ eine positive Größe $k' \leqq k_2$ gibt, so daß für $\tilde{v} \leqq k'$ die beiden den Beschränkungen (117), (118) unterworfenen Lösungen $u(s)$ unserer Gleichung (32) der Ungleichung

$$\tilde{u} \leqq h'$$

genügen. Es gibt also zu jeder positiven Größe $h' \leqq h_1$ eine positive Größe $k' \leqq k_2$, so daß das oben zusammengefaßte Theorem gültig bleibt, wenn man die dort voraus gesetzten Ungleichungen (114), (117), (118) durch die Ungleichungen

$$\tilde{v} \leqq k', \tag{119}$$

$$\tilde{u} \leqq h', \tag{120}$$

$$\int_a^b q_1(t)\, u(t) \leqq l_2 \tag{121}$$

ersetzt. Nun wählen wir das positive h' so klein, daß

$$h' \leqq h_1 \quad \text{und} \quad h' \int_a^b |q_1(t)|\, dt \leqq l_2$$

ist. Dann ist die Ungleichung (121) eine Folge von (120).

Das Resultat dieses Paragraphen ist daher folgendes Theorem:

Ist $L_2 \neq 0$, was wohl als der allgemeine Fall bezeichnet werden dürfte, so lassen sich zwei positive Größen $k' \leqq k$, $h' \leqq h$ so bestimmen, daß unter den Beschränkungen $\tilde{v} \leqq k'$, $\tilde{u} \leqq h'$ unsere Gleichung (32) *bei gegebener Funktion $v(s)$ zwei und nur zwei Lösungen $u(s)$ hat,* welche unter weiteren leicht angebbaren speziellen Voraussetzungen natürlich auch zusammenfallen können.

Unsere Funktionalgleichung (32) ist also an der Stelle $u(s) = 0$, $v(s) = 0$ *zweifach* verzweigt.

Ist L_n der erste von Null verschiedene Koeffizient von S_1, so lehrt genau dieselbe Argumentation, daß unsere Funktionalgleichung an der Stelle $u(s) = 0$, $v(s) = 0$ n-fach verzweigt ist, wobei auch hier natürlich unter weiteren speziellen Voraussetzungen einige Zweige zusammenfallen können.

Verschwinden sämtliche Koeffizienten L_n $(n \geqq 2)$, so zeigen die Gleichungen (95), (96), (107), daß für $v(s) = 0$ unsere Funktionalgleichung eine stetige Schar von Lösungen hat, welche durch die Reihe (100) mit dem willkürlichen Parameter x dargestellt wird.

Im speziellen, häufig vorkommenden Falle, wo $v(s)$ identisch gleich einer Konstanten μ ist, liefert, wenn L_n der erste von Null verschiedene Koeffizient ist, die Verzweigungsgleichung (107) für x gemäß dem Theorem

von Puiseux n nach gebrochenen Potenzen von μ fortschreitende Reihen; und die Gleichung (100) stellt daher die n Lösungsfunktionen $u(s)$ durch Reihen dar, welche nach gebrochenen Potenzen von μ fortschreiten.

§ 10.

Die Verzweigung im Falle der Existenz mehrerer Nulllösungen.

Um die Darstellung durchsichtiger zu gestalten, wollen wir in diesem Paragraphen voraussetzen, daß die Anzahlen der linear unabhängigen Nulllösungen in s und in t unseres Kernes $C(s,t)$ gleich 2 sind, jedoch alle Sätze und Beweise so entwickeln, daß sie auch für den Fall der Existenz einer beliebigen Anzahl linear unabhängiger Nulllösungen gültig bleiben. In der Bezeichnungsweise schließen wir uns an den § 7 an.

Gemäß der Schlußbemerkung von § 7 können wir die stetigen Funktionen $p_1(s)$, $p_2(s)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ so bestimmen, daß die Determinanten

$$(122)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

sind, wo die $A_{\mu\nu}$ und $B_{\mu\nu}$ durch die Gleichungen (81), (82) definiert sind. Setzt man dann

$$(123)\qquad E(s,t) = C(s,t) + p_1(s)\, q_1(t) + p_2(s)\, q_2(t),$$

so hat gemäß dem Theorem I des § 7 der neue Kern $E(s,t)$ keine Nulllösung mehr, und es läßt sich daher zu ihm nach dem Fredholmschen Fundamentaltheorem ein lösender Kern $\mathsf{E}(s,t)$ konstruieren. Unsere Gleichung (32) läßt sich schreiben

$$(124)\qquad u(s) - \int_a^b E(s,t)\, u(t)\, dt = -p_1(s)\int_a^b q_1(t)\, u(t)\, dt - p_2(s)\int_a^b q_2(t)\, u(t)\, dt$$
$$- W_{01}\binom{s}{u\; v} - \sum_{m+n\geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\; v}$$

Führt man hier den lösenden Kern $\mathsf{E}(s,t)$ gemäß den Formeln (38) ein, so gelangt man ganz wie in § 8 zu dem mit der Gleichung (124) gleichbedeutenden Gleichungssystem

$$(125)\qquad u(s) = \Big(-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_1(t)\Big)x + \Big(-p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_2(t)\Big)y$$
$$+ P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\; v},$$

$$(126)\qquad x = \int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt,$$

$$(127)\qquad y = \int_a^b q_2(t)\,u(t)\,dt,$$

wo die $P_1\binom{s}{v}$, $P_{mn}\binom{s}{u\,v}$ wie in § 8 (93) definiert sind. Die Gleichung (125) läßt sich gemäß § 6 auflösen, indem man x und y als Parameter betrachtet. Man erhält unter den Beschränkungen

$$(128)\qquad \tilde{v} \leqq k_1, \quad \tilde{u} \leqq h_1, \quad |x| \leqq l_1, \quad |y| \leqq l_1',$$

wo $k_1 \leqq k$, $h_1 \leqq h$, l_1 und l_1' geeignet gewählte positive Konstanten bedeuten, als eindeutige Lösung der Gleichung (125) die in $v(s)$, x, y regulär konvergente Integralpotenzreihe

$$(129)\qquad u(s) = \sum_{\alpha+\beta+n\geqq 1} x^\alpha y^\beta V_n^{\alpha,\beta}\binom{s}{v},$$

wo die $V_n^{\alpha\beta}\binom{s}{v}$ Integralpotenzformen n^{ten} Grades in $v(s)$ bedeuten. Durch Einführung von (129) in die Gleichungen (126) und (127) ergeben sich die Gleichungen

$$(130)\qquad x = \sum_{\alpha+\beta+n\geqq 1} x^\alpha y^\beta \int_a^b q_1(t)\, V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\,dt,$$

$$(131)\qquad y = \sum_{\alpha+\beta+n\geqq 1} x^\alpha y^\beta \int_a^b q_2(t)\, V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\,dt.$$

Setzt man

$$(132)\qquad L_{\alpha\beta} = \int_a^b V_0^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_1(t)\,dt,$$

$$(133)\qquad L_{\alpha\beta}' = \int_a^b V_0^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_2(t)\,dt,$$

so sind die $L_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}'$, $\cdots$ als von $v(s)$ unabhängige Konstanten definiert und unsere Gleichungen (130, 131) nehmen die Gestalt an

$$(134)\qquad x = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} L_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta\geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_1(t)\,dt,$$

$$(135)\qquad y = \sum_{\alpha+\beta\geqq 1} L_{\alpha\beta}' x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta\geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_2(t)\,dt,$$

wo die zweiten Summen rechts als regulär konvergente, mit identisch ver-

schwindendem $v(s)$ verschwindende Integralpotenzreihen von x, y und $v(s)$ betrachtet werden können.

Jetzt wollen wir das Bestehen der Gleichungen

(136) $$L_{10} = 1, \quad L_{01} = 0,$$

(137) $$L'_{10} = 0, \quad L'_{01} = 1$$

beweisen. Gemäß (78) ist

$$0 = \varphi_1(s) - \int_a^b C(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt = \varphi_1(s) - \int_a^b E(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$+ p_1(s)\int_a^b q_1(t)\,\varphi_1(t)\,dt + p_2(s)\int_a^b q_2(t)\,\varphi_1(t)\,dt.$$

Führt man den lösenden Kern $\mathsf{E}(s,t)$ ein, so ergibt sich

(138) $$\varphi_1(s) = \left(-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_1(t)\,dt\right)\int_a^b q_1(t)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$+ \left(-p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_2(t)\,dt\right)\int_a^b q_2(t)\,\varphi_1(t)\,dt.$$

Ebenso erhält man

(139) $$\varphi_2(s) = \left(-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_1(t)\,dt\right)\int_a^b q_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt$$

$$+ \left(-p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_2(t)\,dt\right)\int_a^b q_2(t)\,\varphi_2(t)\,dt.$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen (125, 129), (81) können wir die Gleichungen (138), (139) auch so schreiben

(140) $$\varphi_1(s) = V_0^{1,0}(s)\,B_{11} + V_0^{0,1}(s)\,B_{12},$$

(141) $$\varphi_2(s) = V_0^{1,0}(s)\,B_{21} \quad V_0^{0,1}(s)\,B_{22},$$

wo für die von $v(s)$ unabhängige Integralpotenzform $V_0^{1,0}\binom{s}{v}$ $V_0^{1,0}(s)$ geschrieben ist und ebenso $V_0^{0,1}(s)$ statt $V_0^{0,1}\binom{s}{v}$.

Multipliziert man diese beiden Gleichungen je mit $q_1(s)ds$, $q_2(s)ds$ und integriert nach s von a bis b, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichungen (81), (132, 133)

(142) $$0 = B_{11}(L_{10} - 1) + B_{12}L_{01} \quad ,$$

(143) $$0 = B_{21}(L_{10} - 1) + B_{22}L_{01} \quad ,$$

(144) $$0 = B_{11}L'_{10} \quad + B_{12}(L'_{01} - 1),$$

(145) $$0 = B_{21}L'_{10} \quad + B_{22}(L'_{01} - 1).$$

Bei Berücksichtigung von (122) ergibt sich aus (142), (143)

$$L_{10} - 1 = 0, \quad L_{01} = 0$$

und aus (144), (145)

$$L'_{10} = 0, \quad L'_{01} - 1 = 0$$

was zu beweisen war.

Unsere Gleichungen (134) und (135) können also in folgender Form geschrieben werden

$$(136) \qquad 0 = \sum_{\alpha+\beta \geq 2} L_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_1(t)\,dt,$$

$$(137) \qquad 0 = \sum_{\alpha+\beta \geq 2} L'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v} q_2(t)\,dt.$$

Wir erhalten bei gegebenem $v(s)$ alle ihrer Größe nach durch die Ungleichungen (128) *beschränkten Lösungen unseres Problems, indem wir die Gleichungen* (136), (137), *deren Koeffizienten dann gegebene Konstanten sind, nach x und y auflösen. Jedes Paar dem absoluten Betrage nach l_1 und l_1' nicht überschreitender Wurzeln dieser Gleichung liefert, in die Gleichung* (129) *eingeführt, eine Lösung unseres Problems.*

Die Gleichungen (136), (137) wollen wir daher die *Verzweigungsgleichungen* unseres Problems nennen.

Das in diesem Paragraphen Auseinandergesetzte läßt sich offenbar unmittelbar auf das in § 6 behandelte allgemeinere Problem ausdehnen, wo die Anzahl der gegebenen Funktionen $v(s)$ eine beliebige ist.

Schlußbemerkung.

In den in dieser Untersuchung auseinandergesetzten Sätzen und Beweisen ändert sich nichts, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr. \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch Unstetigkeiten der Koeffizientenfunktionen können, wie bei Berücksichtigung der §§ 15, 17 der ersten Abhandlung*) leicht zu sehen, in weitem Umfange zugelassen werden, worauf spezieller einzugehen uns die nachfolgenden Anwendungen Veranlassung bieten werden.

Diese Untersuchung läßt sich ferner, wie ausführlich auseinandergesetzt werden wird, ohne Schwierigkeit unmittelbar und sogar unter Darbietung von Vereinfachungen auf den Fall übertragen, wo $s, t_1, t_2, \cdots$ nicht mehr

*) Math. Ann. Bd. 63. Vergl. auch E. E. Levi „Sulle Equazioni Integrali", Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907, vol. XVI, serie 5ª, 2º sem. fasc. 9º.

die Punkte eines Kontinuums durchlaufen, sondern die unendliche Indexreihe. Dann bedeutet $u(s)$ eine gesuchte unendliche Zahlenreihe und die z. B. gegebenen $v(s)$, $K(s, t_1, t_2)$ eine gegebene einfach-unendliche und eine gegebene dreifach-unendliche Zahlenreihe. Das Integral muß als unendliche Summe definiert werden, und die nichtlineare Funktionalgleichung geht dann in eine unendliche Reihe nichtlinearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten über. Bei dieser Spezialisierung gestaltet sich das Resultat unserer Untersuchung zu folgendem Ergebnis.

Das grundlegende Theorem, nach welchem die eindeutige Lösbarkeit von n Gleichungen mit n Unbekannten in der Umgebung eines Lösungssystems durch das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante angezeigt wird, und die Sätze über die Verzweigung der Lösungen dieser Gleichungen im Falle des Verschwindens der Funktionaldeterminante werden auf die Auflösung einer unendlichen Reihe von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*) übertragen. Die von dem unendlichen Gleichungssystem vorauszusetzenden Konvergenzbedingungen ergeben sich bei der Durchführung des erwähnten Übertragungsverfahrens und werden daher in der ausführenden Darstellung präzisiert werden.

*) Dieses Problem dürfte nicht ohne Interesse sein, seit durch die Arbeiten von Hilbert („Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" IV[te] und V[te] Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, 1906, S. 157—227 und S. 439—480) die Bedeutung der Funktionen von unendlichvielen Variabeln in den Vordergrund getreten ist.

Zum Noetherschen Fundamentalsatz.*)

Von

Eugen Löffler in Stuttgart.

Eines der allgemeinsten Probleme, die mit der Theorie der Schnittpunkte zusammenhängen, ist das folgende: Es seien $f_1, f_2, \cdots, f_k$ gegebene nicht homogene ganze Funktionen von n unabhängigen Variabeln $x_1, \cdots, x_n$; welche Bedingungen erfüllt eine Funktion F mit variabeln Koeffizienten, die einer Relation von der Form

$$F = S_1 f_1 + S_2 f_2 + \cdots + S_k f_k$$

genügt, wenn die S_i Funktionen mit konstanten, aber unbestimmten Koeffizienten sind?

Der direkteste Weg zur Untersuchung dieser Frage besteht in der Diskussion der linearen Gleichungen, welchen die Koeffizienten von F genügen müssen. Nachdem Herr Noether durch seinen „Fundamentalsatz", der zuerst für $n = k = 2$ aufgestellt wurde, die Frage auf das Verhalten an Einzelstellen, wo die Funktionen gleichzeitig verschwinden, zurückgeführt hat, handelt es sich nun um die Untersuchung dieser einzelnen Punkte, die man der Reihe nach in den Ursprung des Koordinatensystems verlegen kann.

Wir geben eine solche im folgenden für den Fall $n = k = 2$, der, wie auch der allgemeinere, zuerst von Herrn F. S. Macaulay**) behandelt worden ist. Wiewohl die Abhandlungen Macaulays eine Reihe schöner Sätze enthalten und wichtige Probleme stellen, scheinen sie noch wenig

---

*) Vergl. meine Tübinger Inauguraldissertation: „Beiträge zur Theorie der Schnittpunkte algebraischer Kurven" (gedruckt bei Noske, Borna-Leipzig) 1907.

**) Siehe: a) Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol. 31, p. 15ff. (1899). b) Ibid. id. p. 381ff.. c) Ibid. Vol. 32, p. 418ff. (1900). d) Transactions of the American Math. Soc. Vol. 5, p. 385ff. (1904). e) Verhandl. des III. internat. Math.-Kongresses p. 284ff. Leipzig 1905.

bekannt zu sein*). Macaulay beweist seine Sätze meist nur an bestimmten, allerdings ziemlich allgemeinen Beispielen. In meiner Dissertation habe ich dieselben ganz allgemein und, wie ich glaube, lückenlos bewiesen und zwar größtenteils nach einer Methode, die im wesentlichen von derjenigen Macaulays verschieden ist.

Im folgenden werden die wichtigsten dieser Sätze zusammengestellt und ihre Beweise angedeutet. Das erste Kapitel enthält eine Untersuchung über die linearen Gleichungen, die aus dem Noetherschen Satz folgen; sie ist, wie man leicht erkennt, zum großen Teil auf das oben gestellte allgemeine Problem übertragbar; das zweite Kapitel bringt einige Eigenschaften des durch jene Gleichungen definierten Moduls und das dritte Kapitel eine Bestimmung der Multiplizität des Schnittpunkts zweier Kurven, sowie einige weitere Anwendungen.

I. Kapitel.

1. Es seien

$$f(x,y)=\sum_{p,q} a_q^p x^{p-q} y^q \quad \text{und} \quad \varphi(x,y)=\sum_{p,q} b_q^p x^{p-q} y^q \qquad (q \leqq p)$$

zwei ganze Funktionen unbestimmt hoher Ordnung, oder auch zwei in der Nähe des Punktes $x=y=0$ konvergierende Potenzreihen; dabei bedeuten a_q^p und b_q^p gegebene Größen, und zwar sei $p \geqq k$, wo k eine beliebig gegebene positive ganze Zahl ist; endlich möge a_k^k von Null verschieden angenommen werden. Ferner sei

$$F(x,y)=\sum_{p,q} z_q^p x^{p-q} y^q \qquad \begin{pmatrix} q \leqq p \\ p \geqq k \end{pmatrix}$$

gesetzt, wobei wir mit z_q^p ein System Variabler bezeichnen. Die Bedingungen dafür, daß für ein bestimmtes Wertsystem dieser Variabeln eine Beziehung von der Form

$$F(x,y)=S_1 \cdot f+S_2 \cdot \varphi$$

gilt, wo $S_1(x,y)$ und $S_2(x,y)$ ebenfalls ganze Funktionen oder Potenzreihen sind, bestehen nach dem Noetherschen Satz darin, daß für jeden Schnittpunkt von $f(x,y)=0$ und $\varphi(x,y)=0$, insbesondere also auch für den

*) Sie werden z. B. in der Arbeit von Herrn E. Lasker (Math. Ann. Bd. 60), auf welche ich erst nach dem Erscheinen meiner Dissertation aufmerksam wurde, nicht erwähnt. Diese Arbeit berührt besonders in ihrem 3ten Kapitel einige der hier behandelten Fragen und enthält mehrere schon früher von Herrn Macaulay aufgestellte Sätze über die Struktur der erwähnten linearen Gleichungen.

Punkt $x = y = 0$, der im folgenden allein betrachtet werden möge, sich zwei Funktionen

$$M(x, y) = \sum_{m,l} \mu^l_m x^{l-m} y^m \quad \text{und} \quad N(x, y) = \sum_{m,l} \nu^l_m x^{l-m} y^m$$

finden lassen, derart, daß bis zu Termen einer gewissen endlichen Dimension s die Koeffizienten z^p_q der Relation

$$F = Mf + N\varphi$$

genügen. Für die Zahl s, welche wir die *Charakteristik**) des betrachteten Schnittpunkts nennen wollen, hat Herr Bertini eine obere Grenze**) angegeben.

Durch Vergleichen der Koeffizienten in der angeschriebenen Gleichung ergeben sich für z^p_q Beziehungen von folgender Form:

$$z^p_q = \sum_{m,l=0}^{p-k} \mu^l_m a^{p-l}_{q-m} + \sum_{m,l=0}^{p-k} \nu^l_m b^{p-l}_{q-m} \qquad \begin{pmatrix} p=k,\cdots,s \\ q=0,\cdots s \\ p \geqq q \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die μ^l_m und ν^l_m als Unbestimmte und eliminieren wir sie aus diesen Beziehungen, so erhalten wir ein endliches System von linearen homogenen Gleichungen zwischen den Variabeln z^p_q, welche von der Form $\sum_{q,p} \lambda^p_q z^p_q = 0$ sind, und die wir kurz die *„z-Gleichungen"* nennen wollen. Der Noethersche Satz gilt in der angegebenen Fassung auch, wenn die Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$ im Punkt $x = y = 0$ beliebig viele Tangenten gemeinsam haben, und die verschiedenen singulären Fälle werden sich nur durch die Zahl der z-Gleichungen und die Charakteristik voneinander unterscheiden.

2. Über die Struktur der z-Gleichungen erhalten wir Aufschluß, wenn wir die Funktion F mit $x^{l-m} y^m$ multiplizieren, wo $s > l \geqq m$. Setzt man hierauf $p + l = p'$ und $q + m = q'$ und läßt hernach die Striche wieder weg, so folgt:

$$x^{l-m} y^m F(x, y) = \sum_{p,q} z^{p-l}_{q-m} x^{p-q} \cdot y^q \qquad (p - l \geqq q - m).$$

Die Koeffizienten dieser Funktion genügen natürlich ebenfalls den z-Gleichungen, d. h. aus $\sum_{p,q} \lambda^p_q z^p_q = 0$ folgt auch $\sum_{p,q} \lambda^p_q z^{p-l}_{q-m} = 0$ für jedes beliebige Wertepaar l, m, das den angegebenen Bedingungen genügt.

*) Vergl. J. König: Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig, B. G. Teubner, 1905, p. 393.

**) Math. Ann. Bd. 34.

Wir nennen p den *Grad* der Variabeln z_q^p und bezeichnen den *Maximalgrad* der in einer Gleichung vorkommenden Variabeln als den *Grad dieser Gleichung.* Von besonderem Interesse sind die Gleichungen vom Grad s, denn aus ihnen lassen sich sämtliche z-Gleichungen durch sukzessive Verminderung der oberen und unteren Indizes der Variabeln ableiten, wobei nur zu beachten ist, daß man $z_q^p = 0$ zu setzen hat, sobald $q > p$ oder eine der Zahlen p oder q negativ wird. Das System derjenigen Gleichungen, die sich alle in der angegebenen Weise aus einer einzigen, der *Hauptgleichung*, ableiten lassen, nennen wir ein *einreihiges System*, den Grad der Hauptgleichung seine *Charakteristik* und wir haben den

Satz 1. *Die Gleichungen, welche zufolge des Noetherschen Satzes zwischen den Koeffizienten von $F(x, y)$ bestehen müssen, bilden einreihige Systeme.*

Es erhebt sich nun die fundamentale Frage nach der Anzahl der einreihigen Systeme, die zu dem Schnittpunkt $x = y = 0$ von $f = 0$ und $\varphi = 0$ gehören, und damit hängt aufs engste zusammen die andere nach der Anzahl der Funktionen zweier Variabeln, welche man braucht, um durch ihre Koeffizienten das allgemeinste Lösungssystem der Gleichungen eines einreihigen Systems darstellen zu können.

3. Bevor wir diese Fragen beantworten, machen wir noch einige Bemerkungen über die Eigenschaften eines einreihigen Systems von der Charakteristik s. Nach dem angegebenen Ableitungsprozeß ist klar, daß man $l + 1$ Gleichungen vom Grad $s - l$ erhält. Wir bezeichnen sie symbolisch durch $E_m^l = 0$ $(m = 0, 1, \cdots, l)$ und denken uns alle Gleichungen des Systems, vertreten durch die Symbole, derart in Zeilen angeordnet, daß alle Gleichungen desselben Grades in derselben Zeile stehen. Im allgemeinen werden die z-Gleichungen nicht alle linear unabhängig voneinander sein. Wir reduzieren deshalb das Gleichungssystem so, daß nur die linear unabhängigen Gleichungen beibehalten werden. Es zeigt sich, daß dies in folgender Weise geschehen kann: Wenn die Gleichungen vom Grad $s - l$ derart linear kombiniert werden können, daß eine Gleichung niedrigeren Grads entsteht, so scheide man die Gleichung $E_i^l = 0$ aus und setze dafür diese neue Gleichung in die ihrem Grad entsprechende Zeile. Für das durch Fortsetzung dieses Verfahrens entstehende *„reduzierte einreihige System“* gilt folgender

Satz 2. *Die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen vom Grad $s - l$ ist entweder um eins größer oder ebensogroß als die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen vom Grad $s - l + 1$.*

Im ersteren Fall nennen wir die betreffende Zeile *regelmäßig*, im letzteren *unregelmäßig;* das einreihige System enthält also abwechselnd

Serien von regelmäßigen und unregelmäßigen Zeilen. Ferner gilt der folgende

Satz 3. *Zu jedem einreihigen System gehört eine Zahl k derart, daß jede Variable, deren Grad kleiner als k ist, gleich Null wird.*

Die letzten k Zeilen des Systems enthalten also $\frac{1}{2}k(k-1)$ Gleichungen von der Form $z_q^p = 0$ $(p<k)$. Die Zahl k bedeutet zugleich die Gesamtzahl der regelmäßigen Zeilen des einreihigen Systems.

Wir nehmen nun an, unser einreihiges System enthalte außer den eben erwähnten k Zeilen, die in gewisser Hinsicht eine Gruppe für sich bilden, noch α unregelmäßige Serien; und zwar möge die j^{te} unregelmäßige Serie ϱ_j Zeilen mit je k_j Gleichungen enthalten; ferner sei $k_\alpha = k$. Die Zahlen k_j genügen den Bedingungen $k_j < k_{j+1}$, während die Zahlen ϱ_j ganz beliebig sein können. Durch diese Angaben ist offenbar die Gestalt des einreihigen Systems völlig bestimmt. Die Gesamtzahl m seiner linear unabhängigen Gleichungen ist, wie man leicht findet:

$$m = k^2 + \sum_{j=1}^{\alpha} k_j \varrho_j,$$

während sich für die Charakteristik die Beziehung

$$s = 2k + \sigma_1 - 2$$

ergibt, wenn $\sum_{j=1}^{\alpha} \varrho_j = \sigma_1$ gesetzt wird. Die Gesamtzahl der Variabeln z_q^p ist $n = \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$, und man bemerkt, daß $n > m$.

4. Wir beantworten nun zunächst die zweite der oben (Nr. 2) aufgeworfenen Fragen. Die Antwort ist enthalten in dem folgenden

Theorem I. *Die allgemeinste Lösung eines einreihigen Systems läßt sich darstellen mit Hilfe von zwei partikulären Lösungssystemen.*

$$z_q^p = a_q^p \quad \textit{und} \quad z_q^p = b_q^p \qquad (p = k, \cdots, s;\ p \geqq q)^{*})$$

und ist von der Form:

$$z_q^p = \sum_{m,l=0}^{p-k} \mu_m^l a_{q-m}^{p-l} + \sum_{m,l=0}^{p-k} \nu_m^l b_{q-m}^{p-l} \qquad (p-l \geqq q-m \geqq 0)$$

wobei die μ_m^l und ν_m^l willkürliche Konstante bedeuten.

Wenn wir die Bezeichnungen von Nr. 1 beibehalten, so können wir dem Theorem auch folgende Form geben:

---

*) Für $p<k$ ist natürlich $a_q^p = b_q^p = 0$.

Theorem I*. Genügen die Koeffizienten der drei Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ und $F(x, y)$ den sämtlichen Gleichungen eines einreihigen Systems von der Charakteristik s, so kann man stets zwei ganze Funktionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ von der Ordnung $s - k$ finden, derart, daß

$$F - Mf - N\varphi \equiv 0 \bmod \{s+1\}^{*)}.$$

Der Beweis dieses Theorems stützt sich auf den bekannten Satz:

Hat man m lineare homogene unabhängige Gleichungen mit $n (> m)$ Unbekannten und kennt man $n - m$ linear unabhängige Lösungssysteme, so setzt sich die allgemeinste Lösung linear aus diesen zusammen und enthält $n - m$ willkürliche Konstante.

Ist $z^p_q = a^p_q$ ein Lösungssystem, so ist offenbar auch $z^p_q = a^{p-l}_{q-m}$ ein solches und zwar für alle Werte von l, die der Bedingung $l \leqq k + \sigma_1 - 2$ genügen; diese Lösungssysteme sind linear unabhängig voneinander. Ebenso sind die aus einer weiteren Lösung $z^p_q = b^p_q$ sich ergebenden Lösungen unter sich linear unabhängig, jedoch im allgemeinen nicht alle unabhängig von den vorigen.

Um nun zu zeigen, daß die so gefundenen Lösungssysteme alle linear unabhängigen enthalten, also zur Darstellung der allgemeinsten Lösung hinreichen, benützen wir dasjenige Gleichungssystem, dessen Koeffizienten aus den linear unabhängigen Lösungen der z-Gleichungen bestehen und welches Herr Frobenius**) das zu dem gegebenen adjungierte genannt hat. Bezeichnen wir die Variabeln dieses Gleichungssystems mit ζ^p_q und seine Gleichungen als die „*ζ-Gleichungen*“, so folgt eine fundamentale Eigenschaft desselben aus der Tatsache, daß mit der Gleichung

$$\sum_{p,q=0}^{s} a^p_q \, \zeta^p_q = 0$$

auch die Gleichung

$$\sum_{p,q=0}^{s-l} a^p_q \, \zeta^{p+l}_{q+m} = 0 \qquad (q \leqq p)$$

ihm angehört. Der *obere Index* der Variabeln heiße wieder ihr *Grad*, während unter dem *Grad einer ζ-Gleichung* der in ihr vorkommende *Minimalgrad* verstanden sei. Die Eigenschaften des zu den z-Gleichungen adjungierten Gleichungssystems ergeben sich aus den folgenden leicht zu beweisenden Sätzen:

---

*) Dies bedeutet, nach der Bezeichnungsweise von J. König (a. a. O.), daß die Funktion $F - Mf - N\varphi$ mit Gliedern von der Dimension $s + 1$ beginnt.

**) Vergl. Journal f. Math. Bd. 82, p. 238.

Satz 4. *Die Summe der linear unabhängigen z-Gleichungen und der linear unabhängigen ζ-Gleichungen vom Grad r ist gleich $r+1$.*

Satz 5. *Im ζ-System ist die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen vom Grad r entweder um zwei oder um eins größer als die Zahl der Gleichungen vom Grad $r-1$.*

Ordnet man auch hier die Gleichungen ihrem Grad nach in Zeilen an, so heiße die betreffende Zeile im ersteren Fall *regelmäßig*, im letzteren *unregelmäßig*.

Satz 6. *Jeder unregelmäßigen Serie im z-System entspricht eine solche von ebensovielen Zeilen im ζ-System; ist die Zeile vom Grad r im z-System $\left\{\begin{array}{l}\text{regelmäßig}\\ \text{unregelmäßig}\end{array}\right.$, so ist die Zeile vom Grad $r+1$ im ζ-System ebenfalls $\left\{\begin{array}{l}\text{regelmäßig}\\ \text{unregelmäßig}\end{array}\right.$.*

Durch diese Sätze ist offenbar die Gestalt des adjungierten Gleichungssystems völlig bestimmt, und es läßt sich nun zeigen, daß, wenn man in der oben angegebenen Weise aus $\sum\limits_{p,q=0}^{s} a_q^p \zeta_q^p = 0$ und $\sum\limits_{p,q=0}^{s} b_q^p \zeta_q^p = 0$ alle Gleichungen ableitet und sie linear unabhängig macht, das so entstehende System von ζ-Gleichungen den Sätzen 4, 5 und 6 Genüge leistet, womit Theorem I bewiesen ist.

5. Die Antwort auf die erste der oben aufgeworfenen Fragen ergibt sich leicht, wenn man beachtet, daß die Beziehungen zwischen zwei adjungierten Gleichungssystemen durchaus reziprok sind. Geht man also aus von den zwei Funktionen $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ und bildet daraus die linearen Gleichungen $\sum\limits_{p,q=0}^{s-l} a_q^p \zeta_{q+m}^{p+l} = 0$ und $\sum\limits_{p,q=0}^{s-l} b_q^p \zeta_{q+m}^{p+l} = 0$ für $l = 0, 1, 2, \cdots, s-k$, die vom Grad $k+l$ sind und symbolisch mit H_m^l bez. G_m^l bezeichnet seien, und sucht man die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen, so erhält man das folgende

Theorem II. *Die allgemeinste Lösung eines Gleichungssystems, das sich aus H_0^0 und G_0^0 ableiten läßt, kann durch eine einzige partikuläre Lösung $\zeta_q^p = \lambda_q^p$ dargestellt werden und ist von der Form*

$$\zeta_q^p = \sum_{m,l=0}^{s-p} \gamma_m^l \lambda_{q+m}^{p+l} \qquad \left(\begin{array}{r} p+l \geqq q+m \\ p = k, k+1, \cdots, s \end{array}\right).$$

Dabei bedeuten die γ_m^l willkürliche Konstante.

Oder in anderer Fassung:

Theorem II^a^. Die linearen Gleichungen, denen nach dem Noetherschen

Satz die Koeffizienten von $F(x, y)$ genügen müssen, bilden für jeden Schnittpunkt $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ *ein* einreihiges System.

Daraus folgt unmittelbar:

Theorem III. *Die im Noetherschen Satz unbestimmt gelassene Dimension, bis zu welcher die Übereinstimmung von F mit $Mf + N\varphi$ stattzufinden hat, ist gleich der Charakteristik s des zu dem betreffenden Schnittpunkt gehörigen einreihigen Systems.*

II. Kapitel.

6. Wir untersuchen nun gewisse Eigenschaften der Funktionen f und φ und des durch sie bestimmten Moduls mit Hilfe der ζ-Gleichungen. Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir annehmen, daß dieselben in folgender Weise linear unabhängig gemacht worden seien. Die Gleichungen H^l_m, die unter sich linear unabhängig sind, werden alle im System beibehalten. Wenn man aber sämtliche abgeleiteten Gleichungen vom Grad $k + l$ derart linear kombinieren kann, daß eine Gleichung höheren Grads entsteht, so möge die letzte der Gleichungen vom Grad $k+l$ ausgeschieden und dafür diese neue Gleichung in der ihrem Grad entsprechenden Zeile untergebracht werden. Nach unseren Annahmen müssen die ersten ϱ_a Zeilen des ζ-Systems unregelmäßig sein und können also außer den H^l_m keine anderen Gleichungen enthalten; folglich wird in der Zeile vom Grad $k + \varrho_a$ zum erstenmal eine der eben erwähnten neuen Gleichungen auftreten, die mit $\overline{G}^{\varrho_a}_0$ bezeichnet werde, und man erkennt, daß sich $\overline{G}^{\varrho_a}_0$ in folgender Form darstellen läßt:

$$\overline{G}^{\varrho_a}_0 = \sum_{\tau,\pi=0}^{\varrho_a-1} \alpha^\pi_\tau H^\pi_\tau + \sum_{\tau,\pi=0}^{\varrho_a-1} \beta^\pi_\tau G^\pi_\tau \qquad (\tau \leqq \pi)$$

wo die α^π_τ und β^π_τ Konstante bedeuten.

Bezeichnet man den Koeffizienten von ζ^t_r in der Gleichung $\overline{G}^{\varrho_a}_0$ mit c^t_r, so erhält man aus der vorigen Gleichung für c^t_r folgende Darstellung:

$$c^t_r = \sum_{\tau,\pi=0}^{\varrho_a-1} \alpha^\pi_\tau a^{t-\pi}_{r-\tau} + \sum_{\tau,\pi=0}^{\varrho_a-1} \beta^\pi_\tau b^{t-\pi}_{r-\tau}.$$

Da c^t_r für $t > s$ jeden beliebigen Wert annehmen kann, so können wir durch die Gleichung

$$\psi^{(a)}(x, y) = \sum_{r,t} c^t_r x^{t-r} y^r$$

eine neue Funktion von beliebig hoher Ordnung definieren. Setzt man noch

$$A^{(\mathfrak{a})}(x, y) = \sum_{\tau, \pi = 0}^{\varrho_{\mathfrak{a}}-1} \alpha_\tau^\pi x^{\pi-\tau} y^\tau \quad \text{und} \quad B^{(\mathfrak{a})}(x, y) = \sum_{\tau, \pi = 0}^{\varrho_{\mathfrak{a}}-1} \beta_\tau^\pi x^{\pi-\tau} y^\tau$$

und beachtet man, daß $c_r^t = 0$ ist, wenn $t < k + \varrho_{\mathfrak{a}}$, so folgt:

$$\psi^{(\mathfrak{a})}(xy) = A^{(\mathfrak{a})} \cdot f + B^{(\mathfrak{a})} \cdot \varphi \equiv 0 \bmod \{k + \varrho_{\mathfrak{a}}\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unter anderem, daß die Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$ im Punkt $x = y = 0$ sämtliche Tangenten gemeinsam haben.

7. Da die Gleichungen vom Grad $k + \varrho_{\mathfrak{a}}$ des ζ-Systems nur aus den Gleichungen $H_m^{\varrho_{\mathfrak{a}}}$ $(m = 0, 1, \cdots, \varrho_{\mathfrak{a}})$ und $\overline{G}_0^{\varrho_{\mathfrak{a}}}$ bestehen, und man aus diesen alle folgenden durch den mehrfach erwähnten Prozeß ableiten kann, so kommen also die Gleichungen G_m^l selbst im ζ-System gar nicht mehr vor. Wir setzen im folgenden zur Abkürzung

$$\varrho_j + \varrho_{j+1} + \cdots + \varrho_{\mathfrak{a}} = \sigma_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, \mathfrak{a}).$$

Die zweite unregelmäßige Serie des ζ-Systems beginnt nach unseren Annahmen beim Grad $2k - k_{\mathfrak{a}-1} + \sigma_{\mathfrak{a}}$ und endigt beim Grad $2k - k_{\mathfrak{a}-1} + \sigma_{\mathfrak{a}-1} - 1$. Die nächste Zeile ist regelmäßig, enthält also außer den Gleichungen H und $\overline{G}$ noch eine neue Gleichung, die mit $\overline{G}^{k - k_{\mathfrak{a}-1} + \sigma_{\mathfrak{a}-1}}$ bezeichnet wird und die sich als lineare homogene Funktion aller der Gleichungen darstellen läßt, welche in der zweiten unregelmäßigen Serie stehen. Sie gibt, ähnlich wie $\overline{G}_0^{\varrho_{\mathfrak{a}}}$, Anlaß zur Bildung einer neuen Funktion $\psi^{(\mathfrak{a}-1)}(x, y)$, und wenn man in dieser Weise sämtliche $\mathfrak{a}$ unregelmäßigen Serien behandelt, erhält man $\mathfrak{a}$ Funktionen ψ, die durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned}
\psi^{(\mathfrak{a})} &= A^{(\mathfrak{a})} \cdot f + B^{(\mathfrak{a})} \cdot \varphi && \equiv 0 \bmod \{k + \sigma_{\mathfrak{a}}\},\\
\psi^{(\mathfrak{a}-1)} &= A^{(\mathfrak{a}-1)} \cdot f + B^{(\mathfrak{a}-1)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a})} && \equiv 0 \bmod \{2k - k_{\mathfrak{a}-1} + \sigma_{\mathfrak{a}-1}\},\\
\psi^{(\mathfrak{a}-2)} &= A^{(\mathfrak{a}-2)} \cdot f + B^{(\mathfrak{a}-2)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a})} + N^{(\mathfrak{a}-2)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a}-1)} && \equiv 0 \bmod \{2k - k_{\mathfrak{a}-2} + \sigma_{\mathfrak{a}-2}\},\\
\psi^{(\mathfrak{a}-3)} &= A^{(\mathfrak{a}-3)} \cdot f + B^{(\mathfrak{a}-3)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a})} + C^{(\mathfrak{a}-3)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a}-1)} + N^{(\mathfrak{a}-3)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a}-2)} && \equiv 0 \bmod \{2k - k_{\mathfrak{a}-3} + \sigma_{\mathfrak{a}-3}\},\\
&\vdots \\
\psi^{(1)} &= A^{(1)} \cdot f + B^{(1)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a})} + C^{(1)} \cdot \psi^{(\mathfrak{a}-1)} + \cdots + N^{(1)} \psi^{(2)} && \equiv 0 \bmod \{2k - k_1 + \sigma_1\}.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ und $N^{(j)}$, die allein für das weitere von Wichtigkeit sind, haben folgende Eigenschaften:

$A^{(j)}$ hat im Ursprung einen $(k - k_j + \sigma_{j+1})$-fachen Punkt und ist von der Ordnung $k - k_j + \sigma_j - 1$.

$B^{(j)}$ hat im Ursprung einen $(k - k_j + \sigma_{j+1} - \sigma_{\mathfrak{a}})$-fachen Punkt und ist von der Ordnung $k - k_j + \sigma_j - \sigma_{\mathfrak{a}} - 1$.

$N^{(j)}$ hat im Ursprung einen $(k_{j+1} - k_j)$-fachen Punkt und ist von der Ordnung $k_{j+1} - k_j + \varrho_j - 1$.

Die Kurven $f=0$, $\varphi=0$, $\psi^{(\alpha)}=0, \cdots, \psi^{(j)}=0$ haben alle im Ursprung k_{j-1} Tangenten gemeinsam, deren Gleichungen man aus $\vartheta^{(j-1)}_{k_{j-1}}=0$ erhält, wobei diese homogene Funktion vom Grad k_{j-1} sich aus folgender Rekursionsformel bestimmt:

$$\vartheta^{(j)}_{k_j} = N^{(j-1)}_{k_j-k_{j-1}} \cdot \vartheta^{(j-1)}_{k_{j-1}} \quad \left(j=\alpha-1, \alpha-2, \cdots, 2, 1; k_0=0; \vartheta^{(\alpha)}_{k_\alpha}=f_k\right)$$

Es ist klar, daß die Funktion $\psi^{(j)}$ dem durch f und φ bestimmten Modul angehört, da man sie leicht auf die Form $S_1 \cdot f + S_2 \cdot \varphi$ bringen kann.

8. Da die Gleichungen G^l_m im ζ-System nicht vorkommen, so kann man für unsere Betrachtung die Funktion φ ganz ausschalten und man erkennt, daß das zu dem Schnittpunkt von f und $\psi^{(\alpha)}$ gehörige einreihige System dasselbe ist wie das zum Schnittpunkt von f und φ gehörige; $\psi^{(\alpha)}$ hat im Ursprung einen i-fachen Punkt, wenn zur Abkürzung $k+\varrho_\alpha=i$ gesetzt wird. Den Zahlen s und m kann man folgende Form geben:

$$s = i + k + \sum_{j=1}^{\alpha-1} \varrho_j - 2 \quad \text{und} \quad m = ik + \sum_{j=1}^{\alpha-1} k_j \varrho_j.$$

Wir untersuchen nun das einreihige System des Schnittpunkts der Kurven $\psi^{(\alpha)}=0$ und $\psi^{(\alpha-1)}=0$, die im Ursprung einen i-fachen bezw. i'-fachen Punkt haben, wenn $i'=2k-k_{\alpha-1}+\sigma_{\alpha-1}$ gesetzt wird. Zu dem Zweck eliminieren wir die Funktion f aus dem Gleichungssystem (I) und erhalten, wenn wir dabei noch die früher angegebenen Eigenschaften der ζ-Gleichungen berücksichtigen, ein System von $\alpha-1$ Gleichungen, welche zeigen, daß zu dem Schnittpunkt von $\psi^{(\alpha)}=0$ und $\psi^{(\alpha-1)}=0$ ein einreihiges System gehört, das $\alpha-1$ unregelmäßige Serien hat. Jede der ersten $\alpha-2$ Serien enthält genau ebensoviele Zeilen und Gleichungen wie die entsprechende im ursprünglichen einreihigen System, während die letzte unregelmäßige Serie offenbar $i'-i$ Zeilen zu je i Gleichungen enthalten muß. Die Charakteristik dieses einreihigen Systems ist also nach dem vorhergehenden

$$s' = i' + i + \sum_{j=1}^{\alpha-2} \varrho_j - 2 = s + i - k_{\alpha-1},$$

und die Gesamtheit seiner Gleichungen ist:

$$m' = i' \cdot i + \sum_{j=1}^{\alpha-2} k_j \varrho_j = m + (i-k_{\alpha-1})(i+\varrho_{\alpha-1}).$$

Wir haben damit den folgenden wichtigen

Satz 7. *Zu zwei gegebenen Funktionen kann man stets zwei andere finden, die dem durch die ersteren definierten Modul angehören, derart, daß*

das zu ihrem Schnittpunkt gehörige einreihige System eine unregelmäßige Serie weniger hat als dasjenige, welches zu dem Schnittpunkt der gegebenen Funktionen gehört, im übrigen aber dieselben Eigenschaften besitzt wie dieses.

III. Kapitel.

9. Wir geben noch einige Anwendungen der bewiesenen Sätze und beweisen zunächst das folgende

Theorem IV. *Die Multiplizität, mit welcher ein Schnittpunkt zweier Kurven in die Gesamtzahl ihrer Schnittpunkte eingeht, ist gleich der Zahl m der linear unabhängigen Gleichungen des zu ihm gehörigen einreihigen Systems.*

Zum Beweis dieses Theorems verwenden wir, gestützt auf Satz 7, die vollständige Induktion. Dabei setzen wir nur folgenden Satz als bekannt voraus: Die Multiplizität des Schnittpunkts zweier Kurven, von denen die eine einen k-fachen, die andere einen i-fachen Punkt in demselben hat, ohne daß ihre Zweige sich berühren (die also den „einfachen Fall" repräsentieren), ist gleich $i \cdot k$.

Außerdem werden noch einige bekannte Sätze über Resultanten benutzt.

Wenn $f = 0$ und $\varphi = 0$ den einfachen Fall repräsentieren, so kann nach Nr. 7 das einreihige System überhaupt keine unregelmäßige Zeile besitzen; es ist also die Zahl seiner Gleichungen $m = k^2$; ebenso groß ist nach dem angeführten Satz die Multiplizität ihres Schnittpunkts.

Ferner sei $\varrho_\alpha \neq 0$; dagegen $\varrho_{\alpha-1} = \varrho_{\alpha-2} = \cdots = \varrho_1 = 0$; folglich $m = k^2 + k_\alpha \varrho_\alpha$. Bezeichnen wir die Multiplizität des Schnittpunkts von $f = 0$ und $\varphi = 0$ durch das Symbol (f, φ), so folgt aus der ersten der Gleichungen (I) Nr. 7, wenn man beachtet, daß $A^{(\alpha)}$ und $B^{(\alpha)}$ für $x = y = 0$ nicht verschwinden:

$$(f, \varphi) = (f, \psi^{(\alpha)}).$$

Da aber $f = 0$ und $\psi^{(\alpha)} = 0$ den einfachen Fall repräsentieren, so ist die Multiplizität ihres Schnittpunkts gleich $k(k + \varrho_\alpha) = m$.*)

Das Theorem ist also richtig für einreihige Systeme mit keiner und mit einer unregelmäßigen Serie. Wir nehmen nun an, es sei richtig für zwei Kurven, deren Schnittpunkt ein einreihiges System mit $\alpha - 1$ unregelmäßigen Serien besitzt. Da $\psi^{(\alpha)} = 0$ und $\psi^{(\alpha-1)} = 0$ zwei solche Kurven sind, so ist nach Nr. 8:

$$(\psi^{(\alpha)}, \psi^{(\alpha-1)}) = m' = m + (k - k_{\alpha-1} + \varrho_\alpha)(k + \varrho_\alpha + \varrho_{\alpha-1}).$$

*) Für den einfachen Fall wurde Theorem IV schon von Herrn Noether (Math. Annalen Bd. 6) auf anderem Wege bewiesen.

Andererseits folgt aus der zweiten der Gleichungen (I) nach einem bekannten Satz:

$$(\psi^{(a)}, \psi^{(a-1)}) = (\psi^{(a)}, A^{(a-1)}) + (\psi^{(a)}, f)$$

und

$$(\psi^{(a-1)}, A^{(a-1)}) = (B^{(a-1)}, A^{(a-1)}) + (\psi^{(a)}, A^{(a-1)}).$$

Eliminiert man $(\psi^{(a)}, A^{(a-1)})$ aus diesen beiden Gleichungen, setzt für $(\psi^{(a)}, \psi^{(a-1)})$ seinen Wert ein und berücksichtigt, daß

$$(f, \psi^{(a)}) = (f, \varphi),$$

so folgt:

$$(f, \varphi) = m + (k - k_{a-1} + \varrho_a)(k + \varrho_a + \varrho_{a-1}) - (\psi^{(a-1)}, A^{(a-1)}) + (B^{(a-1)}, A^{(a-1)}).$$

Man kann nun leicht zeigen, daß die Kurvenpaare

$$\psi^{(a-1)} = 0 \quad \text{und} \quad A^{(a-1)} = 0$$

sowie

$$B^{(a-1)} = 0 \quad \text{und} \quad A^{(a-1)} = 0$$

je den einfachen Fall repräsentieren, folglich ist nach den in Nr. 7 angegebenen Eigenschaften dieser Kurven:

$$(\psi^{(a-1)}, A^{(a-1)}) = (2k - k_{a-1} + \varrho_a + \varrho_{a-1})(k - k_{a-1} + \varrho_a),$$

$$(B^{(a-1)}, A^{(a-1)}) = (k - k_{a-1})(k - k_{a-1} + \varrho_a).$$

Setzt man diese Werte ein, so folgt:

$$(f, \varphi) = m,$$

womit der Satz bewiesen ist.

10. Der im vorstehenden gegebene Beweis weicht von dem in meiner Dissertation gegebenen ab; ich verdanke ihn einer freundlichen brieflichen Bemerkung des Herrn Macaulay. A. a. O. wird der Beweis mit Hilfe des folgenden Satzes geführt, den ich, weil er an sich einiges Interesse bietet, ohne Beweis anführen will:

Satz 8. *Gegeben seien zwei Funktionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$, die mit Gliedern k^{ter} bezw. i^{ter} Dimension beginnen und deren Terme niederster Ordnung einen Faktor vom Grad l gemeinsam haben; es lassen sich dann stets drei Funktionen $A(x, y)$, $B(x, y)$ und $\Theta(x, y)$ bestimmen, welche den folgenden Gleichungen genügen:*

$$A\Phi - B\Psi \equiv 0 \mod \{i + k - l + \varrho\},$$

$$\Phi - \Theta B \equiv 0 \mod \{k + \varrho\},$$

$$\Psi - \Theta A \equiv 0 \mod \{i + \varrho\}.$$

Dabei ist ϱ eine ganze positive Zahl; A und B beginnen mit Gliedern von der Dimension $i - l$ bezw. $k - l$ und sind mindestens von der Ordnung $i - l + \varrho - 1$ bezw. $k - l + \varrho - 1$, während Θ mit Gliedern von der Dimension l beginnt und von der Ordnung $l + \varrho - 1$ ist.

Mit Benützung der in (I), Nr. 7 eingeführten Funktionen läßt sich die Zusammensetzung der Zahl m in folgender Weise deuten: Diejenigen Zweige von f und φ, deren gemeinsame Tangenten durch $\vartheta_{k_1}^{(1)} = 0$ gegeben sind, haben im Ursprung je eine σ_1 fache Berührung; die Zweige, deren gemeinsame Tangenten durch $N_{k_j - k_{j-1}}^{(j-1)} = 0$ $(j = 2, \cdots, \mathfrak{a}-1)$ gegeben sind, haben im Ursprung je eine σ_j-fache Berührung und die Zweige, deren gemeinsame Tangenten durch $B_{k_{\mathfrak{a}} - k_{\mathfrak{a}-1}}^{(\mathfrak{a}-1)} = 0$ gegeben sind, haben je eine $\sigma_{\mathfrak{a}}$-fache Berührung. Die Charakteristik hängt also nur von k und der höchsten Ordnung der Berührung, nicht aber von der Multiplizität direkt ab.*)

Wegen näherer Ausführung der im vorstehenden gegebenen Andeutungen sei auf meine Dissertation verwiesen. Dort findet man auch eine Reihe von Anwendungen der hier gegebenen Sätze, deren wichtigste ich zum Schluß ohne Beweis zusammenstelle:

Satz 9. Ist $\Phi(x, y)$ eine Funktion, die für alle gemeinsamen Verschwindungspunkte von f und φ ebenfalls verschwindet, so läßt sich stets eine Zahl t finden, so daß $\Phi^t = S_1 \cdot f + S_2 \cdot \varphi$. Diese Zahl t übertrifft die größte der Charakteristiken der Schnittpunkte von f und φ um eins.**)

Satz 10. Ist R die durch Elimination von y entstehende Resultante von f und $\psi^{(\mathfrak{a})}$, so beginnen in der bekannten Darstellung

$$R = C \cdot f + D \cdot \psi^{(\mathfrak{a})}$$

die Funktionen C und D mit Gliedern von der Dimension***)

$$ik - k + \sum_{j=1}^{\mathfrak{a}-1} \varrho_j (k_j - 1) \quad \text{bezw.} \quad ik - i + \sum_{j=1}^{\mathfrak{a}-1} \varrho_j (k_j - 1).$$

Endlich gilt noch folgendes allgemeine

Theorem V. *Jede Funktion $F(x, y)$, deren Koeffizienten den Gleichungen des einreihigen Systems genügen, läßt sich bis zu den Gliedern von der Dimension $k + \sigma_1$ darstellen durch eine Produktsumme von der Form $\sum_{j=1}^{\mathfrak{a}} \Theta^{(j)} \cdot S^{(j)}$, wobei die Funktionen $\Theta^{(j)}$ sich aus dem einreihigen System herleiten lassen und ganz bestimmte Eigenschaften haben, während die Funktionen $S^{(j)}$ für jede Funktion F verschieden sind.*

Stuttgart, den 15. Juni 1907.

---

*) Vergl. Bertini, Math. Ann. Bd. 34.

**) Vergl. Netto, Acta math. Bd. 7, p. 101; sowie Hilbert, Math. Ann. Bd. 42.

***) Vergl. Bertini, Rend. d. Ist. Lomb. Ser. 2. Vol. 24 (1891), p. 1095ff.

Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung.

Von

LEOPOLD FEJÉR in Kolozsvár (KLAUSENBURG).

Einleitung.

Herr Landau hat in seiner Arbeit „Über den Picardschen Satz"*) folgendes Theorem gegeben:

„Jede trinomische Gleichung von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_n x^n = 0, \qquad (n \geqq 2)$$

wo $a_1 \neq 0$ ist, hat mindestens eine Wurzel in einem Kreise

$$|x| \leqq \varrho(a_0, a_1),$$

dessen Radius von n und a_n unabhängig ist."

Er findet für $\varrho(a_0, a_1)$ den Wert $2\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

In derselben Arbeit gab Herr Landau noch folgenden Satz:

„Jede quadrinomische Gleichung von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_m x^m + a_n x^n, \qquad (2 \leqq m < n)$$

wo $a_1 \neq 0$ ist, hat mindestens eine Wurzel, deren absoluter Betrag unterhalb einer nur von a_0 und a_1 abhängigen (also von m, n, a_m, a_n unabhängigen) Schranke liegt."

Er findet für diese Schranke den Wert $8\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

In seiner später veröffentlichten Arbeit „Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard"**) nimmt Herr Landau diesen Gegenstand wieder auf. Für den Satz über die trinomische Gleichung teilt er hier einen neuen, von Herrn Hurwitz herrührenden Beweis mit, und für die quadrinomische Gleichung gelingt es ihm, die Schranke $8\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ durch eine

*) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 51, 1906, S. 252—318. Hier kommt nur § 16 in Betracht.

**) Annales de l'École Normale Supérieure, tome XXIV, 1907, pag. 179—201.

kleinere $\beta\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ zu ersetzen, wo indessen die numerische Konstante β noch immer größer ist als 5. Weiter stellt Herr Landau eine Reihe von Fragen*), von welchen wir die folgende hervorheben:

Besteht auch ein allgemeiner Satz für die $(r+1)$-gliedrige Gleichung von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^{n_2} + a_3 x^{n_3} + \cdots + a_r x^{n_r} = 0,$$
$$(1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_r),$$

der den Sätzen über die trinomische und quadrinomische entspricht?

Die folgenden Zeilen sollen zeigen, daß diese Frage zu bejahen ist.**)

§ 1.

Sätze über die kleinste Wurzel einer $(k+1)$-gliedrigen algebraischen Gleichung. Eine Bemerkung.

Es sei $\sum c_s x^s = 0$ eine algebraische Gleichung, deren linke Seite nach wachsenden Potenzen von x geordnet ist. $c_s x^s$ heißt ein Glied der Gleichung, c_s der Koeffizient und s der Exponent des Gliedes. Ich nenne $c_s x^s$ ein „vorhandenes Glied" der Gleichung, wenn $c_s \neq 0$. „$(k+1)$-gliedrige" Gleichung heißt nun eine jede algebraische Gleichung, in welcher die Anzahl der vorhandenen Glieder $\leqq (k+1)$ ist.

$$a_0 x^{\nu_0} + a_1 x^{\nu_1} + \cdots + a_k x^{\nu_k} = 0$$

ist die allgemeinste Form einer solchen Gleichung. Um den trivialen Fall, wo $x = 0$ eine Wurzel der Gleichung ist, von vornherein auszuschließen, setzen wir voraus, daß $\nu_0 = 0$, und $a_0 \neq 0$ ist. Weiter sei ν_1 der Exponent des ersten, nach a_0 vorhandenen Gliedes, d. h. es sei $a_1 \neq 0$. Wir betrachten also eine Gleichung

(1) $$a_0 + a_1 x^{\nu_1} + a_2 x^{\nu_2} + \cdots + a_k x^{\nu_k} = 0,$$

wo

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_k$$

beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, die der Ungleichung

$$0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k$$

genügen, und

$$a_0, a_1, a_2, \cdots a_k$$

beliebige komplexe Zahlen bezeichnen, deren erste zwei von Null verschieden sind. Für eine solche algebraische Gleichung gelten nun folgende Sätze:

*) Vergl. Annales de l'École Normale Supérieure, tome XXIV, pag. 197—201.

**) Einen Auszug dieser Arbeit habe ich in den Comptes Rendus, tome 145, 1907, 26 août veröffentlicht.

Satz I. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens eine Wurzel innerhalb, oder am Rande des Kreisgebietes**)

$$\text{(A)} \qquad |x| \leqq \left(\frac{\nu_2 \nu_3 \cdots \nu_k}{(\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1)\cdots(\nu_k - \nu_1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

Der Radius dieses Kreises hängt, wie wir sehen, von

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_k, a_0, a_1$$

ab, nicht aber von

$$a_2, a_3, \cdots a_k.$$

Aus Satz I folgen dann nacheinander drei weitere Sätze:

Satz II. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens eine Wurzel innerhalb oder am Rande des Kreisgebietes*

$$\text{(B)} \qquad |x| \leqq \left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\cdots(\nu_1+k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

Der Radius dieses Kreises hängt von

$$\nu_1, k, a_0, a_1$$

ab, nicht aber von

$$\nu_2, \nu_3, \cdots \nu_k,$$

$$a_2, a_3, \cdots a_k.$$

Satz III. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens eine Wurzel innerhalb oder am Rande des Kreisgebietes*

$$(C) \qquad |x| \leqq k \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}},$$

dessen Radius von denselben Daten abhängt, wie der Radius im Satze II.

Satz IV. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens eine Wurzel innerhalb oder am Rande des Kreisgebietes*

$$\text{(D)} \qquad |x| \leqq k \left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, \ 1\right\},$$

wenn allgemein $\{\alpha, \beta\}$ *jene der beiden positiven Zahlen* α, β *bedeutet, die nicht kleiner ist als die andere. Der Radius dieses Kreises hängt von*

$$k, a_0, a_1$$

ab, nicht aber von

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_k,$$

$$a_2, \cdots a_k.$$

Mit anderen Worten: Kennt man von einer nach wachsenden Potenzen von x geordneten algebraischen Gleichung die Koeffizienten der ersten zwei vorhandenen Glieder (ohne die Exponenten dieser Glieder zu kennen),

*) Für $\nu_1 = 1$ steht diese Formel in der Note des Herrn Allardice: Bulletin of the American Math. Soc., vol. XIII, June 1907.

so kann man um den Anfangspunkt einen Kreis schlagen, so daß im Innern oder am Rande dieses Kreises mindestens eine Wurzel der Gleichung liegt. Der Radius dieses Kreises hängt außer a_0, a_1 nur noch von der *Gliederanzahl* der gegebenen Gleichung ab (und ist also, unter anderen, vom Grade der Gleichung unabhängig).

Zum richtigen Verständnisse des Satzes IV. kann ich vielleicht folgendes bemerken. Es ist sehr leicht einzusehen, daß es einen Radius R gibt, der außer von den Koeffizienten der ersten zwei vorhandenen Glieder, a_0, a_1, nur noch von n, dem *Grade* der algebraischen Gleichung, abhängt, so daß innerhalb oder am Rande des Kreises $|x| \leqq R$ mindestens eine Wurzel der Gleichung liegt. Denn bezeichnen wir mit

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$$

die Wurzeln der nach wachsenden Potenzen von x geordneten Gleichung

$$a_0 + a_1 x^p + \cdots + a_l x^n = 0,$$

$$(a_0 \neq 0,\quad a_1 \neq 0,\quad a_l \neq 0),$$

so ist

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \pm \frac{a_1}{a_l},$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-p} + \cdots \quad = \pm \frac{a_1}{a_l}.$$

Durch Division erhalten wir

$$\frac{1}{x_{n-p+1} \cdots x_n} + \cdots = \pm \frac{a_1}{a_0},$$

wo auf der linken Seite eine Summe von $\binom{n}{p}$ Gliedern steht. Bezeichnet nun x_1 eine Wurzel der Gleichung, deren absoluter Betrag nicht größer ist als der absolute Betrag der übrigen Wurzeln, so erhalten wir, da

$$\left|\frac{1}{x_{n-p+1} \cdots x_n}\right| + \cdots > \left|\frac{a_1}{a_0}\right|,$$

die Ungleichung

$$\binom{n}{p} \cdot \frac{1}{|x_1|^p} \geqq \left|\frac{a_1}{a_0}\right|,$$

aus welcher

$$|x_1| \leqq \binom{n}{p}^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{p}}$$

folgt.*) Da aber

$$\binom{n}{p}^{\frac{1}{p}} \leqq n,$$

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|,\ 1\right\} \qquad (p = 1, 2, \cdots n-1)$$

---

*) Für $p = 1$ vergl. die Züricher Arbeit des Herrn Landau, S. 316.

ist, so ergibt sich

$$R = n\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1\right\}$$

als der gesuchte Radius.

Der Vorteil meiner im Satze IV gegebenen Formel

$$\varrho = k\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1\right\}$$

gegenüber der Formel für R besteht eben darin, daß in ihr als Faktor die die Gliederanzahl definierende Zahl k statt der Gradzahl n steht.

§ 2.

Der Gaußsche Satz. Beweis der Sätze des § 1.

Den Beweis des Satzes I führe ich rein algebraisch mit Hilfe eines allgemeinen algebraischen Theorems, das ich das Gaußsche Theorem nennen möchte.*) Dieses lautet folgendermaßen:

Es sei $f(z) = 0$ eine beliebige algebraische Gleichung, und

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

die voneinander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung, die der Reihe nach die Multiplizität

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$$

haben. Denken wir uns in den Punkten $z_1, z_2, \cdots z_n$ der z-Ebene Massen konzentriert, die der Reihe nach die Größe der Multiplizitätszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ haben, und eine anziehende (oder eine abstoßende) Kraft ausüben, die dem reziproken Wert des Abstandes proportional ist. Bedeutet dann z' eine beliebige Wurzel von

$$\frac{d f(z)}{dz} \equiv f'(z) = 0$$

($z' \neq z_1, z_2, \cdots z_n$), so bleibt eine im Punkte z' konzentrierte Masse unter der Wirkung der erwähnten Kräfte im *Gleichgewicht*.**)

*) Die Kenntnis dieses Theorems verdanke ich Herrn J. O. Müller. Herr Prof. Stäckel hatte die Freundlichkeit mich darauf aufmerksam zu machen, daß der in Rede stehende Satz im Nachlasse von Gauß vorgefunden und in den Gesammelten Werken abgedruckt worden ist. In bezug auf dieses Gaußsche Theorem vergl.:

Gauß, Werke, 3ter Band, 1866, S. 112.

Ch. F. Lucas, Comptes Rendus, 1868 (2ième semestre), 1888, (1ier semestre).

Gauß, Werke, 8ter Band, 1900, S. 32.

P. J. Heawood, Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Quarterly Journal of Math., Vol. XXXVIII, No. 1, 1906, No. 2, 1907.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Band, 1907, S. 176.

**) Dies ist eine *mechanische* Deutung der Wurzeln der Ableitungsgleichung $f'(z) = 0$. Man kann sie auch als *Schwerpunkte* positiver, in den Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_n$

Der Satz läßt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{f'(z')}{f(z')} = \frac{\alpha_1}{z'-z_1} + \frac{\alpha_2}{z'-z_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z'-z_n} = 0$$

sehr leicht beweisen.

Aus dem Gaußschen Satze folgt nun unmittelbar, daß *keine der Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$ außerhalb jenes kleinsten, konvexen, geradlinigen Polygons fallen kann, das sich um die Wurzeln von $f(z) = 0$ spannen läßt.* Daraus ziehen wir folgendes

Korollar: *Die größte Wurzel von $f'(z) = 0$ ist kleiner als die größte Wurzel von $f(z) = 0$, oder höchstens ihr gleich. Dabei ist immer der absolute Betrag der betreffenden Wurzel gemeint.*

Dieses Korollar allein ist es, das wir zum Beweise des Satzes I benutzen. Indem wir etwa $k = 3$ nehmen, lautet die Gleichung

(1) $$a_0 + a_1 x^{\nu_1} + a_2 x^{\nu_2} + a_3 x^{\nu_3} = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad a_1 \neq 0,$$

und wir suchen eine obere Schranke für den Modul der kleinsten Wurzel dieser Gleichung. Wenn wir in (1)

$$x = \frac{1}{z}$$

setzen, und mit z^{ν_3} durchmultiplizieren, so erhalten wir die zu (1) *reziproke* Gleichung

(2) $$a_0 z^{\nu_3} + a_1 z^{\nu_3 - \nu_1} + a_2 z^{\nu_3 - \nu_2} + a_3 = 0,$$

und wir fragen jetzt nach einer unteren Schranke für die Wurzel vom größten absoluten Betrage dieser Gleichung. Bilden wir nun die Ableitungsgleichung für (2)

(3) $$\nu_3 a_0 z^{\nu_3 - 1} + (\nu_3 - \nu_1)\, a_1 z^{\nu_3 - \nu_1 - 1} + (\nu_3 - \nu_2)\, a_2 z^{\nu_3 - \nu_2 - 1} = 0,$$

so ist nach unserem Korollar der Modul der größten Wurzel dieser Gleichung sicher kleiner (oder jedenfalls nicht größer) als der Modul der größten Wurzel von (2). Die Null ist $(\nu_3 - \nu_2 - 1)$-fache Wurzel von (3). Sie ist gewiß nicht die größte Wurzel von (3). Indem wir also mit $z^{\nu_3 - \nu_2 - 1}$ dividieren, erhalten wir die Gleichung

$$\nu_3 a_0 z^{\nu_2} + (\nu_3 - \nu_1)\, a_1 z^{\nu_2 - \nu_1} + (\nu_3 - \nu_2)\, a_2 = 0.$$

---

konzentrierter Massen interpretieren, wie ich es in meiner Comptes-Rendus-Note tat. Schließlich gab in der früher zitierten Arbeit Herr Heawood eine *geometrische* Interpretation. Er erkennt in den Wurzeln z' die Foci einer gewissen durch $z_1, z_2, \cdots, z_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ definierten algebraischen Kurve. Es sei z. B. $n = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Schreiben wir dem Dreiecke $z_1 z_2 z_3$ eine Ellipse ein, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten berührt, dann repräsentieren die beiden Foci dieser Ellipse die Wurzeln der Ableitungsgleichung der betrachteten kubischen Gleichung. (Heawood, pag. 85.) Vergl. übrigens F. J. van den Berg, Nieuw Archief voor Wiskunde: 1882, 1884, und besonders 1888. Auch kann auf die Note von E. Cesàro: Relazioni fra le radici dell' equazione cubica e quelle della sua derivata, Periodico di Mat. 1900, hingewiesen werden.

Derivieren wir nochmals, und dividieren nachher mit $z^{\nu_2-\nu_1-1}$, so erhalten wir

$$\nu_2\nu_3 a_0 z^{\nu_1} + (\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1)\, a_1 = 0.$$

Die Gleichung (2) hat also sicher eine Wurzel, deren absoluter Betrag

$$\geqq \left(\frac{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)}{\nu_2\nu_3}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_1}{a_0}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

ist, und folglich hat Gleichung (1) sicher eine Wurzel innerhalb, oder am Rande des Kreises

$$\text{(A)} \qquad |x| \leqq \left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}},$$

womit Satz I bewiesen ist.

Aus Satz I folgt leicht Satz II. Da nämlich

$$\nu_2 \geqq \nu_1 + 1$$

ist, so folgt

$$\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1} \leqq \frac{\nu_1+1}{1}.$$

Da weiter

$$\nu_3 \geqq \nu_1 + 2$$

ist, so folgt

$$\frac{\nu_3}{\nu_3-\nu_1} \leqq \frac{\nu_1+2}{2}$$

etc.

$$\frac{\nu_k}{\nu_k-\nu_1} \leqq \frac{\nu_1+k-1}{k-1}.$$

Diese Ungleichungen ergeben

$$\left(\frac{\nu_2\nu_3\cdots\nu_k}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)\cdots(\nu_k-\nu_1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \leqq \left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\cdots(\nu_1+k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}},$$

und damit ist Satz II erwiesen.

Der Radius des Kreises (B) erhält einen besonders einfachen Wert, wenn $\nu_1 = 1$ ist. Für diesen speziellen Fall lautet der Satz II folgendermaßen:

Eine jede $(k+1)$-gliedrige Gleichung von der Form:

$$\text{(4)} \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^{\nu_2} + \cdots + a_k x^{\nu_k} = 0,$$

$$(a_1 \neq 0)$$

hat eine Wurzel innerhalb oder am Rande des Kreises

$$|x| \leqq k \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Die auf der rechten Seite dieser Ungleichung auftretende Konstante k

kann durch *keine kleinere* Konstante ersetzt werden, ohne daß die allgemeine Gültigkeit des Satzes aufhören würde. Denn die $(k+1)$-gliedrige Gleichung

$$(5) \qquad a_0\left(1+\frac{a_1 x}{k a_0}\right)^k \equiv a_0 + a_1 x + \cdots = 0$$

hat nicht innerhalb, sondern genau am Rande des Kreises $|x| \leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ ihre (übrigens einzige) Wurzel.*)

Nach Satz II hat Gleichung (1) eine Wurzel im Kreise

$$|x| \leqq \left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\cdots(\nu_1+k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

Betrachten wir die Funktion

$$\varphi(t) = \left(\frac{(t+1)(t+2)\cdots(t+k-1)}{1\cdot 2\cdots k-1}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Diese nimmt für $t=1$ den Wert k an. Wenn t von $t=1$ an monoton ins Unendliche wächst, so nimmt $\varphi(t)$ monoton ab und konvergiert für $t=+\infty$ zu 1. Da aber $\nu_1 \geqq 1$ ist, so hat Gleichung (1) sicher eine Wurzel in dem Kreise

$$|x| \leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}},$$

womit Satz III erwiesen ist.

Um Satz IV zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: $\qquad \left|\frac{a_0}{a_1}\right| \geqq 1.$

Dann ist

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} \leqq \left|\frac{a_0}{a_1}\right|,$$

so daß wir zum Kreisgebiete

$$|x| \leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

gelangen. Jede Gleichung (1) hat in diesem Kreise eine Wurzel, wenn

---

*) Ist n der Grad der Gleichung (4), so ist $|x| \leqq n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ ein Gebiet für die kleinste Wurzel. Unser Satz verschärft das Gebiet auf $|x| \leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$. Eine weitere Verschärfung ist nach der Bemerkung des Textes nicht mehr möglich; die die Gliederanzahl definierende Zahl k ist sozusagen die „richtige" Konstante. — Ist Gleichung (4) trinomisch, so ist $k=2$ (Landau), ist Gleichung (4) quadrinomisch, so ist $k=3$ etc. (Vergl. Einleitung.)

$\left|\frac{a_0}{a_1}\right| \geqq 1$ ist. Die Konstante k läßt sich durch keine kleinere ersetzen; es genügt, hierzu wieder auf Gleichung (5) verweisen.

Zweiter Fall: $$\left|\frac{a_0}{a_1}\right| < 1.$$

Dann ist

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} < 1,$$

und wir erhalten als gesuchtes Kreisgebiet*)

$$|x| < k.$$

In beiden Fällen ist

$$|x| \leqq \left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1\right\}$$

ein Bereich der kleinsten Wurzel, womit Satz IV erwiesen ist.

§ 3.

Anwendung des Satzes I auf gewisse Potenzreihen mit Lücken.

Es sei

$$a_0 + a_1 x^{\nu_1} + a_2 x^{\nu_2} + \cdots + a_k x^{\nu_k} \cdots \text{ in inf.} \tag{6}$$

$$(a_1 \neq 0)$$

eine nach wachsenden Potenzen von x geordnete Potenzreihe. In dieser sollen keine Glieder vorhanden sein, die einen von

$$0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_k,\ \cdots$$

verschiedenen Exponenten haben. Betrachten wir das Polynom

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x^{\nu_1} + \cdots + a_k x^{\nu_k}.$$

---

*) Ist $\left|\frac{a_0}{a_1}\right| < 1$, so zeigt schon die Betrachtung der binomischen Gleichung, daß der Bereich $|x| \leqq k \left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ *nicht* notwendig eine Wurzel der Gleichung (1) enthält. Hingegen ist natürlich der Kreis $|x| \leqq k$ im allgemeinen zu groß; einen besseren Wert für den Radius des Kreisgebietes liefert in diesem Falle das Maximum der Funktion

$$\left(\left|\frac{a_0}{a_1}\right| \frac{(t+1)(t+2)\cdots(t+k-1)}{1\cdot 2\cdot (k-1)}\right)^{\frac{1}{t}}$$

wo

$$1 \leqq t \leqq +\infty,$$

ein Wert, der > 1 und $< k$ ist, und der ebenfalls nur von a_0, a_1 und k abhängt.

Nach Satz I hat $P_k(x)$ sicher eine Wurzel für

$$|x| \leqq \left(\frac{1}{\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_k}\right)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

Die Lücken der Potenzreihe seien nun solcherart, daß die reziproken Exponenten der Glieder eine konvergente Reihe bilden, daß also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$$

konvergent ist. Dann konvergiert bekanntlich auch das unendliche Produkt

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_k}\right) = g,$$

und *wir erhalten durch Anwendung eines Hurwitzschen Lemmas*) den Satz, daß die Potenzreihe* (6), *wenn sie im Gebiete*

$$|x| \leqq \left(\frac{|a_0|}{g\,|a_1|}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}$$

konvergiert, ebenda mindestens eine Nullstelle besitzt. Der Radius des Kreises hängt nur von

$$a_0,\ a_1,\ \nu_1 \text{ und } g$$

ab.

Betrachten wir als Beispiel die Potenzreihe

(7) $$1 + x + a_2 x^4 + a_3 x^9 + \cdots + a_n x^{n^2} + \cdots.$$

Da hier

$$a_0 = a_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad g = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

ist, so hat die Potenzreihe (7) im Gebiete

$$|x| \leqq 2$$

notwendigerweise eine Nullstelle, wenn sie in demselben Gebiete auch konvergiert.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß eine mit Lücken behaftete Potenzreihe der Form (6), die in der ganzen Ebene konvergiert, *keinen* Picardschen Ausnahmewert besitzt, wenn $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ konvergent ist.

*) „Über die Nullstellen der Besselschen Funktion", § 1, Math. Annalen, Band 33, 1889.

In der Tat nimmt dann die Reihe (6) den beliebigen komplexen Wert c im Gebiete

$$|x| \leqq \left(\frac{|a_0 - c|}{g\,|a_1|}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}$$

notwendigerweise an.*)

Kolozsvár, 11. Oktober 1907.

---

*) Der Satz dieses Paragraphen gehört zu der Kategorie von Sätzen, welche von den Herrn Landau und Hurwitz (vergl. die Pariser Arbeit des Herrn Landau) für eine Potenzreihe aufgestellt worden sind, in welcher

$$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k, \cdots$$

eine *arithmetische Progression* bilden, deren von 1 verschiedene Differenz kein Divisor des ersten Gliedes ν_1 ist.

Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Die interessante Abhandlung von Herrn A. Fleck „Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen"*) gibt mir Veranlassung, einige Betrachtungen mitzuteilen, die ich vor längerer Zeit bei Gelegenheit der Lektüre von Herrn E. Maillets Aufsatz: „Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes entiers positifs"**) anstellte.

1. Angenommen, es sei für einen bestimmten Exponenten n bekannt, daß sich jede positive Zahl als Summe von höchstens k n^{ten} Potenzen darstellen läßt, wo k eine feste Anzahl bezeichnet. Angenommen ferner, es bestehe eine in den Größen a, b, c, d identische Gleichung von der Form

$$(1) \qquad p(a^2+b^2+c^2+d^2)^n = \sum_{i=1}^{r} p_i(\alpha_i a + \beta_i b + \gamma_i c + \delta_i d)^{2n},$$

wobei $p, p_1, p_2, \ldots, p_r$ *positive* ganze Zahlen, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \delta_r$ aber beliebige ganze Zahlen bedeuten. Dann folgt leicht, daß auch jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens k' $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar ist, unter k' wiederum eine feste Anzahl verstanden.

In der Tat: jede ganze Zahl ist als Summe $a^2+b^2+c^2+d^2$ von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar. Daher wird nach Gleichung (1) das p-fache *jeder* n^{ten} Potenz als Summe von höchstens $p_1+p_2+\cdots+p_r$ $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar sein. Da weiter nach Voraussetzung jede ganze Zahl eine Summe von höchstens k n^{ten} Potenzen ist, so läßt sich das p-fache *jeder* ganzen Zahl als Summe von höchstens $k(p_1+p_2+\cdots+p_r)$ $2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellen. Und da jede beliebige ganze Zahl aus einem

*) Diese Annalen, Bd. 64, S. 561.

**) Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux 1895.

Vielfachen von p durch Addition von 0 oder 1 oder 2,... oder $p-1$ Einheiten entsteht, so ergibt sich schließlich, daß jede beliebige ganze Zahl als Summe von höchstens

$$k' = k(p_1 + p_2 + \cdots + p_r) + p - 1 \tag{2}$$

$2n^{\text{ten}}$ Potenzen darstellbar ist.

Eine Identität von der Gestalt (1) ist für den Fall $n = 2$ von Liouville, für den Fall $n = 3$ von Herrn Fleck*) aufgestellt worden. Für einen beliebigen Wert von n die Existenz einer derartigen Identität nachzuweisen, scheint aber eine Aufgabe von erheblicher Schwierigkeit zu sein. Doch ist es mir wenigstens gelungen, den nächsten Fall $n = 4$ zu erledigen. In diesem Falle besteht die folgende Gleichung:

$$5040(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \tag{3}$$

$$= 6\sum_{a\ldots d}^{(4)}(2a)^8 + 60\sum_{a\ldots d}^{(12)}(a \pm b)^8 + \sum_{a\ldots d}^{(48)}(2a \pm b \pm c)^8 + 6\sum_{a\ldots d}^{(8)}(a \pm b \pm c \pm d)^8,$$

wobei ich dieselbe Bezeichnungsweise angewendet habe, wie sie Herr Fleck benutzt.

Da die entwickelte rechte Seite nur gerade Potenzen von a, b, c, d enthält und in diesen Größen symmetrisch ist, so genügt es zur Verifikation der Gleichung (3), die Übereinstimmung der Koeffizienten von

$$a^8,\ a^6b^2,\ a^4b^4,\ a^4b^2c^2,\ a^2b^2c^2d^2$$

auf der linken und rechten Seite festzustellen, was durch eine kurze Rechnung geschieht.

Die in der Gleichung (1) mit $p, p_1, p_2, \ldots, p_r$ bezeichneten Koeffizienten haben in (3) folgende Werte: es ist $p = 5040$; von den übrigen Koeffizienten sind 4 gleich 6, ferner 12 gleich 60, weitere 48 gleich 1 und die übrigen 8 gleich 6. Nun hat Herr Landau**) bewiesen, daß jede ganze Zahl als Summe von höchstens 38 Biquadraten darstellbar ist. Nach Gleichung (2) ergibt sich für die achten Potenzen demnach

$$k' = 38\,(4\,.\,6 + 12\,.\,60 + 48 + 8\,.\,6) + 5039 = 36959,$$

d. h.:

*Jede positive ganze Zahl läßt sich als Summe von höchstens 36959 achten Potenzen ganzer Zahlen darstellen.****)

Es würde leicht sein, die Anzahl 36959 in diesem Satze auf einen kleineren Wert zu reduzieren; doch bietet diese Reduktion kein größeres Interesse.

---

*) A. a. O.

**) Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXIII, p. 91.)

***) Vergleiche hierzu auch die in den Comptes Rendus vom 30. Dezember 1907 erschienene Mitteilung von E. Maillet. (Zusatz bei der Korrektur.)

2. Bezüglich der Darstellung der positiven ganzen Zahlen durch eine Summe von n^{ten} Potenzen positiver ganzen Zahlen kann man leicht den folgenden Satz beweisen:

„Es gibt unendlich viele positive ganze Zahlen, die nicht als Summe von n oder weniger n^{ten} Potenzen darstellbar sind."

Mit anderen Worten: Bezeichnet $\psi(k)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = k \tag{4}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so ist für unendlich viele Zahlen k

$$\psi(k) = 0.$$

Bedeutet nämlich A die Anzahl derjenigen Systeme von n nicht negativen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche der Bedingung

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \leqq k \tag{5}$$

genügen, so ist nach bekannten Prinzipien*)

$$\operatorname*{Lim}_{k=\infty} \frac{A}{k} = \int\limits_{(n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n \text{**}), \tag{6}$$

wo das n-fache Integral über das Gebiet

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0, \quad x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \leqq 1$$

auszudehnen ist. Anderseits ist

$$A = \psi(0) + \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(k). \tag{7}$$

Würde nun von einer gewissen Grenze, etwa von $k = N + 1$ ab, die Anzahl $\psi(k)$ stets größer als Null, also mindestens gleich 1 sein, so wäre für $k > N$

$$A \geqq \psi(0) + \psi(1) + \cdots + \psi(N) + k - N = k + C,$$

wo C von k unabhängig ist. Hieraus würde folgen

$$\frac{A}{k} \geqq 1 + \frac{C}{k}$$

und also durch Übergang zur Grenze $k = \infty$:

$$\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n \geqq 1. \tag{8}$$

Diese Ungleichung widerspricht aber der Tatsache, daß $\Gamma(x) < 1$ ist, wenn das Argument x zwischen 1 und 2 liegt. Demnach muß es, wie unser Satz behauptet, über jeder noch so großen Grenze N solche Zahlen k

---

*) Dirichlet, Werke, Bd. I, S. 418.

**) Ebenda, S. 389. Die Gleichung (6) betrachtet auch Mathews in der Note „On the representation of integers as sums of powers" (Messenger of Mathematics vol. 25 (1895) p. 69). Doch sind die Folgerungen, die Mathews aus der Gleichung (6) zieht, vollständig sinnlos.

geben, für die $\psi(k) = 0$ ist. Übrigens läßt sich dieser Satz, beiläufig bemerkt, auch ganz elementar, ohne Anwendung der Gleichung (6), durch eine direkte Abschätzung der Anzahl A beweisen. — Im Falle $n = 3$ ist unser Satz insofern trivial, als er schon aus der einfachen Tatsache*) folgt, daß die Summe dreier Kuben

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

durch 9 dividiert wohl die Reste $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, niemals aber die Reste ± 4 lassen kann.

Ähnlich ist es im Falle $n = 4$, worauf mich Herr Landau gelegentlich aufmerksam machte. Jedes Biquadrat ist $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 16) und die Summe

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + \cdots + x_r^4$$

läßt daher durch 16 dividiert einen der Reste $0, 1, 2, \ldots r$. Solange $r < 15$ ist, gibt es also sicher unendlich viele Zahlen, die nicht als Summe von r Biquadraten darstellbar sind.

Die Gleichung (6) führt indessen, wenigstens im Falle $n = 3$, doch zu einem weiteren Resultat, nämlich zu folgendem Satze:

Unter den Zahlen, die durch 9 dividiert einen der Reste $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ lassen, gibt es unendlich viele, die nicht als Summe von drei Kuben darstellbar sind.

Wollte man das Gegenteil annehmen, so würde folgen, daß über eine gewisse Grenze hinaus $\frac{7}{9}$ aller Zahlen als Summe von drei Kuben darstellbar sind.

An Stelle der Ungleichung (8) würde sich nun ergeben

$$\left[\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\right]^3 \geqq \tfrac{7}{9} = 0{,}777 \cdots,$$

eine Ungleichung, die nicht erfüllt ist, da man

$$\left[\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\right]^3 = 0{,}71 \cdots$$

findet. Die Annahme, daß alle über einer gewissen Grenze liegenden Zahlen von einer der Formen $16m + r$ $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$ sich als Summe von vier Biquadraten darstellen lassen, würde dagegen nicht im Widerspruch mit der Gleichung (6) stehen, da die Ungleichung

$$\left[\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{4}\right)\right]^4 \geqq \tfrac{5}{16}$$

tatsächlich erfüllt ist.

Zürich, 20. November 1907.

---

*) Jacobi, Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Kuben. (Werke, Bd. 6, S. 326.)

Über die diophantische Gleichung $x^3y + y^3z + z^3x = 0$.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der Theorie der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen spielt bekanntlich die Kurve vierter Ordnung

(1) $$x^3y + y^3z + z^3x = 0,$$

welche 168 Kollineationen in sich besitzt, eine hervorragende Rolle.*)

Liegen auf dieser Kurve Punkte, deren Koordinaten ganzen rationalen Zahlen proportional sind? Man sieht sofort, daß jedenfalls drei derartige Punkte, nämlich:

$$x : y : z = 1 : 0 : 0, \quad \text{resp. } 0 : 1 : 0, \quad \text{resp. } 0 : 0 : 1,$$

welche die Ecken des Koordinatendreiecks bilden, vorhanden sind. Ich will nun zeigen, daß es keine weiteren solche Punkte gibt, daß also folgender Satz gilt:

„Die Gleichung (1) *besitzt keine Auflösung in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen x, y, z."*

Man nehme an, es seien x, y, z drei von Null verschiedene ganze Zahlen, welche der Gleichung (1) genügen. Dann darf man diese Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Teiler (außer 1) voraussetzen, da man einen solchen Teiler unterdrücken könnte, ohne daß die Zahlen aufhören würden, der Gleichung (1) zu genügen. Die positiv genommenen größten gemeinsamen Teiler der Zahlen x, y, z, diese zu je zweien genommen, seien nun

(2) $$(y, z) = u, \quad (z, x) = v, \quad (x, y) = w.$$

Da v und w relative Primzahlen sind (denn ein gemeinsamer Teiler von v und w würde in x, y, z aufgehen) und x sowohl durch v wie durch w teilbar ist, so ist x auch durch vw teilbar. Analoges gilt für y und z, so daß man

(3) $$x = vwx', \quad y = wuy', \quad z = uvz'$$

*) F. Klein, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, diese Annalen, Bd. 14, S 428.

setzen kann.*) Trägt man diese Ausdrücke von x, y, z in (1) ein, so kommt nach Division mit uvw:

(4) $$v^2w^3x'^3y' + w^2u^3y'^3z' + u^2v^3z'^3x' = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge ist $v^2w^3x'^3y'$ durch u^2 teilbar. Da aber u zu den drei Zahlen v, w, x' teilerfremd ist, so muß y' durch u^2 teilbar sein. Andererseits ist nach Gleichung (4) auch $u^2v^3z'^3x'$ durch y' teilbar, und da y' zu den drei Zahlen v, z', x' teilerfremd ist, notwendig u^2 durch y' teilbar. Jede der beiden Zahlen u^2 und y' ist also durch die andere teilbar und folglich

$$y' = \pm u^2.$$

Ebenso ergibt sich:

$$z' = \pm v^2, \quad x' = \pm w^2.$$

Die vorstehenden Werte von x', y', z' setze man in die Gleichung (4) ein und dividiere die entstehende Gleichung durch $u^2v^2w^2$. Dadurch kommt:

(5) $$\pm u^7 \pm v^7 \pm w^7 = 0.$$

Wenn also die Gleichung (1) eine Auflösung in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen besitzen würde, so hätte auch die Fermatsche Gleichung (5) eine solche Auflösung. Da die letztere Gleichung aber unlösbar ist, so ist es also auch die erstere, w. z. b. w.

Die vorstehende Betrachtung läßt sich wörtlich auf die allgemeinere diophantische Gleichung

(6) $$x^my^n + y^mz^n + z^mx^n = 0$$

übertragen, in welcher m, n zwei positive ganze Zahlen bezeichnen, die nicht beide gerade sind. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, darf man

$$m \geq n$$

und überdies m und n teilerfremd voraussetzen.

Behält man die durch die Gleichungen (2) und (3) eingeführten Bezeichnungen bei, so ergibt sich zunächst

(7) $$v^{m-n}w^mx'^my'^n + w^{m-n}u^my'^mz'^n + u^{m-n}v^mz'^mx'^n = 0,$$

und hieraus folgert man

$$x'^n = \pm w^{m-n}, \quad y'^n = \pm u^{m-n}, \quad z'^n = \pm v^{m-n}.$$

Aus den letzteren Gleichungen schließt man weiter (da die Exponenten n und $m-n$ teilerfremd sind)

$$\begin{cases} x' = \pm w_1^{m-n}, & y' = \pm u_1^{m-n}, & z' = \pm v_1^{m-n}, \\ w = \quad w_1^n\ , & u = \quad u_1^n\ , & v = \quad v_1^n\ . \end{cases}$$

---

*) Vgl. R. Dedekind (Braunschweiger Festschrift 1897) und P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Leipzig 1902, S. 37.

Nunmehr geht die Gleichung (7) über in

(8) $$(\pm u_1)^{m^2-mn+n^2} + (\pm v_1)^{m^2-mn+n^2} + (\pm w_1)^{m^2-mn+n^2} = 0.$$

Aus einer Lösung der Gleichung (6) folgt daher eine Lösung der Gleichung (8).

Aber auch umgekehrt: Befriedigen $\pm u_1$, $\pm v_1$, $\pm w_1$ die Gleichung (8), so werden

$$x = \pm v_1^n w_1^m, \quad y = \pm w_1^n u_1^m, \quad z = \pm u_1^n v_1^m$$

die Gleichung (6) befriedigen.

Es gilt daher der Satz (in dessen Ausspruch die soeben mit $\pm u_1$, $\pm v_1$, $\pm w_1$ bezeichneten Zahlen durch u, v, w bez. ersetzt sind):

Die diophantischen Gleichungen

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$$

und

$$u^{m^2-mn+n^2} + v^{m^2-mn+n^2} + w^{m^2-mn+n^2} = 0$$

sind entweder beide in ganzen, nicht verschwindenden Zahlen lösbar oder beide nicht lösbar.

Setzt man also den „großen“ Fermatschen Satz für den Exponenten $m^2 - mn + n^2$ als bewiesen voraus, so folgt daraus die Unlösbarkeit der Gleichung (6).

Insbesondere würde die allgemeine Gültigkeit des Fermatschen Satzes die Folgerung gestatten, daß die Gleichung (6) nur in dem trivialen Fall $m = n = 1$ Lösungen in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen x, y, z zuläßt.

Zürich, 20. November 1907.

Bemerkung zu meinem zweiten Beitrag zur Theorie der Punktmengen.*)

Von

A. SCHOENFLIES in Königsberg i/Pr.

Der zweite Beitrag zur Theorie der Punktmengen enthält eine Ungenauigkeit, die ich hier richtig stelle.

Auf S. 139 spreche ich folgenden Satz aus: Sind $T_1, T_2, T_3, \cdots$ unendlich viele isolierte Mengen, deren jede zusammenhängend und nirgends dicht ist, so ist auch ihre Grenzmenge, falls sie nicht etwa aus einem einzigen Punkt besteht, zusammenhängend und nirgends dicht.**)

Wie der Beweis erkennen läßt, setzt der Satz voraus, daß die Grenzmenge T_ω auch wirklich Grenzmenge *aller* T_ν ist, daß es also in der Nähe eines *jeden* Punktes von T_ω Punkte t_ν für jedes hinlänglich große $\nu > N$ gibt. Dies sollte allerdings auch in der Formulierung des Satzes Ausdruck finden. Der Beweis selbst bedarf keiner Änderung.***)

Dagegen ist der Beweis des in § 4 enthaltenen Satzes V an einer Stelle zu modifizieren. Dort betrachte ich die unendlich vielen isolierten Mengen

$$(1) \qquad T_1, T_2, \cdots, T_\mu, \cdots$$

und sage (S. 144, Z. 12), daß ihre Grenzmenge nur zu *einem* Summanden von $\mathfrak{T}_\omega$ gehört; alsdann wird aus $\mathfrak{T}_\omega$ ein Bestandteil T'_ω so ausgewählt, daß T_ω und T'_ω getrennte Mengen sind. Dies ist, wie folgt, zu ändern.

Die Menge T_ω gehört entweder nur zu einem Summanden von $\mathfrak{T}_\omega$ oder zu mehreren. Im zweiten Fall kann man aber aus der Folge (1) eine unendliche *Teilmenge* $\{T'_\lambda\}$ so absondern, daß diese Mengen die im

*) Diese Annalen Bd. 59, S. 129—160.

**) Für nicht isolierte Kontinua trifft der Satz nicht zu.

***) Ohne die obige Festsetzung würde er versagen. Es brauchte sonst nur je eine Teilmenge $\{T'_\nu\}$ und $\{T''_\nu\}$ von $\{T_\mu\}$ zu geben, deren Punkte für hinlänglich großes ν in der Nähe von t' und t'' liegen, und diese Teilmengen brauchten keine gemeinsamen Mengen T_μ zu enthalten (vgl. a. a. O. S. 140).

Eingang genannte Eigenschaft besitzen, daß also ihre Grenzmenge auch wirklich Grenzgebilde *aller* $\{T'_\lambda\}$ ist. Dann tritt diese Grenzmenge T'_ω für T_ω ein, und es wird dann aus T_ω ein Bestandteil T''_ω so ausgewählt, daß T'_ω und T''_ω getrennte Mengen sind, was stets möglich ist.

Das übrige bleibt unverändert; immer mit der Maßgabe, daß die Folge $\{T_\mu\}$ durch die Teilfolge $\{T'_\lambda\}$ zu ersetzen ist.*)

Königsberg i/Pr.,

*) Vgl. die ausführliche Erörterung im zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichts, Jahresber. d. D. M. V. Ergänzungsband II (1907), S. 133.

Zum Andenken an Adolph Mayer
(1839—1908).

Von

K. VONDERMÜHLL in Basel.

Am 11. April d. J. entschlief in Gries-Bozen nach längerem Leiden Adolph Mayer. Er mußte die Vorlesung, die er im Herbst 1907 begonnen hatte, im Dezember aufgeben, und der Aufenthalt in milderem Klima konnte den Fortschritt der Krankheit nicht aufhalten. Von 1873 an, nach dem Tode von Alfred Clebsch, hat er an der Herausgabe der Mathematischen Annalen mitgewirkt, insbesondere von 1876 bis 1902 den Verkehr mit der Verlagshandlung B. G. Teubner gepflegt.

Christian Gustav Adolph Mayer war geboren den 15. Februar 1839 in Leipzig. Er durchlief die Schulen seiner Vaterstadt; an der Thomasschule erwarb er Michaelis 1859 die Maturität. Er wandte sich zunächst nach Heidelberg, dann für zwei Semester nach Göttingen, wo er namentlich bei M. A. Stern hörte; im Herbst 1859 kehrte er nach Heidelberg zurück und promovierte dort am 14. Dezember unter Otto Hesse. Diesem trat er während seines zweiten Heidelberger Aufenthaltes auch persönlich nahe und konnte bei der Korrektur der „Analytischen Geometrie des Raumes“, die 1861 in Leipzig erschien, sehr erwünschte Hilfe leisten. Die Hessische analytische Methode entsprach seiner Begabung, und er ist ihr treu geblieben.

Vom Herbst 1861 bis zum Sommer 1862 hat Mayer in Heidelberg weiter studiert, den Sommer in Leipzig. Im Herbst 1862 bezog er die Universität Königsberg i./Pr. Dort traf er einen kleinen Kreis gleichstrebender Studiengenossen, mit denen ihn bald enge Freundschaft verband. Neben den Vorlesungen von F. E. Neumann besuchte er während dreier Jahre die Vorlesungen und Übungen von Richelot. Im Anschluß daran hat er die Dissertation ausgearbeitet, womit er sich Ende 1866 in Leipzig habilitierte. Ostern 1867 begann er zu lesen; 1872 wurde er zum außerordentlichen Professor ernannt, 1881 zum ordentlichen Honorarprofessor, 1890 zum Ordinarius der Mathematik. Seit 1881 prüfte er die Kandidaten des höheren Schulamts, und 1882 trat er als Mitdirektor in das von Felix Klein begründete mathematische Seminar. So hat er einige dreißig Jahre an der Leipziger Universität in voller Kraft gewirkt. Er wurde Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig und in

Göttingen, der Turiner Akademie, und der Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher.

Am 1. April 1900 wurde Mayer auf sein Ansuchen vom Kultusministerium aus der Prüfungsbehörde und aus der Direktion des mathematischen Seminars entlassen, in seiner Stellung als ordentlicher Professor der Mathematik mit dem Vorbehalt beurlaubt, nach seinem Belieben Vorlesungen zu halten. Von dem Urlaub hat er nur kurze Zeit Gebrauch gemacht, um eine wissenschaftliche Untersuchung durchzuführen; dann hat er die gewohnten Vorlesungen wieder aufgenommen und regelmäßig gelesen, bis ihn im letzten Dezember seine leidende Gesundheit zwang, abzubrechen und im Süden Linderung der Beschwerden zu suchen.

Die Arbeiten von Adolph Mayer gehören der Variationsrechnung an, der Theorie der Differentialgleichungen und der Mechanik. Angeregt durch eine Vorlesung, die er bei Richelot im Winter 1864/5 gehört hatte, suchte er zunächst die Kriterien des Maximums oder Minimums eines einfachen Integrals strenger zu fassen. Diese Untersuchung führte ihn zum Prinzip der kleinsten Aktion, dessen geschichtlicher Entwicklung seine Antrittsvorlesung in Leipzig gewidmet ist, und zur Dynamik mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. O. Er blieb bei Hamilton und Jacobi nicht stehen; bald suchte er die Methode, womit Sophus Lie eine neue Bahn gebrochen, auf rein analytischem Wege zu entwickeln. Und auf diesem Gebiete hat er immer weiter gearbeitet; in erster Linie strebte er, alle Unklarheit zu heben und auf geradem Wege das Ziel zu erreichen. Seine Abhandlungeen sind ausgezeichnet durch die stetige Entwicklung und die abgerundete Form.

Dem entsprach auch der meisterhafte Vortrag; jede einzelne Vorlesung wurde mit der peinlichsten Sorgfalt vorbereitet. Seine Zuhörer hat er gefördert, wie er konnte, sie zu weiterem Forschen angeregt und ihnen auch für auswärtige Studien den Weg eröffnet. Seinen Kollegen war er der treuste Freund; für die Vertretung der Mathematik an der Leipziger Universität hat er in der uneigennützigsten Weise gewirkt, und wenn es galt, eine auswärtige Kraft zu gewinnen, so war ihm keine Mühe und kein persönliches Opfer zu groß. Mit der vollendeten Liebenswürdigkeit, die ihm eigen war, hat er die Herberufenen in seinem Hause aufgenommen, sie in die Leipziger Kreise eingeführt und alles aufgeboten, ihnen die neue Heimat lieb zu machen. Er fühlte sich reich belohnt, wenn es gelang, den neuen Kollegen ganz für Leipzig zu gewinnen; er hat auch in schweren Tagen treulich beigestanden und sich ein Andenken gesichert, das nicht vergeht.

Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.

Von

F. HAUSDORFF in Leipzig.

Im folgenden wird zum ersten Male eine systematische und möglichst allgemein gehaltene Einführung in das von Herrn G. Cantor erschlossene, aber noch so gut wie unbekannte Gebiet der einfach geordneten Mengen versucht, von denen bisher eigentlich nur die wohlgeordneten Mengen und die Mengen reeller Zahlen eine eingehende Bearbeitung erfahren haben. Auch meine eignen Vorarbeiten*), von denen hier übrigens nichts vorausgesetzt wird, verfolgen im ganzen eine speziellere Richtung; ihr Hauptgegenstand sind gewisse durch besonders regelmäßige Struktur (Homogeneität) ausgezeichnete Typen mit Reihen bis zur zweiten Mächtigkeit, und soweit Verallgemeinerungen angestrebt sind, beschränken sie sich auf die nächstliegenden Stufen, die den Alefs mit endlichen Indizes entsprechen. In der vorliegenden Abhandlung, sollte sie nicht zum Buche anschwellen, mußten diese speziellen Typen durchaus in die Rolle gelegentlicher Illustrationsbeispiele zurücktreten und die allgemeinen Methoden den Vordergrund einnehmen. Das vorschwebende Ideal war etwa eine Beherrschung der Typenwelt in dem Sinne, daß die komplexen Gebilde durch erzeugende Operationen aus elementaren aufgebaut erscheinen sollten; indessen zwingen gewisse Schwierigkeiten, namentlich ungelöste Mächtigkeitsprobleme, noch zur Resignation. Das Baumaterial zwar kann nicht zweifelhaft sein: es sind die wohlgeordneten Mengen und ihre Inversen, deren Mächtigkeit freilich nicht mehr auf die Alefs mit endlichem Index

---

*) *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 58 (1906), 106—169, und 59 (1907), 84—159. Die einzelnen Abhandlungen sind betitelt:

I. Die Potenzen von Ordnungstypen.
II. Die höheren Kontinua.
III. Homogene Typen zweiter Mächtigkeit.
IV. Homogene Typen von der Mächtigkeit des Kontinuums.
V. Über Pantachietypen.

eingeschränkt werden darf, und insbesondere sind die *regulären Anfangszahlen* mit ihren Inversen als die letzten Bausteine und Uratome der Typenwelt anzusehen. Aber die aufbauenden Operationen sind nicht so einfach und naheliegend, wie man wünschen möchte. Die verallgemeinerte *Addition* gestattet nur, aus den Grundelementen die „zerstreuten Mengen“ herzustellen und das, allerdings fundamentale, Ergebnis abzuleiten, daß jede Menge entweder zerstreut oder eine Summe zerstreuter Mengen über einen „dichten“ Erzeuger ist. Für den Aufbau dichter Mengen sind neue konstruktive Methoden erforderlich; *Multiplikation* und *Potenzierung* werden in ihrer allgemeinsten Gestalt entwickelt, und da auch diese Operationen nur beschränkte Tragweite haben, so ist als Letztes noch die *Multiplikation mit variablen Faktoren* herbeizuziehen. Ob hiermit die Analyse jedes beliebigen Typus bis zu den genannten Urtypen hinunter gelingen wird, soll noch dahingestellt bleiben; aber die synthetische Seite des Problems kann jetzt mit befriedigendem Erfolg in Angriff genommen werden. Die dichten Mengen lassen sich klassifizieren, auf Grund der „Charaktere“ ihrer Elemente und Lücken, welche Charaktere wieder von den regulären Anfangszahlen hergenommen sind, und nun ergibt sich mit Hilfe jener erzeugenden Operationen allgemeinster Art, daß alle a priori denkbaren „Spezies“ dichter Mengen wirklich existieren, vertreten nicht nur durch einen, sondern durch unabzählbar viele wesentlich verschiedene Typen.

Hiermit ist das Programm und der hauptsächliche Inhalt der vorliegenden Abhandlung umschrieben. Daß eine Untersuchung wie diese, die den positiven Bestand der noch so jungen Mengenlehre im Sinne ihres Schöpfers um einen, wenn auch nur bescheidenen, Zuwachs zu vermehren trachtet, sich nicht prae limine damit aufhalten kann, in die Diskussion um die Prinzipien der Mengenlehre einzutreten, wird vielleicht an den Stellen Anstoß erregen, wo gegenwärtig ein etwas deplaciertes Maß von Scharfsinn an diese Diskussion verschwendet wird. Einem Beobachter, der es auch der Skepsis gegenüber nicht an Skepsis fehlen läßt, dürften die „finitistischen“ Einwände gegen die Mengenlehre ungefähr in drei Kategorien zerfallen: in solche, die das ernsthafte Bedürfnis nach einer, etwa axiomatischen, Verschärfung des Mengenbegriffs verraten; in diejenigen, die mitsamt der Mengenlehre die ganze Mathematik treffen würden; endlich in einfache Absurditäten einer an Worte und Buchstaben sich klammernden Scholastik. Mit der ersten Gruppe wird man sich heute oder morgen verständigen können, die zweite darf man getrost auf sich beruhen lassen, die dritte verdient schärfste und unzweideutigste Ablehnung. In der vorliegenden Arbeit werden diese drei Reaktionen stillschweigend vollzogen. Sie stellt sich insbesondere auf den Standpunkt, daß die Gesamtheit „aller“ Ordnungszahlen oder Kardinalzahlen

weder als Menge noch als Teilmenge einer Menge widerspruchsfrei existiert; sie akzeptiert den Cantorschen Wohlordnungssatz in der Beweisformulierung von Herrn Zermelo und legt keinen Wert auf die Feststellung, daß sich ein Teil ihrer Resultate auch unabhängig davon herleiten ließe; sie bedient sich der „Auswahlpostulate", sogar, ohne sie zu nennen, und kommt nur einem *vielleicht* berechtigten Bedenken der ersten Gruppe durch den gelegentlichen Hinweis entgegen, daß sich eine transfinite Reihe sukzessiver Auswahlen, deren jede die früheren voraussetzt, auf Grund einer Wohlordnung vermeiden oder, was dasselbe ist, durch eine simultane Menge independenter Auswahlen ersetzen läßt.

Die Terminologie konnte sich nicht einfach an die bestehende anschließen, sondern mußte in Fällen schwankenden Sprachgebrauchs (z. B. zwischen Strecke und Intervall) eine bestimmte Entscheidung treffen und noch häufiger zu Neubildungen schreiten; zur Erleichterung ist für die in fester Bedeutung durchgehenden Ausdrücke ein Register beigefügt.

Inhaltsverzeichnis.

Grundlagen.

Summen, Produkte, Potenzen von Ordnungstypen.

Dichte Mengen.

Register.

(Die Zahlen geben den Paragraphen an, wo der Ausdruck erklärt ist.)

Grundlagen.

§ 1.

Stücke und Strecken.

Mit einer geordneten Menge M sind auch ihre Teilmengen $A, B, \ldots$ geordnet.

Zwei Teilmengen heißen *getrennt*, wenn jedes Element der einen jedem Element der andern vorangeht; wir sagen, die *eine Teilmenge gehe der andern voran*, und schreiben $A < B$. Dies gelte auch, wenn eine der Teilmengen ein einzelnes Element ist.

Zwei geordnete Mengen M, N ohne gemeinsame Elemente vereinigen sich durch die Festsetzung $M < N$ zu einer Gesamtmenge, die man mit $M + N$ bezeichnet; diese *Addition* läßt sich auf eine beliebige, auch transfinite Menge von Summanden ausdehnen (§ 8).

Wenn
$$M = A + C \quad \text{oder} \quad M = A + B + C,$$
so heißt A ein *Anfangsstück*, B ein *Mittelstück*, C ein *Endstück* von M. Ein Stück läßt sich also definieren als eine solche Teilmenge P von M von der jedes sonstige Element getrennt ($\gtrless P$) ist.

Der Inbegriff M^A aller Elemente, die einer bestimmten Teilmenge A vorangehen, ist ein Anfangsstück von M; der Inbegriff M_A der Elemente, die auf A folgen, ein Endstück; der Inbegriff M_A^B der Elemente, die zwischen zwei getrennten Teilmengen ($A < B$) liegen, ein Mittelstück.

Insbesondere heißt der Inbegriff M^a der Elemente, die einem bestimmten Element a vorangehen, eine *Anfangsstrecke* von M; der Inbegriff M_a der Elemente, die auf a folgen, eine *Endstrecke;* der Inbegriff M_a^b der Elemente, die zwischen zwei Elementen ($a<b$) liegen, eine *Mittelstrecke*. Ein Element oder Elementpaar zerlegt also M in Strecken:
$$\begin{aligned} M = M^a + a + M_a &= M^b + b + M_b \\ &= M^a + a + M_a^b + b + M_b. \end{aligned}$$

Die Strecken mitsamt ihren einschließenden Elementen
$$M^a + a, \quad a + M_a^b + b, \quad b + M_b$$
nennen wir *Intervalle* (Anfangs-, Mittel-, Endintervall).

Anfangsstrecken und Endintervalle wohlgeordneter Mengen werden von Herrn G. Cantor als Abschnitte und Reste bezeichnet.

In besonderen Fällen können die definierten Teilmengen Null sein, d. h. kein Element enthalten.

Wenn $M^a = 0$, so ist a das erste Element von M.

Wenn $M_a = 0$, so ist a das letzte Element von M.

Wenn $M_a^b = 0$, so heißen die Elemente a, b *benachbart* oder *konsekutiv*.

Erstes und letztes Element heißen zusammen *Randelemente*; alle anderen *innere* Elemente. Eine Menge mit zwei Randelementen heißt *begrenzt*, eine ohne Randelemente *unbegrenzt*. Eine Menge ohne Paare konsekutiver Elemente heißt *überall dicht* oder kürzer *dicht*.

Wenn $M^A = 0$, so heißt M mit A *koinitial*.

Wenn $M_A = 0$, so heißt M mit A *konfinal*.

Wenn $M_A^B = 0$, so heißen die Teilmengen A, B *benachbart* oder *konsekutiv*.

M ist also mit A konfinal (koinitial), wenn kein Element von M nach A folgt (vor A vorhergeht). Ist beides der Fall, so heißt M mit A *koextensiv*; ist keines von beidem der Fall, so heißt A eine *innere* Teilmenge von M.

Wir sagen, der Typus μ sei mit dem Typus α konfinal (koinitial, koextensiv), wenn eine Menge M vom Typus μ wenigstens eine Teilmenge A vom Typus α enthält, mit der sie konfinal (koinitial, koextensiv) ist.

Beispiele: Die Menge der rationalen wie auch der reellen Zahlen, in natürlicher Reihenfolge, ist mit der Menge der natürlichen Zahlen konfinal, d. h. die Typen η und λ (das unbegrenzte Linearkontinuum) sind mit ω konfinal. Beide sind auch mit ω^* koinitial und mit $\omega^* + \omega$ koextensiv; sie sind ferner mit jeder Limeszahl der zweiten Zahlklasse konfinal.

Es gilt der folgende leicht einzusehende Satz, in dem das Wort konfinal durch koinitial oder koextensiv ersetzt werden kann.

Satz I. *Wenn M mit P, P mit Q konfinal ist, so ist auch M mit Q konfinal. Wenn Q Teilmenge von P, P Teilmenge von M, und M mit Q konfinal ist, so ist auch M mit P, und P mit Q konfinal.*

Wenn A eine Teilmenge ohne letztes Element und mit dem spätern Element b ($A < b$) benachbart ist, so heißt b der *obere Limes* (das obere Grenzelement) von A. Es ist dann b das erste Element des Endstückes M_A und die Anfangsstrecke M^b mit A konfinal. Jedes Element b ohne unmittelbar vorhergehendes Element ist, falls es nicht erstes Element von M ist, oberer Limes der Anfangsstrecke M^b und aller Teilmengen, mit denen M^b konfinal ist. Entsprechend ist der *untere Limes* zu definieren.

Eine Zerlegung $M = A + B$ wird bezeichnet als

Sprung,	wenn	(α) A ein letztes, B ein erstes	Element hat.
Schnitt,	wenn	(β) A ein letztes, B kein erstes	Element hat.
	oder	(γ) A kein letztes, B ein erstes	Element hat.
Lücke,	wenn	(δ) A kein letztes, B kein erstes	Element hat.

Eine dichte Menge ist frei von Sprüngen. Eine von Sprüngen und Lücken freie Menge, oder eine lückenlose dichte Menge, heißt *stetig.*

§ 2.

Wohlgeordnete Mengen.

Eine Menge heißt wohlgeordnet (ihr Typus eine Ordnungszahl), wenn sie selbst und jedes ihrer Endstücke ein erstes Element hat. Die Theorie der wohlgeordneten Mengen setzen wir als bekannt voraus.*) Wir denken uns von vornherein eine hinlänglich große Ordnungszahl Δ gewählt, die an Mächtigkeit alle Mengen, die wir in Betracht ziehen, übertrifft, und verstehen unter W die Menge aller Ordnungszahlen $< \Delta$; nur von den Elementen und Teilmengen von W ist im folgenden die Rede. Indem wir die Zahl 0 mitrechnen, erreichen wir, daß jede Zahl α zugleich der Typus ihrer Anfangsstrecke W^α wird. Wenn W^α kein letztes Element hat, so heißt α eine *Limeszahl.* Ist A eine Menge von Ordnungszahlen ohne letztes Element und W nicht mit A konfinal, so ist die erste auf A folgende Zahl, also das erste Element von W_A, der (obere) Limes von A und wird mit $\lim A$ bezeichnet. Die Mächtigkeit einer transfiniten wohlgeordneten Menge heißt ein Alef und wird mit $\aleph_a$ bezeichnet; der *Index* α ist eine Ordnungszahl und zwar der Typus der Menge aller vorangehenden Alefs. Die niedrigste Ordnungszahl der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ heißt ω_α und wird eine *Anfangszahl* genannt. Für die niedrigsten beiden Anfangszahlen schreibt man auch $\omega_0 = \omega$, $\omega_1 = \Omega$; es sind die kleinsten Zahlen der zweiten und dritten Zahlenklasse (G. Cantor), ebenso ω_n mit endlichem Index die kleinste Zahl der $(n+2)^{\text{ten}}$ Zahlenklasse.

Jede Menge enthält wohlgeordnete Teilmengen oder, wie wir sagen wollen, enthält Ordnungszahlen. Ist α die erste in M nicht enthaltene Ordnungszahl, so ist jede Zahl $< \alpha$ und keine Zahl $\geqq \alpha$ in M enthalten.

*) G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. 46 (1895) und 49 (1897).

A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Jahresber. d. D. M.-V. 8 (1900).

G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Abh. d. Friesschen Schule, neue Folge 4 (1906).

Z. B. sind ω, $\omega+1$, Ω die ersten in ω^*, ω, η nicht enthaltenen Ordnungszahlen. Entsprechendes gilt von den *innerhalb* M (d. h. in Mittelstrecken von M) enthaltenen Ordnungszahlen.

Satz II. *Jede Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ist mit einer Ordnungszahl $\leq \omega_\alpha$ konfinal.*

Beweis. M sei von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$; ihre Elemente lassen sich also in Gestalt einer wohlgeordneten Menge

$$m_0 m_1 m_2 \cdots m_\omega \cdots m_\xi \cdots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

vom Typus ω_α schreiben. Betrachten wir die Menge P derjenigen Elemente m_ξ, die in M auf alle Elemente niedrigerer Nummer folgen ($m_\xi > m_\eta$ für $\xi > \eta$), hierzu auch das Element m_0 gerechnet. Die Menge P ist der Reihe ihrer Elementnummern ähnlich, also wohlgeordnet und vom Typus $\leq \omega_\alpha$. Es ist aber M mit P konfinal. Denn ist Q die komplementäre Menge, also die Menge aller Elemente m_ξ, die mindestens einem Element mit niedrigerer Nummer vorangehen, so folgt auf ein Element $q = m_\xi$ eines mit kleinerer Nummer m_η, auf dieses, wenn es noch zu Q gehört, eines mit kleinerer Nummer m_ζ usw., und da jede fallende Reihe $\xi > \eta > \zeta > \cdots$ von Ordnungszahlen abbricht, so gelangen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten sicherlich zu einem Element $p > q$; es gibt also kein Element $q > P$.

Die Menge P kann auch durch Induktion definiert werden; sie enthält $p_0 = m_0$, sodann ist $p_1 = m_{\xi_1}$ das Element mit kleinster Nummer ξ_1, das in M auf p_0 folgt, allgemein $p_\varrho = m_{\xi_\varrho}$ das Element mit kleinster Nummer ξ_ϱ, das in M auf die Gesamtheit P^{p_ϱ} der bereits konstruierten Elemente von P folgt.

Aus II folgt, daß eine Ordnungszahl, die keine Anfangszahl ist, mit kleineren Zahlen konfinal ist. Auch unter den Anfangszahlen gibt es solche, die mit kleineren Zahlen konfinal sind, und die wir *singuläre* Anfangszahlen nennen, während jede Anfangszahl, die mit keiner früheren Ordnungszahl konfinal ist, *regulär* heißen soll. Da nämlich der Limes einer Menge von Anfangszahlen wieder eine Anfangszahl ist, so ist, falls α eine Limeszahl, ω_α der Limes der Menge aller kleineren Anfangszahlen und W^{ω_α} mit dieser Menge konfinal, also ω_α mit α konfinal: jede Anfangszahl mit Limesindex ist mit diesem Index konfinal.

Z. B. ist $\omega_\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots$ mit $\omega\ (< \omega_\omega)$ konfinal; jede Anfangszahl ω_α, deren Index eine Limeszahl der zweiten Zahlenklasse ist, ist mit ω konfinal; ω_{ω_1} ist mit ω_1 konfinal; die Anfangszahl $\omega_{\omega_\omega} = \omega_{\omega_0} + \omega_{\omega_1} + \omega_{\omega_2} + \cdots$ ist mit ω_ω und daher wieder mit ω konfinal usw.

Ein Alef $\aleph_\alpha$ heiße regulär oder singulär, je nachdem die Anfangszahl ω_α regulär oder singulär ist. Mengen vom Typus einer regulären Anfangszahl oder vom inversen Typus werden wir *Reihen* nennen.

§ 3.

Reguläre Anfangszahlen.

Satz III. *Jede Anfangszahl, deren Index keine Limeszahl ist, ist regulär.*

Daß $\omega_0 = \omega$ regulär, d. h. mit keiner kleineren (in diesem Falle endlichen) Zahl konfinal ist, ist evident; der Satz braucht also nur noch für Anfangszahlen der Form $\omega_{\alpha+1}$ bewiesen zu werden. Der ganz einfache Beweis, der übergangen werden kann, stützt sich auf die Alefgleichung $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$ und auf den Umstand, daß jede Zahl $< \omega_{\alpha+1}$ höchstens die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat.

Die Frage, ob der Satz III umkehrbar ist oder ob es auch reguläre Anfangszahlen mit Limesindex gibt, muß hier unentschieden bleiben, doch läßt sich dazu folgendes bemerken. Eine Anfangszahl mit Limesindex ist nach § 2 singulär, wenn ihr Index kleiner ist als sie selbst; demnach kann eine reguläre Anfangszahl mit Limesindex nur unter denjenigen Anfangszahlen enthalten sein, die ihren eigenen Indizes gleich sind ($\omega_\zeta = \zeta$) und die wir einstweilen (mit Herrn Hessenberg) ζ-Zahlen nennen wollen. Wenn α eine beliebige Ordnungszahl, aber keine ζ-Zahl ist, so ist die erste auf α folgende ζ-Zahl der Limes der Reihe

$$\alpha_1 = \omega_\alpha, \quad \alpha_2 = \omega_{\alpha_1}, \quad \alpha_3 = \omega_{\alpha_2}, \cdots;$$

ferner ist der Limes einer Menge von ζ-Zahlen wieder eine ζ-Zahl. Schreiben wir demnach die ζ-Zahlen wie die Anfangszahlen in der Form

$$\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_\omega \cdots \zeta_\alpha \cdots,$$

so daß der Index α den Typus der Menge aller ζ-Zahlen $< \zeta_\alpha$ darstellt, so ist jede ζ-Zahl, deren Index keine Limeszahl ist, Limes einer ω-Reihe, also mit ω konfinal, und jede ζ-Zahl mit Limesindex ist mit diesem Index konfinal. Also kann eine reguläre Anfangszahl mit Limesindex wiederum nur unter denjenigen ζ-Zahlen enthalten sein, die ihren eigenen Indizes gleich sind ($\zeta_\eta = \eta$), und die wir als η-Zahlen

$$\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\omega \cdots \eta_\alpha \cdots$$

bezeichnen. Von diesen gilt aber das gleiche, und wiederum hätten wir uns auf die η-Zahlen, die ihren Indizes gleich sind, zu beschränken. Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt zu folgender Begriffsbildung: sei M_1 die Menge der ζ-Zahlen in W, M_2 die der η-Zahlen, M_3 die aller ihren Indizes gleichen η-Zahlen usw.; M_ω die Menge der gleichzeitig in $M_1 M_2 M_3 \cdots$ vorkommenden Zahlen; dann wieder $M_{\omega+1}$ die Menge der Zahlen in M_ω, die der Reihe nach geordnet ihren Indizes gleich sind. Allgemein sei $M_{\alpha+1}$ die Menge der Zahlen in M_α, die ihren Indizes

gleich sind, und M_α mit Limesindex der gemeinsame Bestandteil aller früheren Mengen. Die Zahl $\xi_{\alpha\beta}$, die in der Menge M_α den Index β trägt, ist dann entweder mit α oder β oder ω konfinal; und eine reguläre Anfangszahl mit Limesindex $\omega_\xi = \xi$ müsste in allen Mengen $M_\alpha (\alpha < \xi)$ vorkommen und in ihnen den Index ξ tragen, also erst in M_ξ den Index 0 erhalten. Die Existenz einer solchen Zahl ξ erscheint hiernach mindestens problematisch, muß aber in allem Folgenden als Möglichkeit in Betracht gezogen werden.

Sei jetzt M eine Menge ohne letztes Element (eine Menge mit letztem Element ist mit 1 konfinal). Die kleinste Ordnungszahl, mit der M konfinal ist, darf ihrerseits nicht mit noch kleineren Zahlen konfinal sein, da sonst (nach Satz I) M auch mit diesen konfinal wäre; sie ist also eine reguläre Anfangszahl. Andererseits kann M nicht gleichzeitig mit zwei regulären Anfangszahlen oder, allgemeiner, nicht gleichzeitig mit einer regulären Anfangszahl und einer kleineren Zahl konfinal sein. Wenn nämlich M zugleich mit A und B konfinal ist, so ist auch (Satz I) die Vereinigungsmenge $C = \mathfrak{M}(A, B)$ mit A und B konfinal. Sind A und B wohlgeordnet, so ist es auch C; ist A vom Typus ω_α, B von kleinerem Typus und also von einer Mächtigkeit $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, so ist C nicht nur von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, sondern genau vom Typus ω_α (nicht $> \omega_\alpha$), da jede Anfangsstrecke C^c von einer Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ ist. Dann aber kann C nicht mit B konfinal sein, wenn ω_α eine reguläre Anfangszahl ist.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz IV. *Jede Menge ohne letztes Element ist mit einer und nur einer regulären Anfangszahl konfinal.*

Mit derselben regulären Anfangszahl, mit der M konfinal ist, ist auch jede Teilmenge konfinal, mit der M konfinal ist.

Jede Menge ohne erstes Element ist mit dem Inversen einer und nur einer regulären Anfangszahl koinitial.

Ist $M = A + B$ und A ohne letztes Element, also mit einer regulären Anfangszahl ω_α konfinal, so hat entweder B ein erstes Element b $(A = M^b)$, das als oberer Limes einer ω_α-Reihe ein ω_α-*Limes* oder ω_α-*Element* heißen möge, oder B hat kein erstes Element, in welchem Falle wir von einer ω_α-*Lücke* sprechen. Ebenso sind die Ausdrücke

$$\omega_\beta^*\text{-Limes oder } \omega_\beta^*\text{-Element}, \quad \omega_\beta^*\text{-Lücke},$$
$$\omega_\alpha\omega_\beta^*\text{-Limes oder } \omega_\alpha\omega_\beta^*\text{-Element}, \quad \omega_\alpha\omega_\beta^*\text{-Lücke}$$

zu erklären. Diese zu einem Grenzelement resp. einer Lücke links und rechts gehörigen regulären Anfangszahlen sind also eindeutig bestimmt; auf sie läßt sich eine Klassifikation der geordneten Mengen gründen, die wir für die dichten Mengen durchführen werden (§ 18).

§ 4.

Intervalle.

Mit der geordneten Menge M ist zugleich die (nicht geordnete) Menge ihrer *Elementpaare* gegeben. Jedem Elementpaar (a, b), wo $a < b$, entspricht umkehrbar eindeutig seine Mittelstrecke M_a^b und das zugehörige Intervall (genauer: Mittelintervall)

$$[a, b] = a + M_a^b + b.$$

Wenn $a<c<d<b$, also c, d der Mittelstrecke M_a^b angehören, so sagen wir, daß das Elementpaar (a, b) das Elementpaar (c, d) *einschließt*, oder daß die Mittelstrecke M_a^b die Mittelstrecke M_c^d, oder das Intervall $[a, b]$ das Intervall $[c, d]$ einschließt. Einer Menge von Intervallen, die paarweise einander einschließen (schärfer ausgedrückt: wo von je zwei Intervallen eines das einschließende, das andere das eingeschlossene ist), schreiben wir den Ordnungstypus ihrer linken Randelemente zu.

Dagegen wollen wir sagen, die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ *schließen einander aus* oder sind *exklusiv*, wenn die Mittelstrecken M_a^b, M_c^d getrennt sind (§ 1), also etwa

$$M_a^b < M_c^d, \qquad a < b \leq c < d.$$

Exklusive Intervalle sind also entweder getrennt oder haben ein einziges Element gemeinsam. Auch einer Menge paarweise exklusiver Intervalle schreiben wir den Ordnungstypus ihrer linken Randelemente zu (§ 25).

Was der Satz II, § 2 für die Elemente aussagt, das sagt der folgende Satz für die Elementpaare oder Intervalle aus:

Satz V. *Jede Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ enthält eine Menge, vom Typus $\leq \omega_\alpha$, sich paarweise einschließender Intervalle, die kein weiteres Intervall einschließen.*

Wir können dies, indem wir die Menge der linken und der rechten Randpunkte der Intervalle trennen, auch so ausdrücken:

Jede Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ enthält zwei getrennte Teilmengen von den Typen β, β^* $(\beta \leq \omega_\alpha)$, die entweder benachbart sind oder ein einziges Element einschließen.

Zum Beweise betrachten wir die Menge der Intervalle n von M; diese Menge $N = \{n\}$ ist von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$ und läßt sich also in Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω_α

$$n_0\, n_1\, n_2 \cdots n_\omega \cdots n_\xi \cdots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

setzen. Hieraus bilden wir, und zwar zunächst bequemer durch Induktion,

eine Menge P von Intervallen, die sich paarweise einschließen: es sei $p_0 = n_0$, dann $p_1 = n_{\xi_1}$ das Intervall mit niedrigster Nummer, das von p_0 eingeschlossen wird, allgemein $p_\varrho = n_{\xi_\varrho}$ das Element mit niedrigster Nummer, das von der Gesamtheit P^{p_ϱ} aller bereits gefundenen Intervalle eingeschlossen wird. Von der Gesamtheit $P = \{p_\varrho\}$ aller dieser Intervalle wird kein weiteres Intervall eingeschlossen, da ja sonst die Konstruktion von P noch nicht beendigt wäre. Wird p_σ von p_ϱ eingeschlossen, so ist $\xi_\varrho < \xi_\sigma$, weil p_ϱ, p_σ beide von P^{p_ϱ} eingeschlossen werden und p_ϱ von allen diesen Intervallen die kleinste Nummer ξ_ϱ hat. Also ist die Intervallmenge P im obigen Sinne wohlgeordnet und vom Typus $\leqq \omega_\alpha$; und da sie kein weiteres Intervall einschließt, so schließt sie entweder ein einziges Element m oder gar keines ein.

Will man die sukzessive Erzeugung von P durch eine simultane Definition ersetzen, so kann man hier und in ähnlichen Fällen nach em Modell des Beweises verfahren, den Herr Zermelo dem Cantorschen Wohlordnungssatze gegeben hat.*) Es sei $R = \{n_\varrho\}$ eine Teilmenge von Intervallen, in der n_0 vorkommt, in der ferner jedes n_ϱ von allen zu R gehörigen Intervallen mit kleinerer Nummer (deren Inbegriff R^{n_ϱ} heiße) eingeschlossen wird und unter sämtlichen, zu N gehörigen, von R^{n_ϱ} eingeschlossenen Intervallen die kleinste Nummer hat. Von allen so charakterisierten Mengen R ist P die Vereinigungsmenge. Der Beweis, daß P mit der oben durch Induktion konstruierten Menge identisch ist, oder der direkte Beweis, daß die jetzt definierte Menge P vom Typus $\leqq \omega_\alpha$ ist und kein weiteres Intervall einschließt, bietet keine Schwierigkeit.

Für eine nicht dichte Menge gibt es bereits einzelne Intervalle (die Paare konsekutiver Elemente), die kein weiteres Intervall einschließen; der Typus der fraglichen Intervallmenge kann dann also $= 1$ sein. Für eine dichte Menge ist er transfinit und mit einer regulären Anfangszahl konfinal (die natürlich nicht für jede solche Intervallmenge dieselbe zu sein braucht). Damit folgt:

Satz VI. *In jeder dichten Menge gibt es symmetrische Limites oder Lücken, d. h. $\omega_\alpha \omega_\alpha^*$-Limites oder $\omega_\alpha \omega_\alpha^*$-Lücken, wo ω_α eine reguläre Anfangszahl ist.*

---

*) E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann. 59 (1904). Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Math. Ann. 65 (1908).

§ 5.

Relativ dichte Teilmengen.

Die Teilmenge A von M heißt *in M dicht* (relativ zu M dicht), wenn jede Mittelstrecke von M mindestens ein Element von A enthält.*)

In diesem Fall sind M und A selbst dicht, im absoluten Sinne des Wortes (§ 1). Wenn A ein erstes (letztes) Element hat, so ist dies auch das erste (letzte) Element von M, während umgekehrt ein etwaiges Randelement von M nicht zu A zu gehören braucht. Wenn also M kein erstes (letztes) Element hat, so hat auch A keines, und es ist M mit A koinitial (konfinal). Wie leicht zu sehen, gilt der zu Satz I (§ 1) analoge

Satz VII. *Wenn Q in P, P in M dicht ist, so ist auch Q in M dicht. Wenn Q Teilmenge von P, P Teilmenge von M, und Q in M dicht ist, so ist auch Q in P und P in M dicht.*

Ferner: wenn M_1 in M dicht, A ein Stück von M, und A_1 die Menge der Elemente ist, die gleichzeitig zu A und M_1 gehören, so ist A_1 in A dicht. Denn jede Mittelstrecke von A enthält Elemente aus M_1, die aber, weil A ein Stück ist, zugleich zu A, also zu A_1 gehören. Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Elementen und Lücken von M und M_1, wobei wir beide Mengen ohne Randelemente annehmen. Betrachten wir (α) ein Element m_1 von M_1, (β) ein Element m von M, das nicht zu M_1 gehört, (γ) eine Lücke von M, so erhalten wir folgende entsprechende Zerlegungen:

$$(\alpha) \quad M = A + m_1 + B, \quad M_1 = A_1 + m_1 + B_1;$$
$$(\beta) \quad M = A + m + B, \quad M_1 = A_1 + B_1 \quad ;$$
$$(\gamma) \quad M = A + B \quad , \quad M_1 = A_1 + B_1 \quad .$$

In allen drei Fällen ist A_1 in A, B_1 in B dicht, und da A kein letztes, B kein erstes Element hat, so ist A mit A_1 konfinal, B mit B_1 koinitial. Ist also A mit ω_α konfinal, B mit ω_β koinitial (ω_α, ω_β reguläre Anfangszahlen), so gilt dasselbe von A_1, B_1, und wir haben im Falle

(α) ein Element, das in beiden Mengen $\omega_\alpha \omega_\beta^*$-Element ist,

(β) ein $\omega_\alpha \omega^*$-Element von M, dem eine $\omega_\alpha \omega_\beta^*$-Lücke von M_1 entspricht,

(γ) eine Lücke, die in beiden Mengen $\omega_\alpha \omega_\beta^*$-Lücke ist.

---

*) Wenn jede Endstrecke (Anfangsstrecke) von M mindestens ein Element von A enthält, so sind M und A Mengen ohne letztes (erstes) Element und M mit A konfinal (koinitial).

Wenn M_1 stetig ist, so sind die Fälle (β), (γ) ausgeschlossen, d. h. M_1 mit M identisch; eine stetige Menge ist also in keiner andern Menge als sich selbst dicht.

§ 6.

Ergänzung und Ausfüllung.

Die Anfangsstücke A oder die Zerlegungen $M = A + B$ einer geordneten Menge lassen sich selbst einfach ordnen, indem man dasjenige von zwei Anfangsstücken als das vorangehende betrachtet, das im andern enthalten ist. Die so geordnete Menge *aller* Anfangsstücke enthält stets Paare konsekutiver Elemente, denn auf eine Anfangsstrecke M^a folgt unmittelbar das Anfangsintervall $M^a + a$.

Es sei M eine unbegrenzte dichte Menge; wir betrachten dann nur die Anfangsstücke ohne letztes Element und die entsprechenden Zerlegungen $M = A + B$ $(A \neq 0,\ B \neq 0)$. Eine solche Zerlegung ist ein Schnitt oder eine Lücke, je nachdem B ein erstes Element hat oder keines; die Schnitte entsprechen umkehrbar eindeutig den Elementen von M. Ordnet man nun in der oben angegebenen Weise, so bilden die Schnitte untereinander eine zu M ähnliche Menge $\mathfrak{M}$, die Lücken untereinander eine neue Menge $\overline{\mathfrak{M}}$, alle Zerlegungen zusammen eine dritte Menge

$$[\mathfrak{M}] = (\mathfrak{M}, \overline{\mathfrak{M}}),$$

die Vereinigungsmenge der beiden ersten. Wir nennen $\overline{\mathfrak{M}}$ die *Ergänzung*, $[\mathfrak{M}]$ die *Ausfüllung* von $\mathfrak{M}$.

Da die individuelle Beschaffenheit und Bezeichnung der Elemente geordneter Mengen für uns durchweg gleichgültig ist, so können wir auch so sagen: in jede Lücke $M = A + B$ wird ein neues Element $\overline{m}$ hineingesetzt und zu den Elementen von M nach der Vorschrift $A < \overline{m} < B$ angeordnet. Die neuen Elemente, die hierdurch auch untereinander geordnet werden, bilden eine Menge $\overline{M} = \{\overline{m}\}$, alte und neue Elemente zusammen eine Menge $[M] = (M, \overline{M})$; $\overline{M}$ heißt die Ergänzung, $[M]$ die Ausfüllung von M.

Beispiel: Ist M die Menge der rationalen Zahlen, so ist $\overline{M}$ die der irrationalen, $[M]$ die der reellen Zahlen; also ist $\overline{\eta} = \iota$ (Typus der irrationalen Zahlen) und $[\eta] = \lambda$ (unbegrenztes Linearkontinuum).

Es folgt nun durch ganz einfache Überlegungen, daß $\mathfrak{M}$ in $[\mathfrak{M}]$ dicht ist und daß jede Teilmenge ohne letztes Element in $[\mathfrak{M}]$ einen oberen Limes hat, wofern nicht $[\mathfrak{M}]$ mit ihr konfinal ist; denn ist $\mathfrak{A} = \{A\}$ eine solche Teilmenge, so ist die Vereinigungsmenge aller in den A vorkommenden Elemente von M, wofern sie nicht M selbst ist, wieder ein Anfangsstück ohne letztes Element, also ein Element von $[\mathfrak{M}]$ und zwar

das auf $\mathfrak{A}$ unmittelbar folgende. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von $[\mathfrak{M}]$; überdies ist $[\mathfrak{M}]$ unbegrenzt, weil die uneigentlichen Zerlegungen $0 + M$, $M + 0$ ausgeschlossen bleiben sollten. Also:

Satz VIII. *Jede unbegrenzte dichte Menge ist in ihrer Ausfüllung dicht, und diese ist eine unbegrenzte stetige Menge.*

Wenn M selbst stetig ist, so ist sie mit $[M]$ identisch und $\overline{M} = 0$. Ist M nicht stetig, so kann $\overline{M}$ z. B. aus einem einzigen Element bestehen, braucht also nicht dicht, geschweige denn in $[M]$ dicht zu sein. Soll dieses der Fall sein, so muß jede Mittelstrecke von M eine Lücke einschließen, d. h. unstetig sein; wir nennen dann M *überall unstetig.* Diese Bedingung ist auch hinreichend; wenn M überall unstetig ist, so ist $\overline{M}$ in $[M]$ dicht. Nach § 5 gehören dann zu einem Element von $[M]$, je nachdem es Element von M oder $\overline{M}$ ist, folgende Zerlegungen:

$$(m)\quad [M] = [A] + m + [B], \quad M = A + m + B, \quad \overline{M} = \overline{A} + \overline{B},$$

$$(\overline{m})\quad [M] = [A] + \overline{m} + [B], \quad M = A + B, \quad \overline{M} = \overline{A} + \overline{m} + \overline{B}$$

(worin A die gemeinsamen Elemente von $[A]$ und M, ebenso $\overline{A}$ die von $[A]$ und $\overline{M}$ umfaßt); hierbei ist $[A]$ mit A und $\overline{A}$ konfinal, $[B]$ mit B und $\overline{B}$ koinitial. Also entsprechen, umkehrbar eindeutig, die Lücken von M den Elementen von $\overline{M}$ und die Lücken von $\overline{M}$ den Elementen von M, d. h. es ist wiederum M die Ergänzung von $\overline{M}$. Hieraus folgt unmittelbar

Satz IX. *Ist M unbegrenzt, dicht und überall unstetig, so gilt dasselbe von seiner Ergänzung $\overline{M}$; beide Mengen sind in ihrer gemeinsamen Ausfüllung $[M]$ dicht und jede ist die Ergänzung der andern.*

Achten wir wieder auf die regulären Anfangszahlen, die zu $[A]$, $[B]$ gehören, so ergibt sich im allgemeinen Falle: jedes $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Element der dichten unbegrenzten Menge M ist auch in $[M]$ ein $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Element, jeder $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Lücke von M entspricht ein $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Element von $[M]$; und im besonderen Falle, wo M überall unstetig ist: jeder $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Lücke in M entspricht ein $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Element in $\overline{M}$ und $[M]$, jeder $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Lücke in $\overline{M}$ ein $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-Element in M und $[M]$.

Ist M unbegrenzt und stetig, P in M dicht, so ist $[P] = M$. Denn jedem Element und jeder Lücke von P entspricht ein Element von M, da M keine Lücken hat.

Ist M unbegrenzt, P in M dicht, so ist auch (nach den Sätzen VII, VIII) P in $[M]$ dicht, also nach der eben gemachten Bemerkung $[P] = [M]$; beide Mengen haben dieselbe Ausfüllung.

§ 7.

Spaltung in relativ dichte Teilmengen.

Zum Abschluß dieser grundlegenden Betrachtungen beweisen wir noch den folgenden

Satz X. *Jede dichte Menge M kann in zwei Teilmengen gespalten werden, deren jede in M dicht ist.*

Wir denken uns außer der Anordnung der Elemente zu M eine beliebige Wohlordnung

$$m_0\, m_1\, m_2 \cdots m_\xi \cdots$$

gegeben und bezeichnen mit

$$M_\xi = \{m_\eta\}, \quad \eta < \xi,$$

die Menge der Elemente mit kleinerem Index als ξ. Diese Menge wird der Ordnung in M nach, durch m_ξ in zwei Summanden $M_\xi = P_\xi + Q_\xi$ getrennt ($P_\xi < m_\xi < Q_\xi$), deren einer auch Null sein kann (für $\xi = 0$ ist $M_0 = P_0 = Q_0 = 0$); ein etwaiges letztes Element von P_ξ bezeichnen wir mit p_ξ, ein etwaiges erstes von Q_ξ mit q_ξ. Hiernach definieren wir durch Induktion folgende Aufteilung der Menge M in zwei Teilmengen A, B: wenn m_ξ zwei Nachbarelemente p_ξ, q_ξ in M_ξ hat und diese beide der Menge A angehören, so gehöre m_ξ zur Menge B; in jedem andern Falle gehöre m_ξ zur Menge A. Die Mengen A, B sind also durch die zugrunde gelegte Wohlordnung vollkommen bestimmt; wir behaupten, daß beide in M dicht sind, daß also jede Mittelstrecke N von M Elemente beider Teilmengen enthält. Auf Grund der vorausgesetzten Dichtigkeit von M enthält N sicher (unendlich viele) Elemente, und es seien m_ξ, m_η die beiden Elemente mit niedrigstem Index, die in N liegen. Wenn von diesen beiden das eine zu A, das andere zu B gehört, so ist die Behauptung richtig. Gehören sie aber beide derselben Menge an, so sei wieder m_ζ das Element mit niedrigstem Index, das in die von m_ξ, m_η eingeschlossene Mittelstrecke fällt; dann ist $\zeta > \xi, \eta$ und bei der Verfügung über m_ζ waren m_ξ, m_η als Nachbarelemente p_ζ, q_ζ zu berücksichtigen, so daß m_ζ der Menge B oder A angehört, je nachdem m_ξ, m_η der Menge A oder B angehören. Auch in diesem Falle also enthält N Elemente beider Teilmengen, womit unser Satz bewiesen ist.

Beispielsweise kann die Menge der reellen (oder auch der reellen algebraischen) Zahlen in die der rationalen und irrationalen Zahlen gespalten werden, deren jede in der Gesamtmenge dicht ist.

Der Satz läßt sich sofort auf eine beliebige endliche oder abzählbare Menge von Teilmengen ausdehnen. Denn B, als dichte Menge, gestattet wieder eine Spaltung $B = (B_1, C_1)$, wo B_1 und C_1 in B, also auch in M

dicht sind (Satz VII), und dann wird $M = (A, B_1, C_1)$, wo die drei Bestandteile in M dicht sind. Verfährt man ebenso mit $C_1 = (C_2, D_2)$, so wird $M = (A, B_1, C_2, D_2)$ usw. Hält man an der zugrunde gelegten Wohlordnung auch für die Teilmengen von M fest, so sind alle Teilmengen A, B; B_1, C_1; C_2, D_2; $\cdots$ völlig bestimmt und von Null verschieden. Ist dann L der Durchschnitt der Mengen $B, C_1, D_2, \cdots$ so kann L Null sein und braucht jedenfalls in M nicht dicht zu sein; aber (Satz VII) die Menge $A_0 = (A, L)$ ist in M dicht, und man sieht, daß auch eine Spaltung

$$M = (A_0, B_1, C_2, D_3, \cdots)$$

in eine abzählbare Menge von Teilmengen, deren jede in M dicht ist, möglich und durch die genannte Wohlordnung eindeutig fixiert ist.

Summen, Produkte, Potenzen von Ordnungstypen.

§ 8.

Summen.

Bekanntlich wird, wovon wir schon gelegentlich Gebrauch machten, die Addition von zwei oder endlich vielen geordneten Mengen so definiert: Sind $M_1 M_2 \cdots M_n$ geordnete Mengen ohne gemeinsame Elemente, so läßt sich ihre Vereinigungsmenge $M = (M_1, M_2, \cdots, M_n)$ durch die Festsetzungen

$$m_i < m_i' \text{ in } M, \quad \text{wenn} \quad m_i < m_i' \text{ in } M_i,$$
$$m_i < m_k \text{ in } M, \quad \text{wenn} \quad i < k$$

oder kürzer durch die im Sinne von § 1 zu verstehende Festsetzung $M_i < M_k$ $(i < k)$ einfach ordnen und wird dann mit

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n,$$

ihr Typus mit

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

bezeichnet. M_i ist ein Stück von M. Es gilt nicht das kommutative Gesetz, wohl aber das assoziative

$$M_1 + M_2 + \cdots M_n$$
$$= (M_1 + M_2 + \cdots M_h) + (M_{h+1} + \cdots + M_i) + \cdots + (M_{k+1} + \cdots + M_n).$$

Für eine beliebige, auch transfinite Menge von Summanden ergibt sich daraus folgende Erklärung der Addition. Es sei $A = \{a\}$ eine beliebige geordnete Menge, und jedem Element a entspreche eine geordnete Menge M_a, die mit keiner der übrigen gemeinsame Elemente hat. Die Vereinigungsmenge $M = \{M_a\}$ wird durch die Festsetzung $M_a < M_b$ (für $a < b$ in A) einfach geordnet; sie und ihr Typus sollen dann mit

$$M = \sum_a^A M_a, \quad \mu = \sum_a^\alpha \mu_a$$

bezeichnet werden. Die M_a heißen *Summanden*, A der *Erzeuger* der Summe M; die Operation wird als allgemeine oder transfinite Addition (auch als *Einsetzung* der Summanden in den Erzeuger) bezeichnet und geht für endlichen Erzeuger in die gewöhnliche oder endliche Addition über. Die Summanden sind Stücke der Summe.

Bei der obigen Schreibweise ist die Bezeichnung des (unter Σ stehenden) Summationselementes natürlich gleichgültig, wenn es nur alle Elemente des (über Σ stehenden) Erzeugers durchläuft; wir können bei demselben Erzeuger verschiedene Summationselemente oder bei verschiedenen Erzeugern dasselbe Summationselement verwenden, was im folgenden zu beachten ist. Die Bezeichnung ist konsequenterweise auch auf den Erzeuger selbst, d. h. auf jede geordnete Menge

$$A = \sum_a^A a, \quad \alpha = \sum_a^\alpha 1$$

anzuwenden, die hierdurch als einfache Elementensumme erscheint, mit sich selbst als Erzeuger, während eine Typensumme zunächst als doppelte Elementensumme

$$M = \sum_a^A M_a = \sum_a^A \Big(\sum_b^{M_a} b\Big) = \sum_a^A \sum_b^{M_a} b$$

zu lesen ist, die sich dann auf die einfache $\sum_b^M b$ reduziert. Bilden wir nunmehr mit dieser Typensumme M als neuem Erzeuger die Typensumme $N = \sum_b^M N_b$, so lehrt eine einfache Überlegung, daß wir hier die Summanden gruppenweise zu $P_a = \sum_b^{M_a} N_b$ zusammenfassen können, und damit $N = \sum_a^A P_a$ erhalten; diese Formeln geben das *assoziative* Gesetz der verallgemeinerten Addition, das offenbar darauf hinauskommt, die dreifache Elementensumme

$$N = \sum_a^A \sum_b^{M_a} \sum_c^{N_b} c$$

einmal als $\sum_a \sum_{bc}$, das andere Mal als $\sum_{ab} \sum_c$ zu lesen.

Wenn M mit der *wohlgeordneten* Menge A konfinal ist, so ist M eine Typensumme mit dem Erzeuger A, nämlich $M = \sum_{a}^{A} B_a$, wo B_a die Menge aller Elemente von M ist, die zwischen a und allen früheren Elementen von A liegen, dazu a selbst gerechnet (in der Bezeichnung von § 1 ist $B_a = M^a_{A^a} + a$). *Im allgemeinen* braucht, wenn M mit A konfinal oder A eine sonstige Teilmenge von M ist, keineswegs M eine Summe mit dem Erzeuger A zu sein. Ist umgekehrt M eine Summe mit dem Erzeuger A, und A ohne letztes Element, so ist μ mit α konfinal.

§ 9.

Endliche Produkte und Potenzen.

Für n Mengen $M_1 M_2 \cdots M_n$ bilden wir die *Elementverbindungen*

$$X = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n),$$

wo jedes x_i alle Elemente von M_i durchläuft. Die Menge $\{X\}$ heißt die *Verbindungsmenge* der Mengen M_i und läßt sich durch folgende Festsetzung einfach ordnen:

$$(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n) < (y_1 y_2 y_3 \cdots y_n), \quad \text{wenn} \quad x_1 < y_1 \text{ in } M_1,$$
$$(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n) < (x_1 y_2 y_3 \cdots y_n), \quad \text{wenn} \quad x_2 < y_2 \text{ in } M_2,$$
$$(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n) < (x_1 x_2 y_3 \cdots y_n), \quad \text{wenn} \quad x_3 < y_3 \text{ in } M_3,$$

usw., so daß für die Rangordnung von X, Y die Rangordnung des *ersten Paares verschiedener* Elemente x_i, y_i maßgebend ist. Wir nennen dies kurz die *Rangordnung nach ersten Differenzen*. Die so geordnete Verbindungsmenge bezeichnen wir mit $M_n \cdots M_3 M_2 M_1$ (nicht $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$), ihren Typus mit $\mu_n \cdots \mu_3 \mu_2 \mu_1$, womit das Produkt und im Falle gleicher Faktoren die Potenz M^n, μ^n erklärt ist, aber nur für eine endliche Faktorenzahl. Diese Multiplikation ist assoziativ, nicht kommutativ; gegenüber der Addition besteht einseitige Distributivität, nämlich nur in bezug auf den *letzten Faktor*, d. h. es ist

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta, \quad \gamma \sum_{a}^{\alpha} \beta_a = \sum_{a}^{\alpha} \gamma\beta_a,$$

insbesondere, für $\beta_a = 1$, $\gamma\alpha = \sum_{a}^{\alpha} \gamma$, so daß das Produkt $\gamma\alpha$ eine Typensumme mit dem Erzeuger α und lauter gleichen Summanden γ ist (Einsetzung von γ in α).

§ 10.

Typenringe.

Die allgemeine Addition ist als fundamentale Operation zur Erzeugung von Typen aus anderen Typen anzusehen; ihre große, wenngleich nicht unbeschränkte Tragweite wird aus den folgenden Begriffsbildungen erhellen.

Ein System von Typen heißt ein Typenring, falls sowohl die Summe zweier Typen des Systems, als auch die mit einem Typus des Systems als Erzeuger gebildete Summe unendlich vieler Typen des Systems wieder dem System angehört.

Es soll also zugleich mit α, β auch $\alpha + \beta$, und zugleich mit α, β_a auch $\sum\limits_a^\alpha \beta_a$ dem System angehören; insbesondere gehört auch das Produkt zweier Typen des Systems wieder dem System an. Falls der Typus 2 dem System angehört, ist die Forderung der gewöhnlichen Addition überflüssig.

Die Menge von Typen, die zwei oder beliebig (auch unendlich) vielen Typenringen gemeinsam ist, ist wiederum ein Typenring — falls sie nicht verschwindet.

Sei $\mathsf{A} = \{\alpha\}$ eine beliebige Typenmenge. Der Typus β heißt von A *unabhängig*, wenn es einen Typenring gibt, der A, aber nicht β enthält; im entgegengesetzten Falle heißt β von A abhängig. Die Menge $[\mathsf{A}]$ aller von A abhängigen Typen*), wozu die α selbst gehören, ist selbst ein Ring und in jedem Ringe enthalten, der A enthält, also der kleinste Ring, der A enthält. Wenn in A kein Typus von der Menge der übrigen abhängig ist, so heißt A eine *Basis* des Ringes $[\mathsf{A}]$. Der Ring $[\mathsf{A}]$ besteht offenbar aus allen Typen, die aus den Typen α durch eine endliche, wenn auch unbeschränkt wachsende, Zahl von gewöhnlichen und transfiniten Additionen hervorgehen, d. h. jeder zu $[\mathsf{A}]$ gehörige Typus ξ ist einer Darstellung folgender Gestalt fähig (in der die jeweiligen Erzeuger durch den Index 0 hervorgehoben sind):

$$\xi = \sum_a^{\xi_0} \xi_a, \quad \xi_a = \sum_b^{\xi_{a,0}} \xi_{a,b}, \quad \xi_{a,b} = \sum_c^{\xi_{a,b,0}} \xi_{a,b,c}, \cdots$$

---

*) Diese Menge ist Teilmenge des Ringes (s. unten) aller Typen $\leqq \aleph_\nu$, wenn $\aleph_\nu$ die Mächtigkeiten aller Typen α übertrifft, also nicht etwa widerspruchsvoll oder „inkonsistent“.

die in lauter zu A gehörigen Typen $\xi_{a,b,c,\dots,k}$ endigt; nur die Erzeuger brauchen, wenn sie endlich sind, nicht zu A zu gehören. Z. B. gehört der Typus ω^ω dem Ringe $[\omega]$ an*), denn es ist

$$\omega^\omega = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots = \sum_n^\omega \omega^n$$

und ω^n entsteht durch $(n-1)$-malige Addition mit dem Erzeuger ω.

Hieraus folgt unmittelbar der

Satz XI. *Wenn eine Eigenschaft bei gewöhnlicher und transfiniter Addition erhalten bleibt* (d. h. der Summe zukommt, sobald sie den Summanden, resp. den Summanden und dem Erzeuger zukommt) *und allen Typen der Menge* A *zukommt, so kommt sie auch allen Typen des Ringes* $[\mathsf{A}]$ *zu.*

Beispiele für Typenringe sind sehr zahlreich, da fast jede sich natürlich darbietende Typenmenge ein Ring ist. Wir nennen folgende Fälle:

a) Jede *Typenklasse* (G. Cantor), d. h. die Menge aller Typen einer bestimmten Mächtigkeit $\aleph_\alpha$.

Die Ringeigenschaft beruht auf der Alef-Relation

$$\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

b) Die Menge aller Typen, deren Mächtigkeit kleiner ist als das *reguläre* Alef $\aleph_\alpha$.

Denn aus $\mathfrak{b} < \aleph_\alpha$, $\mathfrak{c} < \aleph_\alpha$, $\mathfrak{c}_b < \aleph_\alpha$ folgt

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} < \aleph_\alpha, \quad \sum_b^{\mathfrak{b}} \mathfrak{c}_b < \aleph_\alpha,$$

während für ein singuläres $\aleph_\alpha$ nur $\sum_b^{\mathfrak{b}} \mathfrak{c}_b \leqq \aleph_\alpha$ ist, die genannte Typenmenge also dann keinen Ring bildet. Dagegen ist für beliebiges $\aleph_\alpha$ die Menge aller Typen $\leqq \aleph_\alpha$ ein Ring, da $\aleph_{\alpha+1}$ regulär ist (§ 3, Satz III).

Da aus wohlgeordneten Mengen durch Addition wieder wohlgeordnete Mengen entstehen, so sind auch folgende Mengen Typenringe:

c) jede *Zahlenklasse*,

d) die Menge aller Ordnungszahlen, die kleiner sind als die *reguläre* Anfangszahl ω_α.

Für diesen Ring läßt sich sofort die Basis**) angeben. Schicken

*) Eine Verwechselung mit dem Zeichen [ ] der Ausfüllung (§ 6) ist wohl nicht zu befürchten.

**) Für einen Ring von Ordnungszahlen gibt es nur eine Basis, wie leicht daraus folgt, daß eine Ordnungszahl nie von größeren Ordnungszahlen abhängig sein kann.

wir voraus: ist A eine beliebige Typenmenge, so bleibt die Eigenschaft, mit einem Typus aus der Menge A konfinal zu sein, bei Addition erhalten, kommt also allen Typen des Ringes [A] zu, und ein Typus, der mit keinem Typus der Menge A konfinal ist, ist also von A unabhängig. Ist insbesondere A eine Menge regulärer Anfangszahlen (zu denen wir für den Augenblick auch die Zahl 1 rechnen wollen), so ist jede nicht zu A gehörige reguläre Anfangszahl von A unabhängig, und A bildet stets eine Basis. Ist insbesondere

$$A = 1, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_\xi, \cdots \quad (\xi < \alpha)$$

die Menge aller regulären Anfangszahlen $< \omega_\alpha$ (ω_ξ, ω_α regulär), so enthält der zu dieser Basis gehörige Ring [A] alle Ordnungszahlen $< \omega_\alpha$, wie leicht durch Induktion zu beweisen ist. Denn ist $\eta < \omega_\alpha$, so ist entweder $\eta = (\eta - 1) + 1$ oder η mit einer Zahl ω_ξ konfinal, also (§ 8) als Summe mit dem Erzeuger ω_ξ und mit Summanden $< \eta$ darstellbar; demnach gehört η zu [A], falls alle Zahlen $< \eta$ zu [A] gehören. Da die Zahlen $< \omega_\alpha$ einen Ring bilden und [A] der kleinste Ring über der Basis A ist, so sind beide Ringe identisch, folglich A die Basis des Ringes (*d*).

Z. B. umfaßt der Ring [1] alle endlichen Zahlen, $[1, \omega]$ alle Zahlen der ersten beiden*), $[1, \omega, \Omega]$ alle Zahlen der ersten drei Zahlenklassen. Der Ring $[\omega]$ enthält alle Limeszahlen, der Ring $[1, \omega + 1]$ alle endlichen und alle Nichtlimeszahlen der zweiten Zahlenklasse.

Der Addition gegenüber invariante Eigenschaften sondern aus jedem Typenring gewisse Teilmengen aus, die, wenn sie nicht verschwinden, wiederum Ringe sind. So bilden u. a. innerhalb eines Typenringes (z. B. innerhalb des Ringes aller Typen $\leqq \aleph_\alpha$) folgende Mengen einen Ring:

e) die unbegrenzten Typen,

f) die begrenzten Typen,

g) die Typen mit letztem Element (z. B. die Nichtlimeszahlen eines Ringes von Ordnungszahlen),

h) die mit einem bestimmten Typus oder mit Typen einer bestimmten Menge konfinalen Typen,

i) die dichten unbegrenzten Typen; einfachstes Beispiel der Ring der dichten unbegrenzten abzählbaren Typen, bestehend aus dem einzigen Typus η,

k) die dichten Typen ohne letztes Element, z. B. der Ring, der aus den beiden Typen η, $1 + \eta$ besteht.

---

*) Für die zweite Zahlenklasse allein existiert keine endliche Basis.

§ 11.
Aufbau beliebiger Typen.

Seien A, B zwei beliebige Typenmengen. Die durch folgenden Satz: „β und alle seine Teilmengen sind von A abhängig“, ausgedrückte Eigenschaft eines Typus bleibt bei gewöhnlicher und transfiniter Addition erhalten, kommt also allen Typen des Ringes [B] zu, falls sie allen Typen von B zukommt. Sie kommt also allen Typen des Ringes [A] zu, falls sie allen Typen von A zukommt, d. h. in diesem Falle enthält der Ring [A] auch alle Teilmengen der ihm angehörigen Typen.

Ist nun ω_α eine reguläre Anfangszahl und

$$A = 1, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_\xi, \cdots \omega_0^*, \omega_1^*, \cdots \omega_\xi^*, \cdots \qquad (\xi < \alpha)$$

die Menge aller regulären Anfangszahlen $< \omega_\alpha$ und ihrer Inversen, mitsamt der Zahl 1, so ist der genannte Fall verwirklicht und der Ring [A] enthält von jedem zu ihm gehörigen Typus auch alle Teilmengen.

Sei jetzt M eine beliebige Menge, deren Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$. Wir nennen für den Augenblick zwei Elemente a, b *kohärent*, wenn der Typus ihres Intervalls $[a, b]$ dem Ring [A] angehört. Danach sammeln wir alle links und rechts von einem Element a liegenden, mit a kohärenten Elemente und vereinigen sie mit a zu der Teilmenge

$$M(a) = M'(a) + a + M''(a).$$

Hier gilt folgendes:

Sind (für $a < b < c$) a, b und b, c kohärent, so sind auch a, c kohärent; sind umgekehrt a, c kohärent, so sind auch a, b und b, c kohärent.

Denn wenn $[a, b]$ und $[b, c]$ dem Ringe [A] angehören, so auch $M_b^c + c$ und die Summe $[a, b] + M_b^c + c = [a, c]$; und wenn $[a, c]$ ihm angehört, so auch seine Teilmengen $[a, b]$ und $[b, c]$.

Sind also zwei Elemente mit einem dritten kohärent, so sind sie untereinander kohärent; d. h. wenn a, b kohärent, so ist $M(a) = M(b)$. Sind a, b nicht kohärent und $a < b$, so ist $M(a) < M(b)$; die Teilmengen $M(a)$ sind demnach *Stücke* von M. Sie gehören aber selbst dem Ringe [A] an. Hat nämlich $M''(a)$ ein letztes Element b, so gehört $M''(a)$ als Teil von $[a, b]$ zu [A]. Hat es kein letztes Element, so ist es mit einer Zahl ω_ξ aus A konfinal, also (§ 8) eine Summe mit dem Erzeuger ω_ξ und mit Summanden, die als Teile von Intervallen $[a, b]$ zu unserm Ringe gehören, folglich gehört auch in diesem Falle $M''(a)$ zu [A]. Es gehören also $M''(a)$, $M'(a)$, $M(a)$ dem Ringe [A] an.

Hieraus geht hervor, daß M die Summe aller dieser Stücke ist,

$$M = \sum_a^A M(a),$$

worin der Erzeuger A eine solche Teilmenge von M bedeutet, daß jedes Element m mit einem und nur einem Element a kohärent ist (eine solche Menge A kann auf Grund irgend einer Wohlordnung von M sofort in bekannter Weise definiert werden). Gehört M selbst dem Ringe [A] an, so ist A vom Typus 1; wenn nicht, so ist A eine *dichte* Menge, denn für zwei konsekutive Elemente a, b würden die entsprechenden Stücke $M(a) + M(b)$ in ein einziges zusammenzuziehen sein.

Nennen wir eine Menge *zerstreut, wenn sie keine dichte Teilmenge enthält*, so kommt die Eigenschaft der Zerstreutheit allen Typen der Menge A zu; sie bleibt, wie leicht einzusehen, bei Addition erhalten und kommt also allen Typen von [A] zu. Sie kommt aber, unter den Mengen $< \aleph_\alpha$, auch nur diesen zu, da eine nicht zu [A] gehörige Menge Typensumme mit dichtem Erzeuger ist. Der Ring [A] läßt sich also definieren als die *Gesamtheit der zerstreuten Typen* der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$, und wir haben den

Satz XII. *Jede Menge ist entweder selbst zerstreut oder eine Summe zerstreuter Mengen mit dichtem Erzeuger. Die zerstreuten Mengen der Mächtigkeit* $< \aleph_\alpha$ *($\aleph_\alpha$ regulär) bilden einen Ring, dessen Basis aus allen regulären Anfangszahlen* $< \omega_\alpha$ *(inklusive der Zahl 1) und deren Inversen besteht.*

Z. B. ist jeder abzählbare Typus entweder zerstreut, d. h. dem Ringe $[1, \omega, \omega^*]$ angehörig, oder er entsteht durch Summation zerstreuter Typen über einen abzählbaren dichten Erzeuger. Da es nur vier dichte abzählbare Typen gibt (η, $1 + \eta$, $\eta + 1$, $1 + \eta + 1$), so gehören alle Typen der ersten beiden Typenklassen dem Ringe $[1, \omega, \omega^*, \eta]$ *mit endlicher Basis* an. Dieses merkwürdige Ergebnis steht aber wahrscheinlich vereinzelt da, weil von der Mächtigkeit des Kontinuums aufwärts unendlich viele unabhängige dichte Typen existieren (§ 25).

§ 12.

Verbindungs- und Belegungsmengen.

Durch die Invarianz gewisser Eigenschaften bei gewöhnlicher und transfiniter Addition wird die Tragweite dieser Operation erheblich eingeschränkt; so z. B. ist sie unvermögend, dichte Typen aus nicht dichten aufzubauen. Wir müssen also weitergehen und versuchen einen Fortschritt nach der Richtung, daß wir auch die ***Multiplikation*** und die

damit zusammenhängende *Potenzierung* auf eine beliebige, auch transfinite Menge von Faktoren ausdehnen.

Es sei $A = \Sigma a$ eine beliebige geordnete Menge (Typus α, Mächtigkeit $\mathfrak{a}$) und jedem Element a entspreche eine beliebige geordnete Menge M_a (Typus μ_a, Mächtigkeit $\mathfrak{m}_a$). Die (ungeordnete) *Verbindungsmenge* aller Mengen M_a läßt sich dann definieren als die Menge aller Elementverbindungen

$$X = \sum_a^A x_a,$$

wo jedes x_a alle Elemente von M_a durchläuft, und die Kardinalzahl der Menge $\{X\}$ ist als Produkt aller Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_a$, im Falle der Gleichheit dieser sämtlichen Mächtigkeiten als die Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{a}}$ zu erklären. Diese Definition der Potenz von Kardinalzahlen ist bekanntlich von Herrn G. Cantor, die des Produkts von Herrn A. N. Whitehead gegeben worden. Dagegen ist bisher kein Mittel bekannt, die *gesamte* Verbindungsmenge in jedem Falle durch ein einfaches Gesetz zu *ordnen*, und wir müssen uns begnügen, gewisse *Teilmengen* der Verbindungsmenge herauszugreifen, die einer einfachen, den Forderungen der Multiplikation oder Potenzierung genügenden Anordnung fähig sind.

Wir nennen die Mengen M_a oder ihre Typen μ_a die *Faktoren*, die Menge A oder ihren Typus α das *Argument* der Verbindungsmenge (die Faktoren entsprechen also den Summanden, das Argument dem Erzeuger einer Typensumme); die Elemente a des Arguments mögen als *Stellen* bezeichnet werden. Sind alle Faktoren der Menge M ähnlich, $\mu_a = \mu$, so nennen wir die Elementverbindung auch eine *Belegung* von A mit M oder von α mit μ, die Verbindungsmenge die *Belegungsmenge;* die Menge M oder ihr Typus μ werde als *Basis* bezeichnet.

In einem besonderen Fall, den wir vorweg behandeln, bietet sich unmittelbar eine Anordnung der gesamten Verbindungsmenge dar, nämlich wenn das *Argument wohlgeordnet*, α eine Ordnungszahl ist. Hier ist die Menge der Stellen, in denen zwei Verbindungen

$$X = \sum_a x_a, \qquad Y = \sum_a y_a$$

differieren, d. h. wo $x_a \neq y_a$ in M_a, als Teilmenge von A ebenfalls wohlgeordnet und hat ein erstes Element, d. h. es gibt eine Stelle a, wo $x_a \lessgtr y_a$, während für alle früheren Stellen $(b < a)$ $x_b = y_b$ ist. Es liegt nahe, dann die Beziehung $X \lessgtr Y$ festzusetzen, also den Verbindungen X, Y die Rangordnung der ersten differierenden Elemente zu geben und damit die *Rangordnung nach ersten Differenzen* (§ 9) auf diesen Fall zu

übertragen. Die so geordnete Menge $\{X\}$ hat, wie wir beweisen werden, die formalen Eigenschaften eines Produkts, worin aber, wie schon im Falle endlichen Arguments, die Reihenfolge der Faktoren die *umgekehrte* ist wie die der Stellen im Argument, also, wenn wir die Stellen mit

$$0\ 1\ 2 \cdots \xi \cdots \quad (\xi < \alpha)$$

bezeichnen, des Produktes $\cdots M_\xi \cdots M_2 M_1 M_0$ und, im Falle gleicher Faktoren, der Potenz M^{A^*} (nicht $M_0 M_1 M_2 \cdots M_\xi \cdots$ resp. M^A). Das ist eine Folge der neueren Cantorschen Produktbezeichnung*), an die wir uns selbstverständlich anzuschließen hatten, und der Rangordnung nach ersten Differenzen, die, als weniger sakrosankt, allerdings zu einer Rangordnung nach letzten Differenzen umgewandelt werden könnte, indem man das Argument invertiert; dies wäre aber durchaus unzweckmäßig, da gerade die interessanteren Typen in unserer Bezeichnung einfacher dargestellt werden. Wir werden also bei Potenzen das *Argument* A und den *Exponenten* A^* zu unterscheiden haben.

Die obige Verbindungsmenge resp. ihren Typus bezeichnen wir mit

$$\left(\left(\prod_a^A M_a\right)\right) = (\!(\cdots M_\xi \cdots M_2 M_1 M_0)\!),$$

$$\left(\left(\prod_a^\alpha \mu_a\right)\right) = (\!(\cdots \mu_\xi \cdots \mu_2 \mu_1 \mu_0)\!),$$

indem wir festsetzen, daß in $\prod\limits_a^A$ die Faktoren der Stellenfolge nach von rechts nach links zu lesen sind, also umgekehrt wie die Summanden in $\sum\limits_a^A$. Wir nennen dies das *Vollprodukt* der Faktoren M_a mit dem Argument A. Sind alle Faktoren gleich, so bezeichnen wir die Belegungsmenge und ihren Typus mit

$$M(\!(A)\!), \quad \mu(\!(\alpha)\!)$$

und nennen sie die *Vollpotenz* der Basis M mit dem Argument A.

Beispiele. Die Vollpotenz $\omega(\!(\omega)\!)$ ist der Typus der nach ersten Differenzen geordneten Menge von Zahlenfolgen

$$X = (x_0 x_1 x_2 \cdots),$$

wo jedes x_n die Menge der natürlichen, in natürlicher Rangordnung ge-

*) Herr G. Cantor hat seine ältere Bezeichnung gerade mit Rücksicht auf eine passende Schreibweise für Potenzen von Ordnungszahlen (§ 16) umgedreht.

nommenen Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ durchläuft. Denken wir uns jeder solchen Zahlenfolge X eine reelle Zahl x durch die dyadische Entwicklung

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0+x_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0+x_1+x_2} + \cdots$$

zugeordnet, so ist $0 < x \leqq 1$, ferner für $X < Y$ zugleich $x > y$, und umgekehrt entspricht jeder reellen Zahl x des Gebiets $0 < x \leqq 1$ eine einzige (endlose) dyadische Entwicklung und eine einzige Zahlenfolge. Demnach ist $\omega(\!(\omega)\!) = 1 + \lambda$, gleich dem links begrenzten Linearkontinuum.

Das Vollprodukt $\left(\!\left(\prod\limits_n^\omega \mu_n\right)\!\right) = (\!(\cdots \mu_2\mu_1\mu_0)\!)$, wo $\mu_{2n} = \omega$, $\mu_{2n+1} = \omega^*$, ist der Typus der nach ersten Differenzen geordneten Menge von Zahlenfolgen

$$X = (x_0, -x_1, x_2, -x_3, x_4, \cdots),$$

wo wiederum $x_n = 1, 2, 3, \cdots$. Ordnen wir der Zahlenfolge X den Kettenbruch

$$x = x_0 + 1 : x_1 + 1 : x_2 + 1 : x_3 + \cdots$$

zu, so ist $x > 1$ und $x < y$ für $X < Y$, und jeder irrationalen Zahl $x > 1$ entspricht eine bestimmte Zahlenfolge X. Der obige Typus, der offenbar auch als Vollpotenz $\varphi(\!(\omega)\!)$ mit $\varphi = \omega^*\omega$ interpretiert werden kann, ist also mit dem Typus ι der irrationalen Zahlen identisch.

§ 13.

Allgemeine Produkte und Potenzen.

Es sei jetzt $A = \{a\}$ ein beliebiges Argument, und jeder Stelle a eine beliebige Menge M_a zugeordnet. Wir halten die Rangordnung nach ersten Differenzen für die Verbindungen $X = \sum\limits_a^A x_a$ (x_a durchläuft M_a) fest, d. h. wenn für zwei Verbindungen X, Y die Menge der differierenden Stellen, wo $x_a \neq y_a$, ein erstes Element hat und für diese erste Stelle a die Rangbeziehung $x_a \lesseqgtr y_a$ in M_a besteht, so soll auch $X \lesseqgtr Y$ sein. Damit wird die Verbindungsmenge im allgemeinen nicht geordnet, da jene Stellenmenge eben kein erstes Element zu haben braucht. Soweit aber die Relationen $X \lesseqgtr Y$ überhaupt bestehen, sind sie asymmetrisch und transitiv, d. h.

$$\text{wenn} \quad X < Y, \quad \text{so ist} \quad Y > X,$$

$$\text{wenn} \quad X < Y,\ Y < Z, \quad \text{so ist} \quad X < Z.$$

Beide Behauptungen sind evident, die zweite mit dem Zusatz, daß, wenn a_1 die erste Differenzstelle zwischen X und Y, a_2 die zwischen Y und Z ist,

das frühere Element von beiden (d. h. a_1 für $a_1 \leqq a_2$ oder a_2 für $a_2 \leqq a_1$) die erste Differenzstelle zwischen X und Z ist.

Um also eine Teilmenge der Verbindungsmenge zu erhalten, die durch das Prinzip der ersten Differenzen geordnet wird, müssen wir dafür sorgen, daß für zwei Verbindungen X, Y die Menge der differierenden Stellen ein erstes Element haben muß. Dazu treffen wir folgende Verabredung: in jeder Menge M_a werde ein beliebiges, aber festes Element p_a gewählt und als das *Hauptelement*, alle übrigen als Nebenelemente bezeichnet. *Wir lassen dann nur solche Verbindungen X zu, wo die mit Nebenelementen belegten Stellen eine wohlgeordnete Teilmenge von A bilden.* Zwei solche Verbindungen können sich nur in denjenigen Stellen unterscheiden, die in einer oder beiden mit Nebenelementen belegt sind. Ist also B die Teilmenge von A, welche die Nebenelemente von X trägt, C dasselbe für Y, $D = \mathfrak{M}(B, C)$ die Vereinigungsmenge beider, so ist die Menge der differierenden Stellen Teilmenge von D und wie B, C, D wohlgeordnet, hat also ein erstes Element.

Die Gesamtmenge T dieser speziellen Verbindungen (Belegungen) wird demgemäß durch das Prinzip der ersten Differenzen einfach geordnet, und wir werden beweisen, daß sie Produkt-(Potenz-)Charakter hat. Es ist aber auf das schärfste hervorzuheben, daß diese Menge T nicht nur von den Faktoren und dem Argument, sondern auch von der Wahl aller jener Hauptelemente p_a abhängt, deren Inbegriff, die *Hauptverbindung* (Hauptbelegung) $P = \sum_a^A p_a$ (in der gar kein Nebenelement vorkommt), jedenfalls zu T gehört. Diese Mehrdeutigkeit des Produkts ist, soweit sie als Mangel der Methode erscheint, offenbar unvermeidlich; andererseits ist sie ein Vorzug, da sie das Gebiet derjenigen Typen, die aus einfacheren Typen in Produkt- oder Potenzform darstellbar sind, außerordentlich erweitert.

Aber der Produktbegriff umfaßt noch mehr: nicht nur die Gesamtmenge T jener speziellen Verbindungen, sondern auch gewisse Teilmengen von ihr haben ebenfalls multiplikativen Charakter. Verstehen wir nämlich unter T^π die Menge derjenigen Verbindungen $X = \sum_a^A x_a$, worin die Menge der mit Nebenelementen belegten Stellen a wohlgeordnet und $< \omega_\pi$ ist (unter T^0 also die Menge derjenigen, wo nur eine endliche Anzahl von Nebenelementen auftritt), so werden wir zeigen, daß auch T^π den Charakter eines Produkts $\prod_a^A M_a$ hat, falls ω_π eine *reguläre* Anfangszahl ist. Solche Mengen sind also

$$T^0 \, T^1 \, T^2 \ldots T^{\omega+1} \ldots,$$

Jede von ihnen ist Teilmenge jeder folgenden und von T; und die Menge T^π wird von einem gewissen Index an mit T identisch, sobald nämlich ω_π die erste nicht in dem Argument A enthaltene reguläre Anfangszahl erreicht hat. Alle diese Mengen hängen, außer von ihrem Index π, von den Faktoren M_a, dem Argument A und von der Hauptverbindung P ab, die jeder Menge T^π als Element angehört.

Wir führen nun folgende Namen und Bezeichnungen ein. Die Menge T^π heißt das *Produkt* $(1+\pi)^{\text{ter}}$ *Klasse**) *aus den Faktoren* M_a *mit dem Argument* A *und der Hauptverbindung* P; sie und ihr Typus wird mit

$$\Big(\prod_a^A M_a\Big)_P^\pi, \quad \Big(\prod_a^\alpha \mu_a\Big)_P^\pi$$

bezeichnet, wobei in dem Produkt die Faktoren von rechts nach links zu lesen sind, also M_b vor M_a steht, wenn $a < b$ in A. Die Menge T heißt das *Maximalprodukt* und werde entweder durch Anbringung des geeigneten Index π oder durch

$$\Big(\Big(\prod_a^A M_a\Big)\Big)_P, \quad \Big(\Big(\prod_a^\alpha \mu_a\Big)\Big)_P$$

bezeichnet. Im Falle eines wohlgeordneten Arguments A, wo *alle* Verbindungen die gestellte Bedingung erfüllen, T also die gesamte Verbindungsmenge umfaßt und die Hauptverbindung P einflußlos wird, geht das Maximalprodukt (neben dem aber auch hier die von P abhängigen Produkte niederer Klassen existieren) in das früher betrachtete *Vollprodukt*

$$\Big(\Big(\prod_a^A M_a\Big)\Big), \quad \Big(\Big(\prod_a^\alpha \mu_a\Big)\Big)$$

über.

Wenn alle Faktoren gleich, $M_a = M$, und das Hauptelement in allen dasselbe ist, $p_a = p$, so bezeichnen wir die Menge T^π als *Potenz* $(1+\pi)^{\text{ter}}$ *Klasse der Basis* M *mit dem Argument* A *und dem Hauptelement* p und schreiben dafür

$$M(A)_p^\pi, \quad \mu(\alpha)_p^\pi,$$

die Menge T als *Maximalpotenz*

$$M((A))_p, \quad \mu((\alpha))_p$$

und für den Fall wohlgeordneten Arguments wieder als *Vollpotenz*

$$M((A)), \quad \mu((\alpha)).$$

---

*) Für transfinites π also auch π^{ter} Klasse; für endliches π lehnt sich die Bezeichnung an die Cantorsche der Zahlklassen an.

§ 14.

Das assoziative Gesetz.

Um die eingeführten Namen zu rechtfertigen, ist die Permanenz der Gesetze der gewöhnlichen Typenmultiplikation nachzuweisen, in erster Linie die des assoziativen Gesetzes, laut dessen die Faktoren eines Produkts in beliebiger Art gruppenweise zusammengefaßt werden können.

Es sei also $\left(\prod_a^A M_a\right)_P^\pi$ das Produkt $(1+\pi)^{\text{ter}}$ Klasse aus den Faktoren M_a, mit dem Argument A und der Hauptverbindung $P=\sum_a^A p_a$, p_a das Hauptelement von M_a. Das genannte Produkt ist die nach ersten Differenzen geordnete Menge derjenigen Verbindungen $X=\sum_a^A x_a$, wo jedes x_a die Menge M_a durchläuft, aber die Menge A^0 der Stellen a^0, an denen Nebenelemente $(x_a + p_a)$ stehen, wohlgeordnet und kleiner als die reguläre Anfangszahl ω_π ist.

Nun sei A eine Typensumme $A=\sum_b^B A_b$. Nach dem assoziativen Gesetz der Addition zerlegt sich dadurch jede Verbindung X in

$$X=\sum_a^A x_a=\sum_b^B \sum_a^{A_b} x_a=\sum_b^B X_b,$$

insbesondere die Hauptverbindung in

$$P=\sum_a^A p_a=\sum_b^B \sum_a^{A_b} p_a=\sum_b^B P_b,$$

wo

$$X_b=\sum_a^{A_b} x_a, \quad P_b=\sum_a^{A_b} p_a;$$

d. h. X wird nunmehr Verbindung, mit dem Argument B, der Elemente X_b, die ihrerseits Stücke von X und Verbindungen der Elemente x_a mit den Argumenten A_b sind.

Hier ist nun zunächst die Rangordnung der X nach ersten Differenzen der x_a identisch mit der Rangordnung der X nach ersten Differenzen der X_b, wenn die X_b selbst nach ersten Differenzen der x_a geordnet werden. Denn sind

$$X=\sum_a^A x_a=\sum_b^B X_b, \quad Y=\sum_a^A y_a=\sum_b^B Y_b$$

zwei Verbindungen und $X < Y$, so existiert eine erste Differenzstelle a mit $x_a < y_a$ und $x_u = y_u$ für $u < a$; dann ist aber auch, wenn a zu A_b gehört, a erste Differenzstelle für X_b und Y_b, d. h. $X_b < Y_b$ und $X_v = Y_v$ für $v < b$.

Weiter zerlegt sich die Menge A^0 der mit Nebenelementen belegten Stellen a^0 von X in

$$A^0 = \sum_b^B A_b^0 = \sum_{b^0}^{B^0} A_{b^0}^0,$$

wo wir diejenigen Stellen b von B, wo $A_b^0 \neq 0$, mit b^0 und ihre Menge mit B^0 bezeichnet haben. An den übrigen Stellen b, wo $A_b^0 = 0$, ist A_b frei von Stellen a^0, also $X_b = P_b$. Da $A^0 < \omega_\pi$ angenommen war, so sind auch seine Teilmengen B^0, $A_{b^0}^0$ wohlgeordnet und $< \omega_\pi$. Umgekehrt, wenn B^0 und alle $A_{b^0}^0$ wohlgeordnet und $< \omega_\pi$ sind, so ist A^0 als Typensumme ebenfalls wohlgeordnet und $< \omega_\pi$, da es zugleich mit jenen Mengen dem Ringe (§ 10, d) aller Zahlen $< \omega_\pi$ angehört; hierbei ist die Voraussetzung wesentlich, daß ω_π eine *reguläre* Anfangszahl ist. Wäre ω_π singulär oder überhaupt keine Anfangszahl, so würden die Zahlen $< \omega_\pi$ keinen Ring bilden, und es könnte also $B^0 < \omega_\pi$, $A_{b^0}^0 < \omega_\pi$ und trotzdem $A^0 \geqq \omega_\pi$ sein.

Aus den letzten Überlegungen ergibt sich, daß folgende beiden Bestimmungen dieselbe Menge $\{X\}$ in derselben Ordnung definieren:

a) In $X = \sum_a^A x_a$ soll die Menge der Stellen, wo $x_a \neq p_a$, wohlgeordnet und $< \omega_\pi$ sein.

b) In $X = \sum_b^B X_b$ soll die Menge der Stellen, wo $X_b \neq P_b$, wohlgeordnet und $< \omega_\pi$ sein, und zugleich soll
in jedem $X_b = \sum_a^{A_b} x_a$ die Menge der Stellen, wo $x_a \neq p_a$, wohlgeordnet und $< \omega_\pi$ sein.

Bei der ersten Bestimmung durchläuft jedes x_a die Menge M_a und die Elementverbindung X das Produkt $\left(\prod_a^A M_a\right)_P^\pi$ mit der Hauptverbindung $P = \sum_a^A p_a$; bei der zweiten durchläuft jede Elementverbindung X_b das Produkt

$$N_b = \left(\prod_a^{A_b} M_a\right)_{P_b}^\pi$$

mit der Hauptverbindung $P_b = \sum_a^{A_b} p_a$, und es durchläuft X das Produkt $\left(\prod_b^B N_b\right)_P^\pi$ mit der Hauptverbindung $P = \sum_b^B P_b$. Die Gleichheit beider Produkte

$$\left(\prod_a^A M_a\right)_p^\pi = \left(\prod_b^B N_b\right)_P^\pi$$

ist der Inhalt des hiermit in allgemeinster Fassung bewiesenen assoziativen Gesetzes. Es besagt, daß ein Produkt beliebiger Klasse durch Zusammenfassung der Faktoren zu beliebigen Gruppen in ein Produkt gleicher Klasse von Produkten gleicher Klasse umgewandelt werden kann, wobei nur die Wahl der neuen Hauptelemente nicht willkürlich, sondern durch die Formel $P_b = \sum_a^{A_b} p_a$ vorgeschrieben ist; d. h. wenn ein Produkt als neuer Faktor figuriert, so figuriert seine Hauptverbindung als neues Hauptelement.

Fügen wir noch hinzu, daß in der von uns definierten Multiplikation das kommutative Gesetz selbstverständlich nicht gilt, wohl aber das (einseitig) distributive, das die Auflösung des letzten Faktors in eine Summe gestattet, daß 1 der Modul der Multiplikation ist, d. h. in jedem Produkt eine beliebige, auch transfinite, Menge von Faktoren $= 1$ gestrichen oder eingeschaltet werden kann, und daß ein Produkt dann und nur dann verschwindet, wenn einer seiner Faktoren verschwindet, so ist mit diesen (leicht zu beweisenden) Sätzen gezeigt, daß unsere Produkte zulässige Verallgemeinerungen der Produkte mit endlicher Faktorenanzahl sind.

Unter den zahlreichen Spezialfällen des assoziativen Gesetzes begnügen wir uns, die beiden wichtigsten *Potenzformeln* ($M_a = M$, $p_a = p$) anzuführen. Man erhält für $A = A_1 + A_2$

$$M(A_1 + A_2)_p^\pi = M(A_2)_p^\pi \cdot M(A_1)_p^\pi,$$

und für $A_b = C$, $A = CB$, $q = \sum_a^C p$

$$M(CB)_p^\pi = N(B)_q^\pi, \quad N = M(C)_p^\pi,$$

wo q (das frühere P_b) die Hauptbelegung von C mit M und zugleich das neue Hauptelement der Basis N darstellt. Es werden also zwei Potenzen derselben Basis multipliziert, indem man die Argumente in umgekehrter Reihenfolge addiert; eine Potenz wird potenziert, indem man

die Argumente multipliziert; dabei ist aber die Rede von Potenzen derselben Klasse und mit demselben (bzw. dem durch obige Formel definierten) Hauptelement. Die erste Formel bestätigt, daß nicht das Argument, sondern das inverse Argument sich formal wie ein Exponent verhält; denn schreibt man M^{A^*} für $M(A)_p^\pi$, so ist

$$M^{(A_1+A_2)^*} = M^{A_2^*+A_1^*} = M^{A_2^*} \cdot M^{A_1^*}$$

oder

$$M^{B_2+B_1} = M^{B_2} \cdot M^{B_1};$$

zwei Potenzen derselben Basis werden also multipliziert, indem man die Exponenten in derselben Reihenfolge addiert.

§ 15.

Strecken von Produkttypen.

Es sei $N = \left(\prod\limits_a^A M_a\right)_P^\pi$ das Produkt $(1+\pi)^{\text{ter}}$ Klasse der Faktoren M_a mit dem Argument A und der Hauptverbindung $P = \sum\limits_a^A p_a$. Ferner sei $X = \sum\limits_a^A x_a$ eine der zulässigen Verbindungen, also ein Element von N; wir wollen die zugehörige Anfangsstrecke N^X und Endstrecke N_X ermitteln.

Jeder Stelle a des Arguments entsprechen folgende Zerlegungen

$$A = A^a + a + A_a,$$

$$X = X^a + x_a + X_a,$$

$$X^a = \sum_b^{A^a} x_b, \quad X_a = \sum_b^{A_a} x_b.$$

Sei nun $U (< X)$ eines der zu N^X gehörigen Elemente und a die erste Differenzstelle zwischen U und X, also

$$U = X^a + u_a + U_a, \qquad u_a < x_a.$$

Lassen wir, bei festgehaltenem a, U auf alle möglichen Weisen variieren, so durchläuft u_a die Anfangsstrecke $(M_a)^{x_a}$, U_a hingegen alle Verbindungen mit dem Argument A_a und der Hauptverbindung $P_a = \sum\limits_b^{A_a} p_b$ unter der Beschränkung, daß die mit Nebenelementen belegten Stellen eine wohlgeordnete Menge $< \omega_\pi$ bilden; also durchläuft U_a das Produkt $\left(\prod\limits_b^{A_a} M_b\right)_{P_a}^\pi$ und $u_a + U_a$ das, was aus diesem Produkt durch rechtseitige

Multiplikation mit $(M_a)^{x_a}$ entsteht. Sind ferner U, U' zwei Verbindungen, deren Differenzstellen a, a' mit X verschieden sind, so ist $U < U'$, wenn $a < a'$ in A. Demnach stellt sich N^X dar als Typensumme

$$N^X = \sum_a^A \Big(\prod_b^{A_a} M_b\Big)^\pi_{p_a} \cdot (M_a)^{x_a}.$$

Das Analoge gilt für die Verbindungen $U > X$, nur durchläuft hier u_a die Endstrecke $(M_a)_{x_a}$ und es ist $U > U'$ für $a < a'$, so daß N_X eine Typensumme mit dem Erzeuger A^* wird:

$$N_X = \sum_a^{A^*} \Big(\prod_b^{A_a} M_b\Big)^\pi_{p_a} \cdot (M_a)_{x_a}.$$

Eine etwas kompliziertere Formel für Mittelstrecken N_X^Y übergehen wir.

Für Potenzen der Basis M mit dem Hauptelement p lauten diese Formeln:

$$\left.\begin{aligned} N^X &= \sum_a^A M(A_a)^\pi_p \cdot M^{x_a} \\ N_X &= \sum_a^{A^*} M(A_a)^\pi_p \cdot M_{x_a} \end{aligned}\right\} N = M(A)^\pi_p.$$

Insbesondere erhält man die Gleichung $N = N^p + P + N_p$ oder

$$M(A)^\pi_p = \sum_a^A M(A_a)^\pi_p \cdot M^p + P + \sum_a^{A^*} M(A_a)^\pi_p \cdot M_p.$$

§ 16.

Die Cantorschen Potenzen und Produkte.

Wir nehmen jetzt an, daß das *Argument das Inverse einer wohlgeordneten Menge*, also (im Potenzfalle) der Exponent wohlgeordnet sei. Jede wohlgeordnete Teilmenge des Arguments ist dann endlich und alle Produkt- und Potenzklassen fallen hier mit der ersten zusammen, die bereits die Maximalprodukte und -potenzen enthält (§ 13; es ist $T = T^0 = T^1 = \cdots$). Die letzte Gleichung des § 15 wird hier

$$M(\!(A)\!)_p = \sum_a^A M(\!(A_a)\!)_p \cdot M^p + P + \sum_a^{A^*} M(\!(A_a)\!)_p \cdot M_p$$

oder in Typenform

$$\mu(\!(\alpha)\!)_p = \sum_a^{\alpha} \mu(\!(\alpha_a)\!)_p \cdot \mu^p + 1 + \sum_a^{\alpha^*} \mu(\!(\alpha_a)\!)_p \cdot \mu_p.$$

Wir wollen darin $\alpha = \beta^*$ setzen, so daß der Exponent β eine Ordnungszahl wird, und die Stellen α ebenfalls durch Ordnungszahlen

$$\beta = (0\ 1\ 2 \cdots \eta \cdots), \qquad \eta < \beta,$$
$$\alpha = (\cdots \eta \cdots 2\ 1\ 0)$$

bezeichnen; dann ist $\alpha_\eta = \eta^*$ und es folgt

$$\mu(\!(\beta^*)\!)_p = \sum_{\eta}^{\beta^*} \mu(\!(\eta^*)\!)_p \cdot \mu^p + 1 + \sum_{\eta}^{\beta} \mu(\!(\eta^*)\!)_p \cdot \mu_p,$$

d. h. eine Rekursionsformel, welche die Potenz mit dem Exponenten β durch die Potenzen mit niedrigeren Exponenten η ausdrückt.

Hier ist nun der wichtigste Spezialfall, daß auch die Basis μ wohlgeordnet und das Hauptelement p ihr erstes Element ist. Da die Potenz nach dieser Spezialisierung nur noch von Basis und Exponenten abhängt, so schreiben wir μ^β für $\mu(\!(\beta^*)\!)_p$. Es ist dabei*) $\mu^p = 0$, $\mu_p = -1 + \mu$ und demnach

$$\mu^\beta = 1 + \sum_{\eta}^{\beta} \mu^\eta \cdot (-1 + \mu).$$

Hieraus geht durch Induktion hervor, daß μ^β selbst eine Ordnungszahl ist; denn μ^β ist eine, wenn alle μ^η $(\eta < \beta)$ Ordnungszahlen sind. Ist β Limeszahl, so gibt es zu jeder Anfangsstrecke von μ^β eine sie übertreffende Potenz μ^η, also ist $\mu^\beta = \lim \{\mu^\eta\}$. Da außerdem die Potenzregel $\mu^{\beta+\gamma} = \mu^\beta \cdot \mu^\gamma$ gilt und $\mu^1 = \mu$ ist, so stimmen diese Potenzen vollständig mit den von Herrn Cantor (Math. Ann. 49, S. 231—35) durch Induktion definierten überein; ihre Stellung in unserem allgemeinen Potenzensystem resumiert der folgende

Satz XIII. *Die Cantorschen Potenzen sind solche, wo das Argument das Inverse einer Ordnungszahl, der Exponent also eine Ordnungszahl, die Basis ebenfalls eine Ordnungszahl und das Hauptelement ihr erstes Element ist. Es gibt in diesem Falle nur Maximalpotenzen.*

Entsprechendes gilt für Produkte mit inversen Ordnungszahlen als Argumenten

$$\Big(\Big(\prod_{\eta}^{\beta^*} \mu_\eta\Big)\Big)_p = (\!(\mu_0\, \mu_1\, \mu_2 \cdots \mu_\eta \cdots)\!)_p,$$

die also Maximalprodukte sind; sind die Faktoren μ_η Ordnungszahlen und die Hauptelemente p_η die ersten Elemente, so gehen sie in „Cantorsche

*) Mit $-\lambda + \mu$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Ordnungszahl, die der Gleichung $\lambda + \xi = \mu$ genügt für $\lambda < \mu$ (λ, μ Ordnungszahlen). Ist die Gleichung $\xi + \lambda = \mu$ auflösbar, so heiße $\mu - \lambda$ ihre kleinste Lösung.

Produkte" $\mu_0 \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\eta \cdots$ über, die wie die Potenzen auch durch Induktion definiert werden können (z. B. ist $\mu_0 \mu_1 \mu_2 \cdots$ der Limes von $\mu_0, \mu_0\mu_1, \mu_0\mu_1\mu_2, \cdots$) und selbst Ordnungszahlen sind.

Cantorsche Potenzen, deren Basis eine Anfangszahl ist, heißen *Hauptzahlen*. Eine Hauptzahl ist allen ihren Endstücken ähnlich, und vice versa.

§ 17.

Der Fall wohlgeordneten Arguments.

Die Ordnungszahl σ sei der Typus einer wohlgeordneten Menge, deren Elemente wir mit $0\,1\,2 \cdots \varrho \cdots$ $(\varrho < \sigma)$ bezeichnen; wir bilden Elementverbindungen mit dem Argument σ

$$X = \sum_{\varrho}^{\sigma} x_\varrho = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_\varrho + \cdots$$

und denken sie uns für jede Stelle ϱ in

$$X = X^\varrho + x_\varrho + X_\varrho \qquad (= x_0 + X_0)$$

zerlegt, um im Bedarfsfalle die Stellen vor und nach ϱ auseinanderhalten zu können. Durchläuft jedes x_ϱ die Menge M_ϱ, so bilden die X, nach ersten Differenzen geordnet, das Vollprodukt $\left(\left(\prod_\varrho^\sigma M_\varrho\right)\right)$, im Falle gleicher Faktoren die Vollpotenz $M((\sigma))$. Wir brauchen aber später (§ 21) eine weitere Verallgemeinerung, die den Charakter eines Produkts fallen läßt; wir werden nämlich zulassen, daß x_ϱ eine Menge $M(X^\varrho)$ durchläuft, die nicht mehr allein von der Stelle ϱ, sondern auch von den vorangehenden Elementen $x_0 x_1 \cdots$ abhängig sein kann. Eine solche, nach ersten Differenzen geordnete, Verbindungsmenge möge (nicht ganz passend) als *Produkt mit variablen Faktoren* bezeichnet werden. Da die ersten differierenden Elemente zweier Verbindungen stets *einer* Menge $M(X^\varrho)$ angehören, so kommen für den Typus der Verbindungsmenge nur die Typen der variablen Faktoren $M(X^\varrho)$ in Betracht, wogegen es durchaus keine Rolle spielt, welche Beziehung wir uns zwischen zwei verschiedenen solchen Mengen $M(X^\varrho)$, $M(Y^\tau)$ denken; diese Mengen mögen gemeinsame Elemente haben oder nicht, eine gegenseitige Rangordnung haben oder nicht, getrennte oder beliebig gelegene Teilmengen einer geordneten Menge sein. — Für $\sigma = 2$, wo x_0 eine Menge M_0 und x_1 eine von x_0 abhängige Menge $M(x_0)$ durchläuft, ist die Verbindungsmenge der Typensumme $\sum_{x_0}^{M_0} M(x_0)$ ähnlich (in dieser allerdings hatten wir uns die Mengen $M(x_0)$ ohne

gemeinsame Elemente zu denken); das Produkt mit variablen Faktoren verhält sich also zu dem mit festen Faktoren $\left(\left(\prod_{\varrho}^{\sigma} M_\varrho\right)\right)$ etwa so, wie eine transfinite Typensumme zu dem Produkt $M_1 M_0$ zweier Faktoren, in das sie bei Gleichheit aller Summanden übergeht.

Stellen wir uns die variablen Faktoren als Teilmengen einer und derselben geordneten Menge M vor (M kann z. B., indem man sich je zwei Faktoren ohne gemeinsame Elemente denkt, durch Summation aller $M(X^\varrho)$ mit irgendwelchem Erzeuger gebildet werden), so wird das Produkt Teilmenge der Vollpotenz $M((\sigma))$.

Betrachten wir jetzt nur Belegungen von σ mit M, nehmen also an, daß alle Elemente x_ϱ von X einer einzigen Menge M angehören. Es sei

$$A < B < C < \cdots < L < \cdots$$

eine wohlgeordnete Reihe von Belegungen, vom Typus der regulären Anfangszahl ω_ν, und wir wollen die möglichen Strukturen einer solchen *Belegungsreihe* untersuchen. Zwei besondere Fälle treten auf den ersten Blick hervor; es kann nämlich die Stelle erster Differenz zwischen je zwei konsekutiven Belegungen beständig wachsen und eine ω_ν-Reihe im *Argument* σ beschreiben, oder die Stelle erster Differenz zwischen je zwei Belegungen immer dieselbe sein und das erste differierende Element eine ω_ν-Reihe in der *Basis* M durchlaufen. Im ersten Fall ist

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} A = X^\alpha + a_\alpha + A_\alpha \\ B = X^\beta + b_\beta + B_\beta \\ C = X^\gamma + c_\gamma + C_\gamma \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L = X^\lambda + l_\lambda + L_\lambda \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \qquad \begin{matrix} (\alpha < \beta < \gamma < \cdots < \lambda < \cdots) \\ (a_\alpha < x_\alpha, \\ b_\beta < x_\beta, \\ c_\gamma < x_\gamma, \cdots \\ l_\lambda < x_\lambda, \cdots), \end{matrix}$$

im zweiten

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} A = X^\varrho + a_\varrho + A_\varrho \\ B = X^\varrho + b_\varrho + B_\varrho \\ C = X^\varrho + c_\varrho + C_\varrho \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L = X^\varrho + l_\varrho + L_\varrho \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \qquad (a_\varrho < b_\varrho < c_\varrho < \cdots < l_\varrho < \cdots).$$

Im ersten Fall, der also voraussetzt, daß ω_ν im Argument enthalten sei, nennen wir die Belegungsreihe eine *argumentale* Reihe; im zweiten Fall, der voraussetzt, daß ω_ν in der Basis enthalten sei, eine *basische* Reihe.

Wir beweisen nun den

Satz XIV. *Jede ω_ν-Reihe von Belegungen ist entweder mit einer argumentalen oder mit einer basischen ω_ν-Reihe konfinal.*

Schicken wir voraus: wenn in der Reihe der Ordnungszahlen $< \omega_\nu$

$$0\ 1\ 2 \cdots \alpha \cdots \quad (\alpha < \omega_\nu)$$

eine Funktion $\varphi(\alpha)$ existiert, die jeder Zahl α eine größere Zahl der Reihe zuordnet $(\alpha < \varphi(\alpha) < \omega_\nu)$, so definiert diese Funktion gewisse Teilmengen

$$\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_\beta \cdots$$

gemäß folgenden Bestimmungen:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_{\beta+1} = \varphi(\alpha_\beta),$$
$$\alpha_{\lim\{\beta\}} = \lim\{\alpha_\beta\}.$$

Die umfassendste Teilmenge dieser Art (die Vereinigungsmenge aller) ist also durch $\varphi(\alpha)$ eindeutig definiert und ist, da die Gesamtmenge mit ihr konfinal ist, ebenfalls vom Typus ω_ν, wenn ω_ν eine reguläre Anfangszahl ist; der Index β durchläuft also wieder alle Ordnungszahlen $< \omega_\nu$.

Sei nun

$$X(0)\ X(1)\ X(2) \cdots X(\alpha) \cdots$$

eine ω_ν-Reihe von Belegungen, $X(\alpha) < X(\beta)$ für $\alpha < \beta$. Wir bezeichnen mit (α, β) die Stelle erster Differenz zwischen $X(\alpha)$ und $X(\beta)$; (α, β) ist eine Ordnungszahl $< \sigma$ (σ das Argument der Belegungen). Nach einer früheren Bemerkung (§ 13) ist für $\alpha < \beta < \gamma$ die Zahl (α, γ) gleich der kleineren der beiden Zahlen (α, β) und (β, γ), also

$$(\alpha, \gamma) \leqq (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \gamma) \leqq (\beta, \gamma).$$

Bei festem α nehmen die Ordnungszahlen

$$(\alpha, \alpha+1)\ (\alpha, \alpha+2) \cdots (\alpha, \beta) \cdots$$

also niemals zu und müssen ein Minimum $\pi(\alpha)$ haben, das zuerst für $\beta = \varphi(\alpha)$ eintrete, also

$$(\alpha, \beta) = \pi(\alpha) \quad \text{für} \quad \beta \geqq \varphi(\alpha) > \alpha.$$

Vermittelst dieser Funktion $\varphi(\alpha)$ bilde man wie oben die zugehörige Teilmenge $\alpha_0\ \alpha_1 \cdots \alpha_\beta \cdots$, so daß die ursprüngliche Belegungsreihe mit der folgenden

$$X(\alpha_0)\ X(\alpha_1)\ X(\alpha_2) \cdots X(\alpha_\beta) \cdots,$$

die wir nun auch mit

$$Y(0)\ Y(1)\ Y(2) \cdots Y(\beta) \cdots$$

bezeichnen, konfinal ist. In dieser ist, für $\beta < \gamma < \delta$,

$$\alpha_\gamma \geqq \alpha_{\beta+1} = \varphi(\alpha_\beta),$$
$$(\alpha_\beta, \alpha_\gamma) = \pi(\alpha_\beta) = \varrho(\beta),$$
$$(\alpha_\beta, \alpha_\delta) \leqq (\alpha_\gamma, \alpha_\delta), \quad \text{d. h.} \quad \varrho(\beta) \leqq \varrho(\gamma);$$

jedes $Y(\beta)$ hat also mit allen folgenden dieselbe erste Differenzstelle $\varrho(\beta)$ und die Zahlen $\varrho(\beta)$ nehmen mit wachsendem Index niemals ab. Hier ist nun zu unterscheiden, ob sie ein Maximum haben oder nicht. *Haben sie kein Maximum,* so existiert zu jedem $\varrho(\beta)$ ein $\varrho(\gamma) > \varrho(\beta)$, und es sei $\psi(\beta)$ der kleinste Wert von γ, für den dies eintritt, also

$$\varrho(\gamma) > \varrho(\beta) \quad \text{für} \quad \gamma \geqq \psi(\beta) > \beta.$$

Mit dieser Funktion $\psi(\beta)$ bilden wir wieder aus der Reihe aller Indizes β die oben definierte Teilreihe $\beta_0\,\beta_1 \cdots \beta_\gamma \cdots$ und erhalten eine dritte Belegungsreihe

$$Y(\beta_0)\; Y(\beta_1)\; Y(\beta_2) \cdots Y(\beta_\gamma) \cdots,$$

mit der die zweite und folglich auch die erste konfinal ist; in dieser ist für $\gamma < \delta$

$$\beta_\delta \geqq \beta_{\gamma+1} = \psi(\beta_\gamma),$$

also

$$\varrho(\beta_\delta) > \varrho(\beta_\gamma),$$

die erste Differenzstelle der Belegung $Y(\beta_\gamma)$ mit allen folgenden wächst also mit wachsendem γ, und wir haben hier eine argumentale Reihe vor uns. *Haben die Zahlen* $\varrho(\beta)$ *ein Maximum* ϱ, das für den Index β zuerst eintrete, so bildet der Rest

$$Y(\beta)\; Y(\beta+1) \cdots Y(\gamma) \cdots$$

der vorigen Belegungsreihe eine basische Reihe, weil für je zwei Belegungen immer dieselbe erste Differenzstelle ϱ besteht, und die ursprüngliche Reihe ist mit dieser konfinal. Q. E. D.

Belegungsreihen vom inversen Typus ω_ν^* sind genau ebenso zu behandeln; eine argumentale ω_ν^*-Reihe entspringt aus einer ω_ν-Reihe (nicht ω_ν^*-Reihe!) des Arguments, eine basische aus einer ω_ν^*-Reihe der Basis, und jede ω_ν^*-Reihe von Belegungen ist mit einer argumentalen oder basischen koinitial.

In der Vollpotenz $M(\!(\sigma)\!)$, d. h. in der Gesamtheit aller Belegungen von σ mit M, folgt auf die argumentale Reihe (A) unmittelbar der Inbegriff der mit

$$X^\varrho = x_0 + \cdots + x_\alpha + \cdots + x_\beta + \cdots + x_\gamma + \cdots + x_\lambda + \cdots$$

beginnenden Elemente, wo $\varrho\,(\leq \sigma)$ der Limes der Stellen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \lambda, \cdots$ ist; für $\varrho = \sigma$ gibt es nur ein solches Element X. Auf die basische Reihe (B) folgt, wenn die Basisreihe $a_\varrho\, b_\varrho\, c_\varrho \cdots l_\varrho \cdots$ in M einen oberen Limes x_ϱ hat, der Inbegriff der mit $X^\varrho + x_\varrho$ beginnenden Elemente, für

$\varrho = \sigma - 1$ ein einziges Element; eine Basisreihe mit folgender Lücke liefert eine basische Reihe mit entsprechender Lücke; ist die Basis mit der Basisreihe konfinal, so treten kompliziertere Verhältnisse ein. Diese Sätze geben die ausreichende Grundlage für die Untersuchung der Vollpotenz $M((\sigma))$ und ihrer Teilmengen.

Dichte Mengen.

§ 18.

Spezies und Geschlechter.

Die Ergebnisse des § 11 über den Aufbau beliebiger Mengen verweisen uns in erster Linie auf ein genaueres Studium der dichten Mengen, zu dem hier die Fundamente gegeben werden sollen.

Wir denken uns eine dichte Menge zunächst von etwaigen Randelementen befreit; eine unbegrenzte dichte Menge heiße eine *η-Menge* (nach der einfachsten dieser Mengen, der Menge der rationalen Zahlen, vom Typus η) und ihr Typus ein *η-Typus*. In einer η-Menge ist jedes Element beiderseits Grenzelement (§ 3); es liefert eine Zerlegung

$$M = A + m + B,$$

wo A mit einer bestimmten regulären Anfangszahl ω_α konfinal, B mit dem Inversen ω_β^* einer solchen koinitial ist, und ist also ein $\omega_\alpha \omega_\beta^*$-Element oder, wie wir kürzer sagen wollen, ein $c_{\alpha\beta}$-Element; $c_{\alpha\beta}$ heiße der *Charakter* des Elements m. Entsprechend ist jede Lücke $M = C + D$ eine $\omega_\gamma \omega_\delta^*$-Lücke oder $c_{\gamma\delta}$-Lücke und $c_{\gamma\delta}$ ihr Charakter. Wir benutzen dann die Element- und Lückencharaktere zu einer Klassifikation der η-Mengen; wir bilden nämlich die Mengen

$$U = \{c_{\alpha\beta}\}, \quad V = \{c_{\gamma\delta}\}$$

der Element- und Lückencharaktere und rechnen zwei Mengen mit denselben U, V zu einer *Spezies*, die wir die Spezies (U, V) nennen. Die Zugehörigkeit von M oder ihrem Typus μ zur Spezies (U, V) werde durch die Gleichung

$$(M) = (\mu) = (U, V)$$

ausgedrückt. $V = 0$ bedeutet eine Spezies *stetiger* Typen.

Beispiele. Das Linearkontinuum λ gehört zur Spezies $(c_{00}, 0)$. Die Typen η, ι (Typus der irrationalen Zahlen), $\lambda + \lambda$, λ^2, $\eta\omega_1$ gehören zur Spezies (c_{00}, c_{00}). Der Typus $\eta\omega_1 + \eta\omega_1^*$ gehört zu $(c_{00}, c_{00}c_{11})$, der Typus $\eta\omega_1 + 1 + \eta\omega_1^*$ zu $(c_{00}c_{11}, c_{00})$. Der Typus $\eta\omega_\omega$ gehört zur Spezies (c_{00}, V), wo

$$V = (c_{00}c_{10}c_{20}\cdots) = \{c_{n0}\}.$$

Wir schreiben

$$(M) < (M'), \quad (U, V) < (U', V'),$$

wenn U Teilmenge von U', V von V' und zwar mindestens eine von beiden echte Teilmenge ist (also nicht $U = U'$, $V = V'$); wir sagen dann, (M) sei die *niedere*, (M') die *höhere* Spezies. Z. B. ist $(\lambda) < (\eta)$, nämlich $(c_{00}, 0) < (c_{00}, c_{00})$. Wenn gleichzeitig $(M) \leqq (M')$ und $(M') \leqq (M)$, so ist $(M) = (M')$. Ist N eine Strecke oder ein unbegrenztes Stück von M, so ist $(N) \leqq (M)$. Wenn M eine Mittelstrecke von niederer Spezies enthält, so heißt M *reduzibel*; wenn alle seine Mittelstrecken (und damit alle unbegrenzten Stücke) zur Spezies (M) gehören, so heißt es *irreduzibel*. Z. B. ist $\lambda + \lambda$ reduzibel, da es zur Spezies (c_{00}, c_{00}) gehört, aber Mittelstrecken der Spezies $(c_{00}, 0)$ enthält; λ und η sind irreduzibel.

Weiter fassen wir die Spezies zu *Geschlechtern* zusammen, indem wir die Vereinigungsmenge *aller* Charaktere

$$W = \mathfrak{M}(U, V) = \{c_{\alpha\beta}, c_{\gamma\delta}\}$$

bilden und zwei Mengen mit demselben W zu einem Geschlecht zählen. Da zu jedem Geschlecht eine und nur eine Spezies *stetiger* Typen $(W, 0)$ gehört, so ist eine besondere Bezeichnung der Geschlechter entbehrlich. Z. B. gehören η, ι, λ zu demselben Geschlecht $(c_{00}, 0)$.

Aus den Überlegungen in § 6 folgt sofort:

Gehört M zur Spezies (U, V), so gehört seine Ausfüllung $[M]$ zur Spezies $(W, 0)$; ist überdies M überall unstetig, so gehört seine Ergänzung $\overline{M}$ zur Spezies (V, U). Eine Menge und ihre Ausfüllung, sowie eventuell ihre Ergänzung, gehören also zu demselben Geschlecht. Ist eine Menge in einer andern dicht, so gehören beide zu demselben Geschlecht (weil sie dieselbe Ausfüllung haben).

Versteht man unter $M_{\alpha\beta} = \{m_{\alpha\beta}\}$ die Menge der $c_{\alpha\beta}$-Elemente in M und unter $\overline{M}_{\gamma\delta} = \{\overline{m}_{\gamma\delta}\}$ die Menge derjenigen Elemente von $\overline{M}$, die den $c_{\gamma\delta}$-Lücken von M entsprechen (im Falle eines überall unstetigen M also die Menge der $c_{\gamma\delta}$-Elemente von $\overline{M}$), so ergibt sich mit Leichtigkeit der folgende

Satz XV. *Zur Irreduzibilität der unstetigen Menge M ist notwendig und hinreichend, daß jede Menge $M_{\alpha\beta}$ und jede Menge $\overline{M}_{\gamma\delta}$ in $[M]$ dicht sei; zur Irreduzibilität der stetigen Menge M ist notwendig und hinreichend, daß jede Menge $M_{\alpha\beta}$ in M dicht sei.*

§ 19.

Ableitung unstetiger irreduzibler Typen aus stetigen.

Der letzte Satz in Verbindung mit dem frühern (§ 7, X), daß jede dichte Menge in zwei in ihr dichte Teilmengen gespalten werden kann, gestattet eine wichtige Folgerung:

Satz XVI. *Wenn eine irreduzible (stetige) Menge der Spezies* $(W, 0)$ *existiert, so existieren auch irreduzible Mengen jeder beliebigen Spezies desselben Geschlechts.*

Beweis. M sei eine irreduzible η-Menge von der Spezies $(W, 0)$, wo $W = \{c_{\alpha\beta}\}$, also jede Menge $M_{\alpha\beta}$ in M dicht. (U, V) sei eine vorgeschriebene Spezies desselben Geschlechts, also $W = \mathfrak{M}(U, V)$, wobei die Mengen U, V auch gemeinsame Charaktere enthalten können. Die Menge dieser gemeinsamen Charaktere sei W_0; man erhält damit die folgenden Zerlegungen

$$U = (W_0, W_1), \quad V = (W_0, W_2), \quad W = (W_0, W_1, W_2),$$

wo die Mengen W_0, W_1, W_2 keine gemeinsamen Elemente besitzen (eine von ihnen oder W_1, W_2 beide können auch Null sein). Wir setzen entsprechend

$$W_0 = \{c_{\alpha_0\beta_0}\}, \quad W_1 = \{c_{\alpha_1\beta_1}\}, \quad W_2 = \{c_{\alpha_2\beta_2}\}$$

und zerlegen jede Menge $M_{\alpha_0\beta_0}$ in zwei, in ihr dichte Teilmengen $P_{\alpha_0\beta_0}$, $Q_{\alpha_0\beta_0}$. Sodann spalten wir M in folgende Teilmengen

$$P = \{P_{\alpha_0\beta_0}, M_{\alpha_1\beta_1}\}, \quad Q = \{Q_{\alpha_0\beta_0}, M_{\alpha_2\beta_2}\}$$

und behaupten, daß P eine irreduzible Menge von der verlangten Spezies (U, V), Q eine ebensolche von der Spezies (V, U) sei.

In der Tat schließen wir aus § 5, 6 folgendes. $M_{\alpha_1\beta_1}$ ist in M, also erst recht in P dicht; jedes seiner Elemente $m_{\alpha_1\beta_1}$ ist $c_{\alpha_1\beta_1}$-Element in M, also auch in $M_{\alpha_1\beta_1}$, also auch in P. $P_{\alpha_0\beta_0}$ ist in $M_{\alpha_0\beta_0}$, also auch in M, also auch in P dicht; jedes seiner Elemente $p_{\alpha_0\beta_0}$ ist $c_{\alpha_0\beta_0}$-Element in M, folglich auch in $P_{\alpha_0\beta_0}$, folglich auch in P. Demnach enthält P wirklich die vorgeschriebenen Elementcharaktere aus U und nur diese, ebenso Q die Elementcharaktere von V. Da P Teilmengen enthält, die in M dicht sind, so ist P selbst in M dicht, ebenso Q, und da M stetig ist, so ist $M = [P] = [Q]$, P und Q sind Ergänzungen voneinander, M ihre Ausfüllung. Dann entsprechen aber die Lücken der einen Menge den Elementen der andern, also ist P von der Spezies (U, V), Q von der Spezies (V, U). Da endlich alle Mengen $P_{\alpha_0\beta_0}$, $M_{\alpha_1\beta_1}$, $Q_{\alpha_0\beta_0}$, $M_{\alpha_2\beta_2}$ in M dicht sind, so sind nach XV P und Q irreduzibel.

§ 20.

Existenzbedingungen.

Die Mengen U, V, W dürfen nicht ganz willkürlich gewählt werden, wenn es wirklich Mengen der Spezies (U, V) geben soll, und zwar können wir aus § 19 schließen, daß eine Existenzbedingung nur das Geschlecht, also die Menge W betreffen wird. Z. B. kann eine Menge der Spezies $(c_{11}, 0)$ nicht existieren, denn sie müßte ω_1-Reihen, also auch ω_0-Reihen enthalten und diese müßten ω_0-Elemente oder ω_0-Lücken definieren. Ist allgemein $\omega_\varkappa$ die *erste innerhalb* M (§ 2, d. h. in Mittelstrecken von M) *nicht enthaltene reguläre Anfangszahl*, so daß auch keine reguläre Anfangszahl $\geqq \omega_\varkappa$ innerhalb M enthalten ist, so ist jede reguläre Anfangszahl ω_α $(\alpha < \varkappa)$ innerhalb M enthalten und muß zu ω_α-Elementen oder ω_α-Lücken Anlaß geben, d. h. W muß für jedes α mindestens einen Charakter $c_{\alpha\beta}$ enthalten. Das gleiche gilt von der *ersten innerhalb* M^* *nicht enthaltenen regulären Anfangszahl* ω_λ; W muß für jeden Index $\beta < \lambda$ (ω_β regulär) mindestens einen Charakter $c_{\alpha\beta}$ enthalten. Endlich fordert der Satz VI (§ 4) die Existenz mindestens eines *symmetrischen* Charakters $c_{\alpha\alpha}$. Eine Charakterenmenge W, die diesen Bedingungen genügt, wollen wir *vollständig* nennen. Bilden wir also das Tableau

$$\mathfrak{W}:\quad \begin{array}{ccccccc|c} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0\beta} & \cdots & & & c_{0\lambda} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1\beta} & \cdots & & & c_{1\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ c_{\alpha 0} & c_{\alpha 1} & \cdots & c_{\alpha\beta} & \cdots & & & c_{\alpha\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \hline c_{\varkappa 0} & c_{\varkappa 1} & \cdots & c_{\varkappa\beta} & \cdots & \cdots & & c_{\varkappa\lambda} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\alpha < \varkappa,\ \beta < \lambda) \\ (\omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\varkappa,\ \omega_\lambda \text{ regulär}) \end{array}$$

aller Charaktere $c_{\alpha\beta}$ (die der Deutlichkeit wegen hinzugefügten eingerahmten Randreihen, die Zeile $\varkappa$ und die Spalte λ, sollen nicht zu $\mathfrak{W}$ gehören), so muß eine vollständige Charakterenmenge mit den *„Randzahlen"* $\varkappa$, λ aus jeder Zeile, aus jeder Spalte und aus der Hauptdiagonale von $\mathfrak{W}$ mindestens ein Element enthalten.

Wir werden nun das wichtige Resultat ableiten, daß diese einfache Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist zur Existenz irreduzibler Mengen der Spezies $(W, 0)$ und damit (nach § 19) irreduzibler Mengen jeder beliebigen Spezies desselben Geschlechts; d. h. wir werden den Satz beweisen:

Satz XVII. *Zu jeder vollständigen Charakterenmenge* W, *deren Randzahlen* $\varkappa$, λ *keine Limeszahlen sind, existieren irreduzible stetige Mengen der Spezies* $(W, 0)$.

Was die hinzugefügte Einschränkung anbelangt, daß die regulären Anfangszahlen $\omega_\varkappa$, ω_λ keine Limesindizes haben sollen, so ist an die Betrachtung in § 3 zu erinnern, wonach die Existenz regulärer Anfangszahlen mit Limesindex überhaupt fraglich ist; die dortigen Ausführungen zeigen jedenfalls, daß die niedrigste unter ihnen von einer exorbitanten, alle bekannten Mengen vermutlich übertreffenden Mächtigkeit sein müßte. Die Ungewißheit, ob der Satz XVII auch für solche Randzahlen gilt oder nicht, ist also als keine erhebliche Einbuße an Allgemeinheit anzusehen.

§ 21.

Existenzbeweis der Geschlechter mit vollständiger Charakterenmenge.

Um den Satz XVII zu beweisen, bringen wir die vorgeschriebene vollständige Charakterenmenge W zunächst in eine bestimmte Ordnung. Wir wollen voraussetzen, daß von den beiden Randzahlen $\varkappa$ die größere sei ($\varkappa \geqq \lambda$), indem wir andernfalls statt M die inverse Menge M^* betrachten würden. Dann erteilen wir W eine Wohlordnung, indem wir die vorhandenen Charaktere in den Zeilen von links nach rechts und sodann die Zeilen von oben nach unten ordnen, also

$$W = \sum_\alpha \sum_\beta c_{\alpha\beta}.$$

Der Typus von W ist eine Teilmenge von

$$\lambda\varkappa \leqq \varkappa^2 < \omega_\varkappa,$$

denn da $\omega_\varkappa$ als Anfangszahl mit Nichtlimesindex größer als ihr Index $\varkappa$ und folglich auch von höherer Mächtigkeit ist, so ist auch $\varkappa^2 < \omega_\varkappa$. Demnach enthält W keine höheren ω_α-Reihen als die, welche in M vorkommen sollen.*)

Weiter setzen wir

$$\varphi_{\alpha\beta} = \omega_\alpha + 1 + \omega_\beta^*,$$

$$\Phi = \sum_{c_{\alpha\beta}}^{W} \varphi_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}$$

und endlich für beliebige Werte α, β

$$\mu(\beta, \alpha) = 1 + \omega_\beta^* + \Phi + \omega_\alpha + 1.$$

Jeder solche Typus $\mu(\beta, \alpha)$ ist *zerstreut* (§ 11), aber lückenfrei; jede seiner

*) Hier ist der Punkt, der die genannte Einschränkung bedingt. Wenn $\omega_\varkappa = \varkappa$, so scheint das hier vorgetragene Konstruktionsverfahren ebensowenig wie irgend ein anderes ein Mittel zu liefern, das Auftreten von $\omega_\varkappa$-Reihen zu verhindern.

Teilmengen hat entweder ein letztes (erstes) Element oder einen oberen (unteren) Limes. Es gibt Elemente mit zwei Nachbarn (= konsekutiven Elementen), einseitige Grenzelemente mit einem Nachbar, Elemente ohne Nachbarn; zu den letzten gehören die Randelemente und die beiderseitigen Grenzelemente in den Bestandteilen $\varphi_{\alpha\beta}$. Für $\alpha < \varkappa$, $\beta < \lambda$ können alle Mengen $\mu(\beta, \alpha)$ als Teilmengen (Intervalle) einer einzigen

$$\mu = \mu(\lambda - 1, \varkappa - 1) = 1 + \omega^*_{\lambda-1} + \Phi + \omega_{\varkappa-1} + 1$$

von der Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}$ aufgefaßt werden.

Nun beachten wir die bisher nicht zur Sprache gekommene Vollständigkeit der Charakterenmenge W. W enthält demzufolge mindestens einen symmetrischen Charakter, der niedrigste unter diesen sei $c_{\sigma\sigma}$; sie enthält für jedes reguläre $\omega_\alpha (< \omega_\varkappa)$ mindestens einen Charakter $c_{\alpha\beta}$, der niedrigste unter diesen sei $c_{\alpha\beta_\alpha}$; sie enthält für jedes reguläre $\omega_\beta (< \omega_\lambda)$ mindestens einen Charakter $c_{\alpha\beta}$, der niedrigste unter diesen sei $c_{\alpha_\beta\beta}$. Wir bilden sodann ein Produkt, des Argumentes ω_σ, *mit variablen Faktoren* (§ 17); d. h. wir betrachten Elementverbindungen

$$\begin{aligned} X = \sum_\varrho^{\omega_\sigma} x_\varrho &= x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_\varrho + \cdots \\ &= X^\varrho + x_\varrho + X_\varrho \qquad (\varrho < \omega_\sigma), \end{aligned}$$

in denen die von x_ϱ durchlaufene Menge $M(X^\varrho)$ von den vorangehenden Elementen X^ϱ abhängen darf. Wir bestimmen insbesondere, daß $M(X^\varrho)$ entweder eine Menge von einem der Typen $\mu(\beta, \alpha)$ sein soll, in welchem Fall wir x_ϱ ein *bewegliches* Element nennen; oder daß sie vom Typus 1 sei, d. h. sich auf ein einziges Element reduzieren soll, in welchem Fall x_ϱ ein *gebundenes* Element heiße. Da nach den Bemerkungen in § 17 die Beziehung, die wir uns zwischen verschiedenen variablen Faktoren vorstellen, gleichgültig ist, so ist es erlaubt, alle gebundenen Elemente einem einzigen bestimmten Element p gleichzusetzen ($x_\varrho = p$). Hiernach fixieren wir die Wahl der Menge $M(X^\varrho)$ durch folgende Vorschriften:

(1) x_0 durchläuft irgend ein $\mu(\beta, \alpha)$, etwa die Menge μ selbst.

(2) Ist ϱ Limeszahl und sind alle Elemente X^ϱ beweglich, so ist auch x_ϱ beweglich und durchläuft die Menge $\mu(\beta_\tau, \alpha_\tau)$, falls ϱ mit der regulären Anfangszahl $\omega_\tau (< \omega_\sigma)$ konfinal ist.

(3) Auf ein gebundenes Element folgen lauter gebundene, d. h. für $x_\varrho = p$ ist auch $x_{\varrho+1} = x_{\varrho+2} = \cdots = x_\xi = p$ ($\xi \geqq \varrho$).

(4) Ist x_ϱ beweglich und ein Element ohne Nachbarn (also entweder Randelement oder beiderseitiges Grenzelement in seiner Menge), so ist $x_{\varrho+1} = p$.

(5) Ist x_ϱ beweglich und hat keinen linken, aber einen rechten Nachbar, und ist x_ϱ ω_α-Element, so durchläuft $x_{\varrho+1}$ die Menge $\mu(\beta_\alpha, \sigma)$.

(6) Ist x_ϱ beweglich und hat keinen rechten, aber einen linken Nachbar, und ist x_ϱ ω_β^*-Element, so durchläuft $x_{\varrho+1}$ die Menge $\mu(\sigma, \alpha_\beta)$.

(7) Ist x_ϱ beweglich und hat zwei Nachbarn, Vorgänger und Nachfolger, so durchläuft $x_{\varrho+1}$ die Menge $\mu(\sigma, \sigma)$.

Die Menge aller, diesen Bestimmungen genügenden und nach ersten Differenzen geordneten Verbindungen X heiße N. Auf Grund der Erörterungen in § 17 können wir nun den Typus dieser Menge untersuchen. N ist Teilmenge der Vollpotenz $\mu(\!(\omega_\sigma)\!)$ und die in N enthaltenen Reihen sind also entweder mit argumentalen oder basischen Reihen konfinal (resp. koinitial), so daß es genügt, solche speziellen Reihen zu betrachten. Wir bemerken zuvor, daß, wenn ϱ die erste Differenzstelle für zwei Verbindungen ist,

$$X = X^\varrho + x_\varrho + X_\varrho, \quad Y = X^\varrho + y_\varrho + Y_\varrho, \quad (x_\varrho < y_\varrho)$$

offenbar x_ϱ und nach (3) alle Elemente von X^ϱ bewegliche Elemente sind. Danach ergibt sich sofort, daß in N jede argumentale oder basische Reihe, also überhaupt jede Reihe, einen Limes hat. Denn auf eine argumentale ω_ν-Reihe folgt, wie in § 17 bemerkt wurde, der Inbegriff der mit X_ϑ beginnenden Verbindungen, wo ϱ eine Limeszahl ($\leqq \omega_\sigma$) ist und wo, wie jetzt hinzuzufügen ist, alle Elemente von X^ϱ beweglich sind. Für $\varrho < \omega_\sigma$ hat x_ϱ ein bestimmtes Intervall zu durchlaufen, dessen erstes Element a_ϱ sei, und dann ist

$$X = X^\varrho + a_\varrho + p + p + \cdots$$

das erste der mit X^ϱ beginnenden Elemente, also der obere Limes der argumentalen Reihe; für $\varrho = \omega_\sigma$ ist $X^\varrho = X$ selbst eine vollständige Verbindung und die einzige, die mit X^ϱ beginnt, also wieder der Limes der argumentalen Reihe. Auf eine basische ω_ν-Reihe aber folgt die Gesamtheit der mit $X^\varrho + x_\varrho$ beginnenden Elemente, wenn x_ϱ der Limes der zugehörigen Basisreihe ist, und dieser Fall tritt stets ein, da in unseren Mengen $\mu(\beta, \alpha)$ jede Reihe einen Limes hat. Die genannte Gesamtheit hat wiederum stets ein erstes Element

$$X = X^\varrho + x_\varrho + a_{\varrho+1} + p + p + \cdots$$

oder

$$X = X^\varrho + x_\varrho + p \qquad + p + p + \cdots,$$

je nachdem $x_{\varrho+1}$ beweglich (und $a_{\varrho+1}$ das erste Element seines Intervalls) oder gebunden ist, und X ist der obere Limes der basischen Reihe. Genau so folgt, daß auch argumentale und basische ω_ν^*-Reihen stets einen unteren Limes haben. Die Menge N enthält also sicher keine Lücken, sondern nur Sprünge und Schnitte (§ 1).

Wir untersuchen nun die Elemente von N und wollen insbesondere zeigen, daß die beiderseitigen Grenzelemente nur solche Charaktere haben, die in W vorkommen. Eine Verbindung X besteht entweder aus lauter beweglichen Elementen oder sie ist, wenn $x_{\varrho+1}$ das erste gebundene Element ist (das nach (2) keiner Limesstelle entspricht und nach (1) auch nicht x_0 ist), von der Form

$$X^\varrho + x_\varrho + p + p + \cdots;$$

im ersten Fall sind alle Elemente von X, im zweiten alle Elemente von X^ϱ zugleich innere Elemente ihrer Mengen und haben mindestens ein konsekutives Element.

Wenn alle Elemente von X beweglich sind, so ist X oberer Limes einer argumentalen ω_σ-Reihe, z. B. der aus den sämtlichen Verbindungen

$$A(\varrho) = X^\varrho + a_\varrho + p + p + \cdots$$

bestehenden Reihe, wo $a_\varrho (< x_\varrho)$ das erste Element des für x_ϱ zulässigen Intervalls ist. Ebenso ist X unterer Limes argumentaler ω_σ^*-Reihen, also ein $c_{\sigma\sigma}$-Element.

Der zweite Fall

$$X = X^\varrho + x_\varrho + p + p + \cdots$$

spaltet sich in verschiedene Unterfälle, insofern x_ϱ beiderseitiges Grenzelement oder Randelement seines Intervalls sein kann.

(a) x_ϱ sei beiderseitiges Grenzelement, vom Charakter $c_{\alpha\beta}$. *Dieser Charakter gehört zu W,* denn die $c_{\alpha\beta}$-Elemente gehören dem Bestandteil $\Phi = \Sigma\varphi_{\alpha\beta}$ an und zwar ist das in

$$\varphi_{\alpha\beta} = \omega_\alpha + 1 + \omega_\beta^*$$

von ω_α, ω_β^* eingeschlossene Element das einzige $c_{\alpha\beta}$-Element. Da die Summe Φ sich nur über die Charaktere von W erstreckt, so ist die Behauptung richtig. Da nun den Basisreihen, die das Element x_ϱ einschließen, basische Reihen entsprechen, die den Inbegriff der mit $X^\varrho + x_\varrho$ beginnenden Verbindungen einschließen, und X das einzige Element dieses Inbegriffs ist, so ist auch X in N ein $c_{\alpha\beta}$-Element, vom gleichen Charakter wie x_ϱ.

(b) x_ϱ sei Randelement; es genügt den Fall zu prüfen, daß es das *erste* Element a_ϱ seines Intervalls ist, also

$$X = X^\varrho + a_\varrho + p + p + \cdots.$$

Hier haben wir zunächst zu unterscheiden, ob ϱ Limeszahl ist oder einen Vorgänger hat (den Fall $\varrho = 0$, wo X das erste Element von N ist, können wir sofort beiseite lassen).

(ba) ϱ sei Limeszahl, mit ω_τ konfinal $(\omega_\tau < \omega_\sigma)$. Das Element X, als erste der mit X^ϱ beginnenden Verbindungen, ist dann oberer Limes

einer argumentalen ω_τ-Reihe. In diesem Fall hatte nun nach (2) x_ϱ das Intervall $\mu(\beta_\tau, \alpha_\tau)$ zu durchlaufen, dessen erstes Element a_ϱ also unterer Limes einer Basisreihe vom Typus $\omega^*_{\beta_\tau}$ ist. Dieser Basisreihe entspricht eine basische $\omega^*_{\beta_\tau}$-Reihe, der unmittelbar die Gesamtheit der mit $X^\varrho + a_\varrho$ beginnenden Verbindungen, d. h. aber die einzige Verbindung X vorhergeht; X ist also unterer Limes einer basischen $\omega^*_{\beta_\tau}$-Reihe und demnach ein $c_{\tau\beta_\tau}$-Element.

(bb) ϱ habe einen Vorgänger $\varrho - 1$; indem wir ϱ durch $\varrho + 1$ ersetzen, schreiben wir nun

$$X = X^\varrho + x_\varrho + a_{\varrho+1} + p + p + \cdots,$$

wo x_ϱ (wie alle Elemente von X^ϱ) inneres Element seines Intervalls ist und mindestens einen Nachbar hat. Dieser Fall spaltet sich noch einmal: x_ϱ kann in seiner Menge oberes Grenzelement sein oder einen linken Nachbar haben.

(bba) x_ϱ sei ω_α-Element, hat aber dann einen rechten Nachbar. Der Basisreihe vom Typus ω_α, deren Limes x_ϱ ist, entspricht eine basische ω_α-Reihe, deren Limes X ist (als erste der mit $X^\varrho + x_\varrho$ beginnenden Verbindungen). Nun hatte hier, nach (5), $x_{\varrho+1}$ die Menge $\mu(\beta_\alpha, \sigma)$ zu durchlaufen, deren erstes Element $a_{\varrho+1}$ also $\omega^*_{\beta_\alpha}$-Limes ist, und wie in (ba) folgt daraus, daß X unterer Limes einer basischen $\omega^*_{\beta_\alpha}$-Reihe, also $c_{\alpha\beta_\alpha}$-Element in N ist.

(bbb) x_ϱ habe einen linken Nachbar y_ϱ, der wie x_ϱ inneres Element seines Intervalls ist. Unmittelbar vor X befindet sich dann der Inbegriff der mit $X^\varrho + y_\varrho$ beginnenden Verbindungen $X^\varrho + y_\varrho + y_{\varrho+1} + \cdots$, und wenn $b_{\varrho+1}$ das letzte Element des für $y_{\varrho+1}$ verfügbaren Intervalls ist, so ist das Element

$$Y = X^\varrho + y_\varrho + b_{\varrho+1} + p + p + \cdots$$

unmittelbarer Vorgänger von X (die Menge N enthält also wirklich Sprünge). Nun hatte in diesem Fall $x_{\varrho+1}$ nach (6) (7) ein Intervall $\mu(\sigma, \alpha_\beta)$ oder $\mu(\sigma, \sigma)$, ebenso $y_{\varrho+1}$ nach (5) (7) ein Intervall $\mu(\beta_\alpha, \sigma)$ oder $\mu(\sigma, \sigma)$ zu durchlaufen, und es ist jedenfalls $a_{\varrho+1}$ ein ω^*_σ-Limes, $b_{\varrho+1}$ ein ω_σ-Limes seines Intervalles. Demnach ist X wieder unterer Limes einer basischen ω^*_σ-Reihe, Y oberer Limes einer basischen ω_σ-Reihe, also von den beiden konsekutiven Elementen Y, X das linke ω_σ-Element, das rechte ω^*_σ-Element.

Wir haben damit den Fall erledigt, daß in X das letzte bewegliche Element das linke Randelement seines Intervalls ist; die entsprechende Behandlung für ein rechtes Randelement kann unterbleiben. Das Resultat der etwas verzweigten Kasuistik ist dies: die Menge N ist lückenfrei und die Charaktere ihrer beiderseitigen Grenzelemente gehören zu W; außer-

dem enthält N noch einseitige Grenzelemente, nämlich zwei Randelemente und Paare konsekutiver Elemente, von denen jeweils das linke ω_σ-Element, das rechte ω_σ^*-Element ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß N *alle* $c_{\alpha\beta}$-Elemente aus W enthält und zwar innerhalb jeder (nicht verschwindenden) Mittelstrecke. Seien

$$X = X^\varrho + x_\varrho + X_\varrho, \quad Y = X^\varrho + y_\varrho + Y_\varrho, \quad x_\varrho > y_\varrho$$

zwei nicht konsekutive Verbindungen, mit der Differenzstelle ϱ. *Sind* x_ϱ, y_ϱ *nicht konsekutiv*, so liegt zwischen ihnen ein Element u_ϱ, das nicht beiderseitiges Grenzelement ist, und zwischen X, Y liegt die Gesamtheit der mit $X^\varrho + u_\varrho$ beginnenden Verbindungen U. Hier durchläuft das nächste Element $u_{\varrho+1}$ irgend eine Menge $\mu(\beta, \alpha)$; diese enthält den Bestandteil Φ, und Φ enthält alle $c_{\alpha\beta}$-Elemente aus W. Wenn aber $u_{\varrho+1}$ ein $c_{\alpha\beta}$-Element ist, so ist nach (a) die Verbindung

$$U = X^\varrho + u_\varrho + u_{\varrho+1} + p + p + \cdots$$

in N ein $c_{\alpha\beta}$-Element; also liegen zwischen X, Y $c_{\alpha\beta}$-Elemente aller vorgeschriebenen Charaktere. *Sind* x_ϱ, y_ϱ *konsekutiv*, so seien

$$A = X^\varrho + x_\varrho + a_{\varrho+1} + p + p + \cdots, \quad B = X^\varrho + y_\varrho + b_{\varrho+1} + p + p + \cdots$$

bzw. das erste der mit $X^\varrho + x_\varrho$ und das letzte der mit $X^\varrho + y_\varrho$ beginnenden Elemente, so daß A, B konsekutive Verbindungen und

$$Y \leqq B < A \leqq X,$$

aber nicht gleichzeitig $X = A$, $Y = B$ ist. Ist also etwa $A < X$, so liegt zwischen $a_{\varrho+1}$ und $x_{\varrho+1}$, die nicht konsekutiv sind, ein Element $u_{\varrho+1}$, das nicht beiderseitiges Grenzelement ist, und zwischen A, X oder Y, X liegt die Gesamtheit der mit $X^\varrho + x_\varrho + u_{\varrho+1}$ beginnenden Verbindungen, in bezug auf die sich der obige Schluß wiederholt.

Lassen wir nun endlich die Paare konsekutiver Elemente von N in je ein Element (das dadurch ein $c_{\sigma\sigma}$-Element wird) zusammenfallen und tilgen die Randelemente, so geht N über in eine unbegrenzte, dichte, lückenfreie, also stetige Menge N', die nur die Elementcharaktere aus W und sie alle innerhalb jeder Mittelstrecke enthält, also eine irreduzible η-Menge der Spezies $(W, 0)$. Damit ist der Satz XVII bewiesen.

Die so konstruierte Menge hat, als Teilmenge der Vollpotenz $\mu((\omega_\sigma))$, die Mächtigkeit $\leqq \aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$, und zwar hat sie genau die Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$, denn wenn man nur die Verbindungen mit lauter beweglichen Elementen betrachtet, so durchläuft schon in diesen jedes x_ϱ eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}$. Wir werden sehen (§ 24), daß eine geringere Mächtigkeit als $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$ bei unseren Voraussetzungen nicht möglich ist.

Aus unseren letzten Überlegungen ging hervor, daß die Menge P derjenigen Verbindungen $X^\varrho + x_\varrho + p + p + \cdots$, wo x_ϱ ein $c_{\alpha\beta}$-Element

seines Intervalls ist, in N' relativ dicht ist. Erinnern wir uns wieder, daß die gegenseitige Relation verschiedener variabler Faktoren $M(X^\varrho)$ keine Rolle spielt, so hindert uns nichts, unter p ein Element der Menge $\mu = \mu(\lambda-1, \varkappa-1)$ selber zu verstehen, gleichviel welches; dann wird P Teilmenge derjenigen Belegungsmenge von ω_σ mit μ, wo von p verschiedene Elemente nur in einer Stellenmenge $< \omega_\sigma$ auftreten, d. h. der Potenz $(1+\sigma)^{\text{ter}}$ Klasse $\mu(\omega_\sigma)_p^\sigma$ mit dem Hauptelement p (§ 13). (Um Mißverständnisse zu vermeiden: diese Potenz, nicht aber der Typus von P, hängt natürlich davon ab, welches Element von μ wir mit p identifizieren.) Wir merken uns also für das Folgende (§ 25), daß wir hier eine irreduzible Menge der Spezies $(W, 0)$ konstruiert haben, in der eine Teilmenge der Potenz $\mu(\omega_\sigma)_p^\sigma$ *mit zerstreuter Basis* μ relativ dicht ist.

Endlich wollen wir nicht unterlassen hervorzuheben, daß die allgemeine Konstruktionsmethode dieses Paragraphen in besonderen Fällen natürlich wesentlicher Vereinfachung fähig sein kann; für manche Spezies genügen statt der Produkte mit variablen Faktoren gewöhnliche Produkte mit festen Faktoren, häufig sogar Potenzen, sei es Vollpotenzen oder solche von niederer Klasse. Auch kann man unstetige Typen direkt zu bilden versuchen, ohne den in § 19 vorgezeichneten Umweg über die stetigen Typen desselben Geschlechts einzuschlagen. Verschiedene Spezialforschungen nach dieser Richtung finden sich in meinen eingangs zitierten „Untersuchungen über Ordnungstypen“.

§ 22.

Anzahl der Geschlechter und Spezies.

Durch die Sätze XVI, XVII ist der Existenzbeweis für (irreduzible) Typen jeder Spezies geführt, deren Charaktermenge W vollständig ist und Nichtlimeszahlen $\varkappa$, λ zu Randzahlen hat. Die Tragweite dieses fundamentalen Ergebnisses wird durch eine Abzählung der niedrigsten Fälle klar werden.

Aus W erhält man alle zugehörigen Spezies (U, V), indem man wie in § 19 W auf alle möglichen Weisen in drei Teilmengen W_0, W_1, W_2 spaltet, den einen Fall $0, 0, W$ ausgenommen. Die Anzahl der Spezies zu einem vorgeschriebenen W, das n Charaktere enthält, ist also $3^n - 1$, wo n endlich oder ein Alef sein kann.

Die Anzahl der vollständigen Charaktermengen von n Charakteren, mit den Randzahlen $\varkappa, \lambda$, sei

$$\varphi(\varkappa, \lambda, n) = \varphi(\lambda, \varkappa, n);$$

dann ist die Anzahl der Geschlechter

$$G(\varkappa, \lambda) = \sum_n \varphi(\varkappa, \lambda, n)$$

und die der Spezies

$$S(\varkappa, \lambda) = \sum_n \varphi(\varkappa, \lambda, n) \cdot (3^n - 1).$$

Wir setzen, wie früher, $\varkappa \geqq \lambda$ voraus und nennen k, l die Mächtigkeiten von $\varkappa, \lambda$ $(k \geqq l)$. Das Tableau $\mathfrak{W}$ hat dann in jedem Falle k Zeilen (obwohl für transfinites $\varkappa$ denjenigen Zahlen $\alpha < \varkappa$, die zu singulären ω_α gehören, keine Zeilen entsprechen) und l Spalten.

Eine stets existierende vollständige Charakterenmenge ist die Gesamtmenge $\mathfrak{W}$ mit kl Charakteren; es ist also

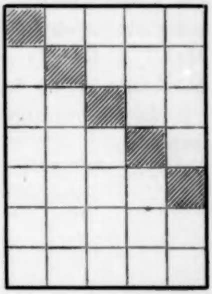
$$S(\varkappa, \lambda) \geqq 3^{kl} - 1.$$

Ist also auch nur eine der Randzahlen transfinit, so ist die Anzahl der Spezies $\geqq 3^{\aleph_0}$, mindestens gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.

Denkt man sich ferner die erste Zeile und erste Spalte zu W gehörig, so ist W sicher vollständig, gleichviel welche Teilmenge des übrig bleibenden Tableaus (von $k-1$ Zeilen und $l-1$ Spalten) noch zu W gerechnet wird. Also ist

$$G(\varkappa, \lambda) \geqq 2^{(k-1)(l-1)}.$$

Ist die eine Randzahl $\varkappa$ transfinit und die andere $\lambda > 1$, so ist auch die Anzahl der Geschlechter $\geqq 2^{\aleph_0}$, mindestens gleich der Mächtigkeit des Kontinuums; für $\lambda = 1$ ist immer nur ein Geschlecht vorhanden.



Etwas genauer wollen wir den Fall *endlicher Randzahlen* behandeln. Um eine vollständige Charakterenmenge von n Elementen zu erhalten, hat man also ein rechteckiges Brett von $\varkappa \cdot \lambda$ Feldern mit n Steinen derart zu besetzen, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in der einen (schraffierten) Diagonale mindestens ein Stein steht. Führen wir für die Anzahl $\varphi(\varkappa, \lambda, n)$ dieser Stellungen die erzeugende Funktion

$$\Phi(\varkappa, \lambda, x) = \sum_n \varphi(\varkappa, \lambda, n)\, x^n$$

ein, so lehrt eine Untersuchung, von der wir hier nur das Resultat angeben wollen, daß das Polynom Φ durch folgende, immer unter der Voraussetzung $\varkappa \geqq \lambda$ gültige Formeln definiert ist:

$$\Phi(\varkappa, \lambda, x)$$

$$= F(\varkappa,\lambda,x) - \lambda F(\varkappa,\lambda-1,x) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} F(\varkappa,\lambda-2,x) - \cdots + (-1)^{\lambda-1} \cdot \lambda F(\varkappa,1,x);$$

$$F(\varkappa, \lambda, x) = [(1+x)^\lambda - 1]^\varkappa - [(1+x)^{\lambda-1} - 1]^\lambda [(1+x)^\lambda - 1]^{\varkappa-\lambda}.$$

Die Hilfsfunktion

$$F(\varkappa, \lambda, x) = \sum_n f(\varkappa, \lambda, n)\, x^n$$

ist erzeugende Funktion für die Anzahl $f(\varkappa, \lambda, n)$ der Stellungen, in denen jede Zeile und die Diagonale mit mindestens einem Stein besetzt ist.

Hiermit lassen sich die Funktionen $\Phi(\varkappa, \lambda, x) = \Phi(\lambda, \varkappa, x)$ für jedes Zahlenpaar $\varkappa, \lambda$ berechnen und geben unmittelbar die Anzahl der Geschlechter und Spezies, nämlich

$$G(\varkappa, \lambda) = \Phi(\varkappa, \lambda, 1),$$
$$S(\varkappa, \lambda) = \Phi(\varkappa, \lambda, 3) - \Phi(\varkappa, \lambda, 1).$$

Für die niedrigsten Fälle erhält man

$\varkappa$	λ	$G(\varkappa, \lambda)$	$S(\varkappa, \lambda)$
1	1	1	2
2	1	1	8
2	2	6	192
3	1	1	26
3	2	22	3164
3	3	247	236786

Von dichten Mengen mit abzählbaren Reihen gibt es also nur ein Geschlecht $(c_{00}, 0)$ mit zwei Spezies $(c_{00}, 0)$ und (c_{00}, c_{00}), vertreten durch das Kontinuum und die Menge der rationalen Zahlen. Von dichten Typen, innerhalb deren Reihen bis zur zweiten Mächtigkeit vorkommen, gibt es $G(1,1) + G(1,2) + G(2,1) + G(2,2) = 9$ Geschlechter mit 210 Spezies; bei Reihen bis zur dritten Mächtigkeit 302 Geschlechter mit 243376 Spezies.

In den niedrigsten Fällen gibt es folgende vollständige Charakterenmengen:

$\varkappa$	λ	W
1	1	c_{00}
1	2	$c_{00}\ c_{01}$
2	1	$c_{00}\ c_{10}$
2	2	$c_{00}\ c_{11}$ $c_{00}\ c_{01}\ c_{10}$ $c_{00}\ c_{01}\ c_{11}$ $c_{00}\ c_{10}\ c_{11}$ $c_{01}\ c_{10}\ c_{11}$ $c_{00}\ c_{01}\ c_{10}\ c_{11}$

aus denen man sämtliche 210 Spezies von Typen mit Reihen bis zur

zweiten Mächtigkeit unmittelbar hinschreiben kann, z. B. die acht Spezies des Geschlechts $W = c_{00}c_{11}$:

$$(c_{00}, c_{11}) \quad (c_{00}, c_{00}c_{11}) \quad (c_{11}, c_{00}) \quad (c_{11}, c_{00}c_{11})$$
$$(c_{00}c_{11}, 0) \quad (c_{00}c_{11}, c_{00}) \quad (c_{00}c_{11}, c_{11}) \quad (c_{00}c_{11}, c_{00}c_{11}).$$

§ 23.

e_π-Mengen.

Für die Beschaffenheit, insbesondere die Mächtigkeit einer η-Menge M sind außer den Randzahlen $\varkappa, \lambda$ (den Indizes der ersten innerhalb M, M^* nicht enthaltenen regulären Anfangszahlen $\omega_\varkappa, \omega_\lambda$) noch gewisse andere Zahlen $\mu, \nu, \pi, \varrho, \sigma$ von Bedeutung, die, sämtlich als Indizes *regulärer* Anfangszahlen, folgendermaßen definiert sind:

M ist mit ω_μ konfinal und mit ω_ν^* koinitial.

$c_{\sigma\sigma}$ ist der niedrigste *symmetrische* Charakter der Menge M, die demnach weder Elemente noch Lücken der Charaktere $c_{00}c_{11}\cdots c_{\alpha\alpha}\cdots (\alpha < \sigma)$ enthält.

Ist wie früher

$$U = \{c_{\alpha\beta}\}, \quad V = \{c_{\gamma\delta}\}$$

die Menge der Element- bzw. Lückencharaktere, und ε das Maximum der beiden Zahlen γ, δ, so soll ϱ das Minimum sämtlicher Zahlen $\alpha, \beta, \varepsilon$ sein,

$$\alpha \geqq \varrho, \quad \beta \geqq \varrho, \quad \varepsilon \geqq \varrho,$$

wobei mindestens in einer dieser sämtlicher Formeln das Gleichheitszeichen gilt.

Endlich ist π das Minimum der drei Zahlen μ, ν, ϱ.

Wir wollen der Kürze halber M eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge, eine d_ϱ-Menge, eine e_π-Menge nennen. Die Zahlen $\varkappa, \lambda, \sigma$ sind dem Geschlecht, die Zahl ϱ der Spezies, die Zahlen μ, ν, π der einzelnen Menge eigentümlich. Es bestehen, wenn wir wieder $\varkappa \geqq \lambda$ voraussetzen, die Ungleichungen

$$\pi \leqq \varrho \leqq \sigma < \lambda \leqq \varkappa,$$
$$\pi \leqq \mu \leqq \varkappa, \quad \pi \leqq \nu \leqq \lambda.$$

Für eine stetige Menge ist offenbar $\varrho = \pi = 0$, sie ist also eine d_0- und e_0-Menge.

Ist M' eine Strecke oder ein unbegrenztes Stück von M, so ist M' von niederer (§ 18) oder gleicher Spezies wie M und daher

$$\varkappa' \leqq \varkappa, \quad \lambda' \leqq \lambda, \quad \varrho' \geqq \varrho, \quad \sigma' \geqq \sigma.$$

Ist M' insbesondere eine *Mittelstrecke* von M, so treten dazu die Ungleichungen

$$\mu' \geqq \varrho, \quad \nu' \geqq \varrho, \quad \pi' \geqq \varrho.$$

Zwei benachbarte Teilmengen (§ 1) einer d_ϱ-Menge sind niemals gleichzeitig $< \aleph_\varrho$, die größere von beiden also immer $\geqq \aleph_\varrho$ und in mindestens einem Falle genau $= \aleph_\varrho$. Bei einer e_π-Menge ist die größere von zwei benachbarten Teilmengen, sowie jede Menge, mit der M konfinal oder koinitial ist, $\geqq \aleph_\pi$ und in mindestens einem Falle genau $= \aleph_\pi$.

Stellen wir noch folgende Definition auf:

Eine η-Menge heißt eine η_τ-Menge, wenn sie mit keiner Menge $< \aleph_\tau$ konfinal oder koinitial ist und kein Paar benachbarter Teilmengen $< \aleph_\tau$ enthält,

wobei τ nicht notwendig der Index einer regulären Anfangszahl sein muß, so ist diese Bedingung für $\tau \leqq \pi$ erfüllt. Jede e_π-Menge ist also zugleich $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_\pi$-Menge und für jede η_τ-Menge ist ihr π-Index $\pi \geqq \tau$. Die η_0-Mengen sind mit den η-Mengen, den dichten unbegrenzten Mengen selber, identisch. Für singuläres ω_τ ist eine η_τ-Menge zugleich $\eta_{\tau+1}$-Menge. Jede Mittelstrecke einer d_ϱ-Menge ist eine η_ϱ-Menge.

Beispiel. Unter den η-Mengen mit Reihen bis zur zweiten Mächtigkeit gibt es nur ein Geschlecht mit c_{11}-Mengen, nämlich $W = c_{01}c_{10}c_{11}$. Die d_1-Mengen dieses Geschlechtes gehören den Spezies an, wo $U = c_{11}$, also den beiden Spezies

$$(c_{11}, c_{01}c_{10}) \quad \text{und} \quad (c_{11}, c_{01}c_{10}c_{11}).$$

Die Mengen dieser Spezies können noch e_0- oder e_1-Mengen sein, ihre Mittelstrecken sind sicher e_1-Mengen oder η_1-Mengen.

Wir beweisen zunächst folgende Sätze:

Satz XVIII. *Eine e_π-Menge enthält jede beliebige geordnete Menge der Mächtigkeit $\leqq \aleph_\pi$ als Teilmenge.*

Satz XIX. *Es gibt höchstens einen e_π-Typus der Mächtigkeit $\aleph_\pi$.*

Es sei A eine geordnete Menge der Mächtigkeit $\leqq \aleph_\pi$, wir können ihren Elementen also eine Wohlordnung

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_\alpha \cdots \qquad (\alpha < \omega_\pi)$$

erteilen. M sei eine e_π-Menge, und es sollen allen Elementen a_α solche Elemente $\varphi(a_\alpha)$ aus M zugeordnet werden, daß $\varphi(a_\alpha)$ zu $\varphi(a_\beta)$ in M dieselbe Rangordnung hat wie a_α zu a_β in A. Daß dies möglich ist, beweisen wir durch Induktion: wenn alle Elemente von $A^\alpha = \{a_\xi\}$, $\xi < \alpha$, abgebildet sind, so ist auch eine Abbildung von a_α möglich. In der Tat werde A^α durch a_α in die beiden Summanden $A_1^\alpha + A_2^\alpha$ zerlegt, d. h.

$$A_1^\alpha < a_\alpha < A_2^\alpha \text{ in } A,$$

deren einer auch Null sein kann. Die bereits gefundene Bildmenge $\varphi(A^\alpha)$ zerfällt entsprechend in $\varphi(A_1^\alpha) + \varphi(A_2^\alpha)$; die Mächtigkeit dieser Mengen ist $< \aleph_\pi$, und da M keine zwei benachbarten Mengen $< \aleph_\pi$ enthält, noch

mit einer solchen Menge konfinal oder koinitial ist, so existiert stets ein Element m, für welches

$$\varphi(A_1^\alpha) < m < \varphi(A_2^\alpha)$$

(bzw. $m \gtrless \varphi(A^\alpha)$, falls einer der Summanden verschwindet), und das demnach als $\varphi(a_\alpha)$ gewählt werden kann. Damit ist der Satz XVIII bewiesen. Die verbleibende Unbestimmtheit in der Wahl der Abbildung kann in bekannter Weise durch eine Wohlordnung

$$m_0 m_1 m_2 \cdots m_\beta \cdots$$

der Menge M gehoben werden, indem man für $\varphi(a_\alpha)$ jeweils unter den verfügbaren Elementen m_β das mit niedrigstem Index nimmt. Dies läßt sich so ausdrücken: für jeden Index α gibt es Teilmengen

$$M^\alpha = (m_{\beta_0} m_{\beta_1} \cdots m_{\beta_\xi} \cdots), \qquad (\xi < \alpha),$$

die mit A^α ähnlich sind, wenn m_{β_ξ} dem a_ξ zugeordnet wird; man denke sich (für bestimmtes α) die M^α *nach ersten Differenzen* der Nummernsysteme $\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_\xi \cdots$ geordnet und nehme unter ihnen das niedrigste; dann ist die Vereinigungsmenge aller dieser niedrigsten M^α die gesuchte Bildmenge $\varphi(A)$.

Seien jetzt

$$A\colon\ a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_\alpha \cdots \quad (\alpha < \omega_\pi)$$
$$B\colon\ b_0\, b_1\, b_2 \cdots b_\beta \cdots \quad (\beta < \omega_\pi)$$

zwei in wohlgeordneter Form geschriebene e_π-Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\pi$ und bilden wir in der eben präzisierten Weise A auf eine Teilmenge $\varphi(A)$ von B ab, so behaupten wir, daß $\varphi(A) = B$, daß also A auf die ganze Menge B ähnlich abgebildet wird. Wir beweisen dies wieder durch Induktion: wenn alle Elemente von $B^\beta = \{b_\eta\}$, $\eta < \beta$, in $\varphi(A)$ enthalten sind, so ist auch b_β in $\varphi(A)$ enthalten. Es sei α der (auf Grund der Voraussetzung, daß ω_π regulär ist, sicher existierende) kleinste Index, für den B^β in $\varphi(A^\alpha)$ enthalten ist; entweder ist dann auch b_β in $\varphi(A^\alpha)$ enthalten oder es ist b_β das niedrigste Element von B, das in $\varphi(A^\alpha)$ nicht enthalten ist. Im letzten Fall, der allein zu diskutieren bleibt, bewirkt b_β in B eine Zerlegung $\varphi(A^\alpha) = \varphi(A_1^\alpha) + \varphi(A_2^\alpha)$, d. h.

$$\varphi(A_1^\alpha) < b_\beta < \varphi(A_2^\alpha) \text{ in } B.$$

Dann ist auch $A^\alpha = A_1^\alpha + A_2^\alpha$ in A. Da nun A eine e_π-Menge ist, so gibt es sicher Elemente a zwischen A_1^α, A_2^α, und es sei a_γ $(\gamma \geqq \alpha)$ das niedrigste Element, für welches

$$A_1^\alpha < a_\gamma < A_2^\alpha \text{ in } A.$$

Für die Menge A^γ aller Elemente mit kleinerer Nummer $(< \gamma)$ bewirkt a_γ die Zerlegung

$$A_1^\gamma < a_\gamma < A_2^\gamma \text{ in } A,$$

und dann ist offenbar A_1^ζ mit seiner Teilmenge A_1^α konfinal, A_2^ζ mit A_2^α koinitial, denn andernfalls wäre a_γ nicht das früheste Element zwischen A_1^α, A_2^α. Es ist dann wiederum $\varphi(A_1^\zeta)$ mit $\varphi(A_1^\alpha)$ konfinal, $\varphi(A_2^\zeta)$ mit $\varphi(A_2^\alpha)$ koinitial, also

$$\varphi(A_1^\zeta) < b_\beta < \varphi(A_2^\zeta) \text{ in } B.$$

Hieraus folgt aber, daß b_β das Element b mit niedrigster Nummer ist, das zu $\varphi(A^\gamma)$ dieselbe Lage hat wie a_γ zu A^γ, d. h. es ist b_β als Bild von a_γ zu wählen, $b_\beta = \varphi(a_\gamma)$, und b_β demnach in $\varphi(A^{\gamma+1})$ enthalten. Es braucht nicht bemerkt zu werden, daß wieder einer der Summanden von A^α verschwinden kann, wodurch die Betrachtung sich entsprechend vereinfacht.

Die beiden e_π-Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\pi$ sind also ähnlich, womit der Satz XIX bewiesen ist. Ob es aber überhaupt eine e_π-Menge der Mächtigkeit $\aleph_\pi$ oder nur solche $> \aleph_\pi$ gibt, bleibt damit unentschieden (vgl. § 24).

In den Sätzen XVIII und XIX kann η_π-Menge, η_π-Typus statt e_π-Menge, e_π-Typus gesetzt werden.

§ 24.

$e_{\sigma\sigma}$-Mengen.

Unter den Ordnungszahlen wollen wir die *geraden* 2ξ und die *ungeraden* $2\xi + 1$ unterscheiden, so daß jede Limeszahl gerade ist. Wir betrachten eine Menge N vom Typus $\omega_\beta^* + \omega_\alpha$ (welche Anfangszahlen nicht notwendig regulär sein sollen) und schreiben ihre Elemente in der Form

$$\cdots q_\eta \cdots q_2 q_1 p_0 p_1 p_2 \cdots p_\xi \cdots \qquad (\xi < \omega_\alpha,\ \eta < \omega_\beta).$$

Die Elemente mit gerader Nummer nennen wir gerade Elemente, die mit ungerader Nummer ungerade Elemente; es sind also

$$\begin{aligned}\text{gerade Elemente:} &\cdots q_{\omega+2}\, q_\omega \;\cdots q_4 q_2 p_0 p_2 p_4 \cdots p_\omega\, p_{\omega+2} \;\cdots\\ \text{ungerade Elemente:} &\cdots q_{\omega+3}\, q_{\omega+1} \cdots q_3 q_1 p_1 p_3 \;\cdots p_{\omega+1} p_{\omega+3} \cdots.\end{aligned}$$

Jedes ungerade Element hat zwei unmittelbare Nachbarn, Vorgänger und Nachfolger.

Nun betrachten wir Belegungen von ω_σ mit der Basis N

$$X = x_0 + x_1 + \cdots + x_\gamma + \cdots = X^\gamma + x_\gamma + X_\gamma \quad (\gamma < \omega_\sigma)$$

unter der Beschränkung, daß auf ein gerades Element $x_\gamma = p_{2\xi}, q_{2\eta}$ stets $x_{\gamma+1} = p_0 = p$ folgen soll. Eine Belegung hat entweder ein erstes gerades Element x_γ und ist von der Form

$$X(\gamma) = X^\gamma + x_\gamma + p + p + \cdots, \quad \gamma < \omega_\sigma,$$

wo alle Elemente von X^γ ungerade sind (und schon $x_\gamma = p$ sein kann),

oder sie enthält lauter ungerade Elemente und möge dann mit X bezeichnet werden. Sodann sei $R(\gamma)$ die Menge aller Belegungen $X(\gamma)$ mit erstem geradem Element an der Stelle γ, R die Menge aller Belegungen X ohne gerade Elemente, $S(\delta)$ die Menge aller Belegungen $X(\gamma)$ für $\gamma < \delta$, also

$$S(\delta) = \{R(0)\,R(1)\,R(2)\cdots R(\gamma)\cdots\}, \quad (\gamma<\delta),$$

insbesondere $S(\omega_\sigma)$ die Menge aller Belegungen, die gerade Elemente enthalten, und $S = (S(\omega_\sigma)R)$ die Menge aller zulässigen Belegungen. Alle diese Mengen sind Teilmengen der *Vollpotenz* $N(\!(\omega_\sigma)\!)$ und sollen nach ersten Differenzen geordnet sein. Wir behaupten nun:

Satz XX. *Eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge, die in jeder Mittelstrecke eine ω_α-Reihe und eine ω_β^*-Reihe enthält, enthält eine zu $S(\omega_\sigma)$ ähnliche Teilmenge und, falls sie frei von $c_{\sigma\sigma}$-Lücken ist, eine zu S ähnliche Teilmenge.*

Um zu zeigen, daß eine zu $S(\omega_\sigma)$ ähnliche Teilmenge $\varphi S(\omega_\sigma)$ von M existiert, haben wir allen Belegungen $X(\gamma)$ geeignete Bilder $\varphi X(\gamma)$ zu suchen; wir beweisen, daß dies für alle Elemente von $R(\delta)$ möglich ist, wenn es für alle vorangehenden Elemente, also die von $S(\delta)$, bereits geschehen ist. Verstehen wir unter $R(\delta, X^\delta)$ die Menge derjenigen

$$X(\delta) = X^\delta + x_\delta + p + p + \cdots,$$

die mit einem bestimmten Komplex X^δ anfangen, sich also nur in den Werten von x_δ unterscheiden, so liegt zwischen je zwei solchen Belegungen keine Belegung aus $S(\delta)$, jedes Element von $S(\delta)$ ist also $\lessgtr R(\delta, X^\delta)$, und es zerfällt $S(\delta)$ hierdurch in

$$S(\delta) = S_1(\delta, X^\delta) + S_2(\delta, X^\delta),$$

derart daß $R(\delta, X^\delta)$ zwischen beiden Summanden liegt. Andrerseits: zwei Belegungen $X(\delta)$, $Y(\delta)$, die nicht zu demselben $R(\delta, X^\delta)$ gehören, sondern eine frühere Differenzstelle γ haben, sind sicher durch ein Element aus $S(\delta)$ getrennt; denn ist

$$X(\delta) = X^\gamma + x_\gamma + X_\gamma, \quad Y(\delta) = X^\gamma + y_\gamma + Y_\gamma, \quad \begin{pmatrix} x_\gamma < y_\gamma \\ \gamma < \delta \end{pmatrix}$$

so sind x_γ, y_γ beide ungerade und sicher durch ein gerades Element, etwa das auf x_γ nächstfolgende $\overset{+}{x}_\gamma$, getrennt, so daß die Belegung

$$X(\gamma) = X^\gamma + \overset{+}{x}_\gamma + p + p + \cdots$$

zwischen $X(\delta)$ und $Y(\delta)$ liegt. Jedem X^δ entspricht also eine Zerlegung von $S(\delta)$, und zwei verschiedenen X^δ zwei verschiedene Zerlegungen.

Von welcher Art sind nun diese Zerlegungen? Wir behaupten, daß sie entweder einen Sprung oder eine $c_{\tau\tau}$-Lücke ($\tau < \sigma$) von $S(\delta)$ darstellen. Ist nämlich δ keine Limeszahl und > 0, also mit einem Vorgänger $\delta - 1$

versehen, so ist $X^\delta = X^{\delta-1} + x_{\delta-1}$, wo das Element $x_{\delta-1}$ ungerade ist und also zwei gerade Nachbarn $\overset{+}{x}_{\delta-1}$ (Nachfolger) und $\bar{x}_{\delta-1}$ (Vorgänger) hat. Die beiden Belegungen

$$\bar{X}(\delta-1) = X^{\delta-1} + \bar{x}_{\delta-1} + p + p + \cdots,$$
$$\overset{+}{X}(\delta-1) = X^{\delta-1} + \overset{+}{x}_{\delta-1} + p + p + \cdots$$

sind dann Nachbarn aller mit X^δ beginnenden Belegungen, d. h. das letzte Element von $S_1(\delta, X^\delta)$ und das erste von $S_2(\delta, X^\delta)$.

Ist aber δ Limeszahl und mit $\omega_\tau (\tau < \sigma)$ konfinal, so wird die Gesamtheit der mit X^δ beginnenden Belegungen links und rechts unmittelbar begrenzt von zwei *argumentalen* Reihen (§ 17)

$$\bar{X}(\gamma) = X^\gamma + \bar{x}_\gamma + p + p + \cdots \quad (\gamma < \delta)$$
$$\overset{+}{X}(\gamma) = X^\gamma + \overset{+}{x}_\gamma + p + p + \cdots \quad (\gamma < \delta),$$

wo γ eine ω_τ-Reihe von Stellen mit dem Limes δ durchläuft; also ist $S_1(\delta, X^\delta)$ mit ω_τ konfinal und $S_2(\delta, X^\delta)$ mit ω_τ^* koinitial.

Fassen wir zusammen, so ergibt sich: die Menge $R(\delta)$ zerfällt in lauter getrennte Bestandteile $R(\delta, X^\delta)$ vom Typus $\omega_\beta^* + \omega_\alpha$, deren jeder, und zwar immer nur einer, entweder zwischen zwei konsekutiven Elementen oder in einer $c_{\tau\tau}$-Lücke $(\tau < \sigma)$ von $S(\delta)$ liegt. Da nun M als η-Menge keine konsekutiven Elemente und als $c_{\sigma\sigma}$-Menge weder $c_{\tau\tau}$-Lücken noch $c_{\tau\tau}$-Elemente enthält, so läßt jede der fraglichen Zerlegungen der bereits gefundenen Bildmenge $\varphi S(\delta)$ ein noch freies Stück von M zwischen sich, in dem unendlich viele Elemente von M liegen und in dem man auf Grund der weiteren Voraussetzung des Satzes XX eine Reihe vom Typus $\omega_\beta^* + \omega_\alpha$ als Bild von $R(\delta, X^\delta)$ angeben kann. Der Anfang des Verfahrens, dem bisher übergangenen Fall $\delta = 0$ entsprechend, bildet die Fixierung einer beliebigen Reihe $\omega_\beta^* + \omega_\alpha$ in M selbst, als Bild von $R(0)$; die Willkür in der Wahl der Bilder wäre wieder durch eine präliminarische Wohlordnung von M zu beseitigen.

Damit ist die Existenz einer Teilmenge $\varphi S(\omega_\sigma)$ in M bewiesen. Jede Belegung X mit lauter ungeraden Elementen wird nun von zwei argumentalen, zu $S(\omega_\sigma)$ gehörigen Reihen der Typen $\omega_\sigma, \omega_\sigma^*$ eingeschlossen, fällt also in eine $c_{\sigma\sigma}$-Lücke von $S(\omega_\sigma)$ und zwar zwei verschiedene X in zwei verschiedene Lücken. Wenn M also auch keine $c_{\sigma\sigma}$-Lücken enthält, so läßt jede $c_{\sigma\sigma}$-Lücke von $\varphi S(\omega_\sigma)$ mindestens noch ein einziges Element von M zwischen sich, das dem X als Bild zugeordnet werden kann, und M enthält in diesem Falle eine zu $(S(\omega_\sigma), R)$ ähnliche Teilmenge. Damit ist der Satz XX bewiesen.

Hieraus ergeben sich bemerkenswerte Resultate hinsichtlich der unteren Mächtigkeitsgrenze dichter Mengen. In dem Komplex X^δ durchläuft jedes Element die Menge aller ungeraden Elemente von N, die wie N selbst und wie die Menge aller geraden Elemente die Mächtigkeit $\aleph_\alpha + \aleph_\beta$ hat; X^δ durchläuft also eine Menge der Mächtigkeit $(\aleph_\alpha + \aleph_\beta)^d$, wo $d\,(< \aleph_\sigma)$ die Mächtigkeit von $\delta\,(< \omega_\sigma)$ ist, und $X(\delta)$ durchläuft die Menge $R(\delta)$ von der Mächtigkeit $(\aleph_\alpha + \aleph_\beta)^{d+1}$, wogegen eine Belegung X mit lauter ungeraden Elementen die Menge R von der Mächtigkeit $(\aleph_\alpha + \aleph_\beta)^{\aleph_\sigma}$ durchläuft. Verstehen wir für eine beliebige Mächtigkeit a unter $(a)_\sigma$ die Potenzensumme $\sum\limits_{\delta}^{\omega_\sigma} a^d$, erstreckt über die Mächtigkeiten aller Ordnungszahlen $< \omega_\sigma$, wofür man offenbar, $a > 1$ vorausgesetzt, auch

$$(a)_\sigma = \sum_d a^d \qquad (d < \aleph_\sigma)$$

setzen kann, die Summe erstreckt über alle verschiedenen Kardinalzahlen $< \aleph_\sigma$, also

$$(a)_\sigma = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{\aleph_0} + a^{\aleph_1} + \cdots + a^{\aleph_\varrho} + \cdots \quad (\varrho < \sigma),$$

so ist $S(\omega_\sigma)$ von der Mächtigkeit $(\aleph_\alpha + \aleph_\beta)_\sigma$, S von der Mächtigkeit

$$(\aleph_\alpha + \aleph_\beta)_{\sigma+1} = (\aleph_\alpha + \aleph_\beta)^{\aleph_\sigma},$$

und wenn allgemein M eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge, speziell M_1 eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken bezeichnet, so ist

$$M \geqq (\aleph_\alpha + \aleph_\beta)_\sigma, \quad M_1 \geqq (\aleph_\alpha + \aleph_\beta)^{\aleph_\sigma},$$

falls jede Mittelstrecke von M Reihen der Typen ω_α, ω_β^* enthält.

Sicherlich aber enthält M in jeder Mittelstrecke Reihen ω_σ, ω_σ^*, daher gilt unter allen Umständen

$$M \geqq (\aleph_\sigma)_\sigma, \quad M_1 \geqq \aleph_\sigma^{\aleph_\sigma},$$

also der Satz:

Satz XXI. *Die Mächtigkeit einer $c_{\sigma\sigma}$-Menge ist mindestens gleich der Summe aller Potenzen von $\aleph_\sigma$ mit kleineren Exponenten als $\aleph_\sigma$, die einer $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken mindestens gleich $\aleph_\sigma^{\aleph_\sigma}$.*

Z. B. haben alle Mengen des Geschlechts $W = c_{01}c_{10}c_{11}$ mindestens die Mächtigkeit $\aleph_1^{\aleph_0}$ (des Kontinuums) und, falls sie keine c_{11}-Lücken enthalten, mindestens die Mächtigkeit $\aleph_1^{\aleph_1}$.

Für *irreduzible* Mengen lassen sich die Grenzen eventuell hinauftreiben; ist wieder $\varkappa$ die größere Randzahl und $\alpha < \varkappa$, so enthält (auch für singuläres ω_α) jede Mittelstrecke sicher eine ω_α-Reihe, so daß man für $\varkappa = (\varkappa - 1) + 1$ schreiben kann

$$M \geqq (\aleph_{\varkappa-1})_\sigma, \quad M_1 \geqq \aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}.$$

Hieraus erhellt, daß die in § 21 gegebene Konstruktion für eine irreduzible stetige $c_{\sigma\sigma}$-Menge sich mit der kleinstmöglichen Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$ begnügt.

Soll eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\sigma$ sein, so muß $(\aleph_\sigma)_\sigma = \aleph_\sigma$, d. h. $\aleph_\sigma$ der Summe aller seiner Potenzen mit Exponenten unterhalb $\aleph_\sigma$ und jeder dieser Potenzen selbst gleich sein: wir wollen dies die *Cantorsche Alefhypothese* für $\aleph_\sigma$ nennen, da sie im niedrigsten zweifelhaften Falle $\sigma = 1$ in die Kontinuumhypothese $\aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_0}$ übergeht; für $\sigma = 0$ handelt es sich um nichts Hypothetisches, sondern um die wohlbekannte Gleichung

$$\aleph_0 = (\aleph_0)_0 = \aleph_0 + \aleph_0{}^2 + \aleph_0{}^3 + \cdots,$$

und in der Tat gibt es ja sicher einen c_{00}-Typus der Mächtigkeit $\aleph_0$, nämlich η. Für $\sigma = (\sigma - 1) + 1$ lautet die Alefhypothese

$$\aleph_\sigma = \aleph_\sigma^{\aleph_{\sigma-1}} = 2^{\aleph_{\sigma-1}}.$$

Es darf keineswegs vergessen werden, daß wir hier ausschließlich von *regulären* $\aleph_\sigma$ sprechen.*)

Wir werden sogleich sehen, daß die Alefhypothese für $\aleph_\sigma$ auch hinreichend ist zur Existenz von $c_{\sigma\sigma}$-Typen der Mächtigkeit $\aleph_\sigma$, insbesondere eines (und nach XIX eines einzigen) e_σ-Typus dieser Mächtigkeit.

Wir ziehen noch eine weitere Folgerung aus dem Satze XX. Da man in ihm die Basis N stets vom Typus $\omega^* + \omega$ annehmen kann, so enthält jede $c_{\sigma\sigma}$-Menge eine mit $S(\omega_\sigma)$ ähnliche Teilmenge, wo $S(\omega_\sigma)$ die Menge aller Belegungen von ω_σ mit der Menge

$$N: \quad \cdots q_3 q_2 q_1 p p_1 p_2 p_3 \cdots$$

ist, in denen ein erstes gerades Element und sodann lauter Elemente p stehen. Beschränken wir die Basis noch weiter auf nur drei Elemente

$$3: \quad q_1 p p_1$$

und nennen $T(\omega_\sigma)$ die Menge aller Belegungen von ω_σ mit dieser Basis, in denen das mittelste Element p von einer ersten Stelle an ununterbrochen auftritt, also aller Belegungen

$$X(\gamma) = X^\gamma + p + p + \cdots \qquad (\gamma < \omega_\sigma),$$

wo X^γ nur aus p_1, q_1 zusammengesetzt ist, so enthält jede $c_{\sigma\sigma}$-Menge eine zu $T(\omega_\sigma)$ ähnliche Teilmenge (die Belegungsmengen sind natürlich immer nach ersten Differenzen geordnet zu denken). Diese Menge $T(\omega_\sigma)$ ist aber selbst eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge und zugleich eine e_σ-Menge. Sie ist nämlich mit einer argumentalen ω_σ-Reihe $P(0)$, $P(1)$, $\cdots$, $P(\gamma)$, $\cdots$ konfinal, wo in

$$P(\gamma) = P^\gamma + p + p + \cdots$$

*) Für ein singuläres $\aleph_\beta$, dessen Anfangszahl ω_β mit $\omega_\alpha (< \omega_\beta)$ konfinal ist, ist bereits $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} > \aleph_\beta$, wie in naheliegender Verallgemeinerung einer Formel von Herrn J. König (Math. Ann. 60, S. 177—80) geschlossen werden kann; die Alefhypothese kann dann höchstens in der Form $(\aleph_\beta)_\alpha = \aleph_\beta$ ausgesprochen werden.

alle Elemente von P^γ gleich p_1 sind, und entsprechend mit einer argumentalen ω_σ^*-Reihe koinitial; das gleiche gilt von der Gesamtheit aller Belegungen, die mit einem bestimmten X^γ beginnen. Demzufolge bestimmt jede (hier natürlich stets argumentale) ω_τ-Reihe ($\tau < \sigma$) eine $c_{\tau\sigma}$-Lücke, und jede ω_τ^*-Reihe eine $c_{\sigma\tau}$-Lücke, und jedes Element $X(\gamma)$ ist $c_{\sigma\sigma}$-Element, da es von den beiden Mengen der mit $X^\gamma + q_1$ und $X^\gamma + p_1$ beginnenden Belegungen eingeschlossen wird. Überdies sind $c_{\sigma\sigma}$-Lücken vorhanden, da eine (nicht zu $T(\omega_\sigma)$ gehörige) Belegung X mit lauter ungeraden Elementen in dem Falle, daß sowohl p_1 als q_1 darin $\aleph_\sigma$ mal auftreten, von zwei argumentalen Reihen ω_σ, ω_σ^* eingeschlossen wird. Also ist $T(\omega_\sigma)$ eine η-Menge der Spezies $(c_{\sigma\sigma}, \mathfrak{W}_\sigma)$, wo

$$\mathfrak{W}_\sigma = \left\{\begin{matrix} c_{\sigma 0} & c_{\sigma 1} & \cdots & c_{\sigma\tau} & \cdots \\ c_{0\sigma} & c_{1\sigma} & \cdots & c_{\tau\sigma} & \cdots \end{matrix}\right\} c_{\sigma\sigma}, \quad \tau < \sigma$$

die Elemente der σ^{ten} Zeile und Spalte des Tableaus $\mathfrak{W}$ (§ 20) bis zu ihrer Kreuzung umfaßt, und es ist in diesem Falle $\pi = \varrho = \sigma$, d. h. sie ist zugleich eine e_σ-Menge, und zwar, weil in jeder $c_{\sigma\sigma}$-Menge enthalten, eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge und e_σ-Menge kleinstmöglicher Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit ist $(2)_\sigma = (\aleph_\sigma)_\sigma$ und reduziert sich für den Fall der Cantorschen Alefhypothese auf $\aleph_\sigma$, so daß es also dann wirklich einen und nur einen e_σ-Typus der Mächtigkeit $\aleph_\sigma$ gibt.

$T(\omega_\sigma)$ ist offenbar Teilmenge der Potenz $(1+\sigma)^{\text{ter}}$ Klasse

$$\eta_\sigma = 3(\omega_\sigma)_p^\sigma,$$

in der das Hauptelement p das mittelste Element der Basis ist und nur eine Stellenmenge $< \omega_\sigma$ mit den beiden andern Elementen $q_1 p_1$ belegt ist; zu η_σ gehören aber auch solche Belegungen, in denen auf das gerade Element p noch ungerade folgen. Die obigen Bemerkungen über $T(\omega_\sigma)$ gelten aber mutatis mutandis auch für η_σ und zeigen, daß auch diese Menge eine $c_{\sigma\sigma}$- und e_σ-Menge der Spezies $(c_{\sigma\sigma}, \mathfrak{W}_\sigma)$ ist. Überdies ist leicht zu sehen, daß auch η_σ in jeder $c_{\sigma\sigma}$-Menge enthalten ist. Schreiben wir nämlich die Elemente von η_σ als Belegungen von ω_σ mit der Menge $(p_3 p q_3)$, und ersetzen sodann jedes Element p, auf das noch ungerade Elemente folgen, entweder durch p_1 oder q_1, je nachdem p_3 oder q_3 das nächstfolgende ungerade Element ist, so bleibt für die Rangordnung

$$q_3 < q_1 < p < p_1 < p_3$$

die Rangordnung jener Belegungen unverändert, wie man leicht beweist, obwohl die erste Differenzstelle zweier Belegungen dabei nach links rücken kann. Hierdurch wird die genannte Belegungsmenge η_σ mit einer Menge solcher Belegungen von ω_σ mit der Basis

$$5: \quad q_3 q_1 p p_1 p_3$$

ähnlich, wo kein ungerades Element einem geraden folgen darf, also mit einer Teilmenge von $S(\omega_\sigma)$ und demnach jeder $c_{\sigma\sigma}$-Menge.

Wir haben hiermit das Resultat gewonnen:

Satz XXII. *Jede $c_{\sigma\sigma}$-Menge enthält eine Teilmenge vom Typus*

$$\eta_\sigma = 3(\omega_\sigma)_p^\sigma,$$

die eine e_σ- und $c_{\sigma\sigma}$-Menge niedrigster Mächtigkeit von der Spezies $(c_{\sigma\sigma}, \mathfrak{W}_\sigma)$ ist. Falls $\aleph_\sigma$ jeder seiner Potenzen mit kleineren Exponenten gleich ist, so existiert ein und nur ein e_σ-Typus der Mächtigkeit $\aleph_\sigma$, nämlich η_σ.

Die aus XVIII und XXII folgende Tatsache, daß schon jede $c_{\sigma\sigma}$-Menge jede beliebige Menge der Mächtigkeit $\leqq \aleph_\sigma$ als Teilmenge enthält, stellt eine wesentliche Verschärfung des Satzes XIX dar. Z. B. ist eine Menge der Spezies $(c_{01}, c_{10}c_{11})$ selbst nur eine e_0-Menge, enthält aber eine e_1-Menge und damit jeden Typus der Mächtigkeit $\leqq \aleph_1$ als Teilmenge. Auch eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken, die in jeder solchen als Teilmenge enthalten ist und daher die niedrigste Mächtigkeit hat, kann man sofort angeben, indem man die $c_{\sigma\sigma}$-Lücken von η_σ ausfüllt; es entsteht dadurch eine $c_{\sigma\sigma}$- und e_σ-Menge von der Spezies $(c_{\sigma\sigma}, \mathfrak{W}_\sigma - c_{\sigma\sigma})$ und der Mächtigkeit $2^{\aleph_\sigma} = \aleph_\sigma^{\aleph_\sigma}$. Diese Menge, deren Typus λ_σ heiße (λ_0 ist das Linearkontinuum, wie η_0 der Typus η), ist also in jeder $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken enthalten, dagegen nicht in jeder $c_{\sigma\sigma}$-Menge überhaupt, z. B. nicht in η_σ; und wir wollen in dieser Hinsicht noch den Satz beweisen:

Satz XXIII. *Die Potenz $(1+\sigma)^{\text{ter}}$ Klasse mit beliebigem Hauptelement $M(\omega_\sigma)_p^\sigma$ enthält keine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken als Teilmenge, außer wenn schon die Basis M eine solche Teilmenge enthält.*

Wir können statt dessen sagen: λ_σ ist, wenn nicht in M, so auch nicht in der Potenz enthalten. Wir bemerken zuvor, daß λ_σ irreduzibel ist, weil man keinen seiner Element- oder Lückencharaktere weglassen kann, ohne die *Vollständigkeit* der Charakterenmenge $\mathfrak{W}_\sigma$ zu zerstören; jede Mittelstrecke von λ_σ ist also von der gleichen Spezies (λ_σ), übrigens sogar genau vom Typus λ_σ.

Wir haben nun die Belegungen mit dem Argument ω_σ

$$X = x_0 + x_1 + \cdots + x_\alpha + \cdots = X^\alpha + x_\alpha + X_\alpha \qquad (\alpha < \omega_\sigma)$$

zu betrachten, worin x_α die Menge M durchläuft, aber Nebenelemente $(+p)$ nur an einer Stellenmenge $< \omega_\sigma$ vorkommen, also Belegungen der Form

$$X = X^\alpha + p + p + \cdots,$$

wo α die erste Stelle oder irgend eine spätere ist, die der mit Nebenelementen belegten Stellenmenge folgt. Alle diese Belegungen bilden die Potenz $M(\omega_\sigma)_p^\sigma$, ein Teil von ihnen bilde die dichte Teilmenge N, von der wir annehmen, daß sie vom Typus λ_σ sei, um diese Annahme ad ab-

surdum zu führen. Wir unterscheiden, ob in jeder Mittelstrecke von N *basische* Reihen vorhanden sind oder nicht.

Sind in jeder Mittelstrecke von N basische Reihen vorhanden, und ist eine solche Reihe mit der Differenzstelle α durch

$$U = Q^\alpha + u_\alpha + U_\alpha, \qquad V = Q^\alpha + v_\alpha + V_\alpha, \cdots$$

angedeutet, so betrachte man in N die Gesamtheit der mit Q^α beginnenden Belegungen $X = Q^\alpha + x_\alpha + X_\alpha$. Hier durchläuft x_α eine jedenfalls transfinite Teilmenge von M, weil sie Basisreihen enthalten soll. Nun kann nicht für jedes x_α nur *eine* mit $Q^\alpha + x_\alpha$ beginnende Belegung von N vorhanden sein, da sonst N ein Stück vom Typus einer Teilmenge von M enthielte, die nach Voraussetzung sicher keine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken ist; wenn also N vom Typus λ_σ sein soll, so muß mindestens für ein x_α ja sogar, wie sich auf gleiche Weise ergibt, für eine transfinite Menge von Werten x_α das Stück der mit $Q^\alpha + x_\alpha$ beginnenden Belegungen ein *ächtes* Stück (> 1) von N sein. Uns genügt, hieraus die Folgerung zu ziehen, daß es drei Elemente $a_\alpha < q_\alpha < b_\alpha$ gibt, wovon q_α Nebenelement ($\neq p$) ist, derart, daß mit

$$Q^\alpha + a_\alpha, \quad Q^\alpha + q_\alpha, \quad Q^\alpha + b_\alpha$$

beginnende Belegungen in N vorhanden sind und zwar für $Q^\alpha + q_\alpha$ mindestens zwei, also unendlich viele. Das Stück der mit $Q^\alpha + q_\alpha$ beginnenden Belegungen von N soll nun wieder basische Reihen enthalten deren eine die Form

$$U = Q^\beta + u_\beta + U_\beta, \qquad V = Q^\beta + v_\beta + V_\beta, \cdots$$

$$\beta > \alpha, \qquad Q^\beta = Q^\alpha + q_\alpha + Q_\alpha^\beta$$

haben und die genaue Wiederholung der vorigen Überlegungen gestatten wird. Hiernach ergibt sich durch Induktion die Existenz einer Elementreihe

$$Q = \cdots + q_{\alpha_0} + \cdots + q_{\alpha_1} + \cdots + q_{\alpha_\xi} + \cdots = Q^\alpha + q_\alpha + Q_\alpha$$

mit $\aleph_\sigma$ *Nebenelementen* $q_{\alpha_0}\, q_{\alpha_1} \cdots q_{\alpha_\xi} \cdots$ derart, daß zu jedem α eine unendliche Menge mit Q^α beginnender Belegungen vorhanden ist und jede mit $Q^{\alpha_\xi} + q_{\alpha_\xi}$ beginnende Belegung von zwei mit

$$Q^{\alpha_\xi} + a_{\alpha_\xi}, \quad Q^{\alpha_\xi} + b_{\alpha_\xi} \qquad (a_{\alpha_\xi} < q_{\alpha_\xi} < b_{\alpha_\xi})$$

beginnenden, zu N gehörigen Belegungen eingeschlossen wird. Der induktive Beweis spaltet sich in den soeben erledigten Schluß von ξ auf $\xi + 1$ und in den Schluß auf den Limes einer Zahlenreihe; dieser Schluß aber beruht auf der Voraussetzung, daß N keine $c_{\tau\tau}$-Lücken und $c_{\tau\tau}$-Elemente ($\tau < \sigma$) enthalten soll, wonach für $\xi = \lim\{\eta\}$ und $\alpha = \lim\{\alpha_\eta\}$ sicher ein ächtes Stück (> 1) mit Q^α beginnender Belegungen in N existiert. Jetzt ist aber die Voraussetzung ad absurdum geführt, denn die oben genannten

Paare einschließender Belegungen bilden zwei argumentale Reihen der Typen ω_σ, ω_σ, die nur die Belegung Q einschließen; da diese wegen ihrer $\aleph_\sigma$ Nebenelemente nicht zu N gehört, so enthält N doch eine $c_{\sigma\sigma}$-Lücke.

Ist zweitens eine Mittelstrecke N_1 von N frei von basischen Reihen, so muß jedes ihrer Elemente, als $c_{\sigma\sigma}$-Element, Grenzelement zweier *argumentaler* Reihen der Typen ω_σ, ω_σ sein; für jedes zu N_1 gehörige Element $X = X^\alpha + p + p + \cdots$ existiert dann sicher ein anderes

$$Y = X^\alpha + p + p + \cdots + y_\beta + Y_\beta \quad (\beta \geq \alpha,\ y_\beta > p),$$

das ebenfalls zu N_1 gehört, $> X$ ist und mindestens ein Nebenelement y_β hinter den Nebenelementen von X enthält; ebenso gibt es immer Elemente dieser Art $< X$. Durch Induktion, die sich beim Schlusse auf Limeszahlen wieder auf die Abwesenheit von $c_{\tau\tau}$-Lücken und $c_{\tau\tau}$-Elementen in N_1 stützt, beweist man dann sofort die Existenz eines argumentalen Reihenpaares

$$Q_0\, Q_2\, Q_4 \cdots Q_{2\xi} \cdots \mid \cdots Q_{2\xi+1} \cdots Q_5\, Q_3\, Q_1$$

vom Typus $\omega_\sigma + \omega_\sigma^*$, worin für $\xi < \eta$ stets Q_η die sämtlichen Nebenelemente von Q_ξ und mindestens noch eins dahinter enthält; eine von diesen eingeschlossene Belegung Q, die $\aleph_\sigma$ Nebenelemente enthalten müßte, kommt aber in N_1 nicht vor, womit wieder die Existenz von $c_{\sigma\sigma}$-Lücken in N und demnach der Satz XXIII in allen Fällen bewiesen ist.

§ 25.

Verschärfung des Existenzbeweises.

Unser bisheriger Existenzbeweis (§ 21, § 19) beschränkte sich darauf, für jede zulässige Spezies einen irreduziblen Typus zu konstruieren; unser jetziges Ziel ist noch, für jede solche Spezies die Existenz *unendlich vieler verschiedener* irreduzibler Typen nachzuweisen. Daß es nun in jeder Spezies schlechthin verschiedene Typen gibt, ist insofern trivial, als ja diese Typen noch mit verschiedenen regulären Anfangszahlen konfinal und mit deren Inversen koinitial sein können; z. B. gehören zur Spezies (c_{00}, c_{00}) außer η noch $\eta\omega_1$, $\eta\omega_1^*$, $\eta\omega_1^* + \eta\omega_1$. Wollen wir auf dieses selbstverständliche Ergebnis keinen Wert legen, so werden wir den Begriff der Verschiedenheit schärfer fassen müssen: *wir nennen zwei dichte Mengen wesentlich verschieden, wenn niemals eine Mittelstrecke der einen einer Mittelstrecke der andern ähnlich ist.* Zwei irreduzible Mengen verschiedener Spezies sind in diesem Sinne wesentlich verschieden; ein erstes Beispiel für wesentlich verschiedene Typen derselben Spezies liefern η und ι, die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen.

Wir zeigen nun zunächst, wie man aus einer irreduziblen $c_{\sigma\sigma}$-Menge M der Spezies $(W, 0)$ durch Produktbildung mit variablen Faktoren, die entweder Intervalle von M oder einzelne Elemente sind, weitere irreduzible Mengen derselben Spezies ableiten kann. Wir bezeichnen die Intervalle von M mit

$$M(u, v) = u + M_u^v + v,$$

und verstehen unter $u_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$ irgendwelche $c_{\alpha\beta}$-Elemente von M; ferner seien wieder solche Elemente, die eine echte Menge (>1) durchlaufen, als bewegliche, solche, die eine Menge vom Typus 1 durchlaufen, als gebundene Elemente bezeichnet und die letztgenannten einem festen Element p gleichgesetzt. Sind dann $\varkappa$, λ die Randzahlen von W und wieder $\varkappa \geqq \lambda$, also λ die kleinere Randzahl, und ist ϱ eine mit ω_σ konfinale Ordnungszahl $< \omega_\lambda$, also

$$\omega_\sigma \leqq \varrho < \omega_\lambda,$$

so betrachten wir Elementverbindungen

$$X = x_0 + x_1 + \cdots + x_\xi + \cdots = X^\xi + x_\xi + X_\xi \quad (\xi < \varrho)$$

des Arguments ϱ und fixieren die von x_ξ zu durchlaufende Menge durch folgende Vorschriften:

(1) x_0 durchläuft die ganze Menge M.

(2) Ist ξ Limeszahl und sind alle Elemente von X^ξ beweglich, so ist auch x_ξ beweglich und durchläuft ein Intervall $M(u_{\tau\beta}, v_{\alpha\tau})$, wenn ξ mit ω_τ $(< \omega_\lambda)$ konfinal ist.

(3) Auf ein gebundenes Element folgen lauter gebundene, d. h. für $x_\xi = p$ ist auch $x_{\xi+1} = x_{\xi+2} = \cdots = p$.

(4) Ist x_ξ beweglich und $c_{\alpha\beta}$-Element *innerhalb* seiner Menge, so durchläuft $x_{\xi+1}$ ein Intervall $M(u_{\alpha\beta}, v_{\alpha\beta})$.

(5) Ist x_ξ beweglich und Randelement seines Intervalls, so ist $x_{\xi+1} = p$.

Die Existenz solcher Intervalle wie der hier geforderten ist evident, man hat nur noch eine bestimmte Wahl zu treffen. Die Menge aller so definierten Verbindungen, nach ersten Differenzen geordnet, heiße $N(\varrho)$; ihre Diskussion ist ähnlich, aber viel einfacher als die entsprechende Untersuchung in § 21. Die Verbindungen ohne Randelemente sind $c_{\sigma\sigma}$-Limites, von zwei argumentalen Reihen eingeschlossen. Eine Verbindung der Form $X^\xi + a_\xi + p + p + \cdots$, wo a_ξ linkes Randelement seines Intervalls ist, ist für eine Limeszahl ξ ein $c_{\tau\beta}$-Element, links von einer argumentalen, rechts von einer basischen Reihe begrenzt, im Falle $\xi = (\xi - 1) + 1$ ein beiderseits von basischen Reihen begrenztes $c_{\alpha\beta}$-Element. Das Entsprechende gilt von Verbindungen $X^\xi + b_\xi + p + p + \cdots$, deren letztes bewegliches Element das rechte Randelement seines Intervalls ist. Lücken sind nicht vorhanden, da jede argumentale oder basische Reihe einen Limes hat. Alle Charaktere

von $N(\varrho)$ kommen in M vor, und umgekehrt kommen alle Charaktere von M, wegen der Irreduzibilität von M, in jeder Mittelstrecke von $N(\varrho)$ vor, so daß $N(\varrho)$ in der Tat eine irreduzible Menge derselben Spezies $(W, 0)$ wie M selbst wird. Die Schwierigkeit beginnt erst bei dem Nachweise, daß man hier zu verschiedenen und, bei geeigneter Wahl von ϱ, sogar zu wesentlich verschiedenen Typen derselben Spezies gelangt.

Wählen wir als M die in § 21 konstruierte Menge, so gibt es nach der Bemerkung am Schlusse dieses Paragraphen eine in M dichte Teilmenge P, die andererseits Teilmenge einer gewissen Potenz $(1+\sigma)^{\text{ter}}$ Klasse *mit zerstreuter Basis* ist. Eine solche Potenz enthält nach Satz XXIII keine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken als Teilmenge, da die Basis keine (in diesem Fall ja überhaupt keine dichte Teilmenge) enthält. Demnach enthält auch P keine solche Teilmenge.

Erinnern wir uns ferner (§ 4), daß wir zwei Intervalle, die höchstens ein Element gemein haben, *exklusiv* nannten, und schreiben einer *exklusiven Intervallmenge* (wie wir kürzer für eine Menge paarweise exklusiver Intervalle sagen wollen) den Ordnungstypus der Menge ihrer linken Randelemente zu, so ist klar, daß, wenn die dichte Menge M eine exklusive Intervallmenge vom Typus γ enthält, jede in M dichte Menge P eine Teilmenge vom Typus γ enthalten muß. Wenn also auch nur eine einzige Menge P existiert, die in M dicht ist und keine Teilmenge γ enthält, so enthält M keine exklusive Intervallmenge γ.

Dies mit der vorigen Bemerkung kombiniert, ergibt die Existenz einer irreduziblen $c_{\sigma\sigma}$-Menge M der Spezies $(W, 0)$, *von der keine exklusive Intervallmenge den Typus einer $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken hat.* Diese Eigenschaft von M ist die Grundlage des folgenden Beweises, daß das obige Verfahren lauter verschiedene und eventuell wesentlich verschiedene Mengen $N(\varrho)$ liefert.

Die Beweisführung wird dadurch etwas umständlich, daß die variablen Faktoren unserer Produkte einzelne Elemente sein können (was sich andererseits nicht vermeiden läßt, wenn man den Zweck der Konstruktion bei *allgemein* vorgeschriebener Spezies $(W, 0)$ erzielen will); sie vereinfacht sich merklich, wenn alle variablen Faktoren echte Mengen sind, und es ist sehr zu empfehlen, sich den Gang der Betrachtung etwa an dem Spezialfall der Vollpotenzen einer einzigen Menge M klar zu machen, die keine mit M selbst ähnliche exklusive Intervallmenge enthält. Wir wenden uns sofort dem allgemeinen Falle zu, den wir sogar, um das Wesentliche hervortreten zu lassen, noch etwas weiter fassen, als unbedingt notwendig wäre.

Wir betrachten ein variables Produkt mit dem Argument α, gebildet von den nach ersten Differenzen geordneten Verbindungen

$$X = x_0 + x_1 + \cdots + x_\xi + \cdots = X^\xi + x_\xi + X_\xi \quad (\xi < \alpha),$$

worin die von x_ξ durchlaufene Menge $M(X^\xi)$ von der Stelle ξ und den vorangehenden Elementen abhängen kann. Wir unterscheiden, ob $M(X^\xi)$ eine echte Menge (> 1) oder ein einzelnes Element p ist, und nennen wieder das Element x_ξ im ersten Fall beweglich, im zweiten Fall gebunden. Sodann geben wir folgende spezielleren Vorschriften:

(a) Auf ein gebundenes Element folgen lauter gebundene, d. h. für $x_\xi = p$ ist auch $x_{\xi+1} = x_{\xi+2} = \cdots = p$.

(b) Wenn gebundene Elemente auftreten, so steht das erste an einer Stelle $\xi + 1$ (also nicht an der Stelle 0 und nicht an einer Limeszahlstelle).

Unsere Verbindungen enthalten also entweder lauter bewegliche Elemente oder sind von der Form $X^\xi + x_\xi + p + p + \cdots$, wo x_ξ das letzte bewegliche Element, $x_{\xi+1} = p$ das erste gebundene Element ist.

Ist x_ξ ein bewegliches Element, das die Menge $M(X^\xi) > 1$ durchläuft, so unterscheiden wir in $M(X^\xi)$ diejenigen Elemente u_ξ, für die $M(X^\xi + u_\xi) = p$, also $x_{\xi+1}$ gebunden, und diejenigen v_ξ, für die $M(X^\xi + v_\xi) > 1$, also $x_{\xi+1}$ beweglich. Die Mengen dieser Elemente mögen $U(X^\xi)$, $V(X^\xi)$ heißen; $M(X^\xi)$ ist ihre Vereinigungsmenge. Bezüglich dieser Mengen machen wir nun die fundamentale Annahme:

(c) *Jede Menge $V(X^\xi)$ ist eine echte Menge und mit keiner exklusiven Intervallmenge irgend einer Menge $M(Y^\eta)$ ähnlich.*

Man beachte, daß $V(X^\xi)$ hier nur als Teilmenge einer *echten* Menge $M(X^\xi)$ gemeint ist; wollten wir die Bezeichnung auch auf den Fall $M(X^\xi) = p$ ausdehnen, so wäre $U(X^\xi) = p$, $V(X^\xi) = 0$ zu setzen.

Ein variables Produkt der beschriebenen Art, mit dem Argument α, möge $P(\alpha)$ heißen. Sind X, X' zwei seiner Elemente, mit der ersten Differenzstelle ξ, so wollen wir sagen, das Intervall (X, X') sei *von der Ordnung* ξ. Ist $P_1(\alpha)$ ein *Stück* (§ 1) von $P(\alpha)$, und ξ die kleinste Ordnung der darin enthaltenen Intervalle, so heiße $P_1(\alpha)$ ein Stück von der Ordnung ξ; $P(\alpha)$ selbst ist von der Ordnung 0. Die Ordnung eines in $P_1(\alpha)$ enthaltenen Stücks ist dann $\geqq \xi$.

Der Inbegriff der mit X^ξ beginnenden Elemente von $P(\alpha)$ heiße ein *Hauptstück*, das Hauptstück $[X^\xi]$. Es ist ein echtes Stück und von der Ordnung ξ, wenn $M(X^\xi) > 1$, oder reduziert sich auf ein einziges Element $X^\xi + p + p + \cdots$, wenn $M(X^\xi) = p$. Im ersten Falle zerfällt es in die Hauptstücke $[X^\xi + x_\xi]$, von denen die $[X^\xi + u_\xi]$ wieder einzelne Elemente, die $[X^\xi + v_\xi]$ echte Stücke von der Ordnung $\xi + 1$ sind; die letzteren bilden eine Menge getrennter Stücke, die der Menge $V(X^\xi)$ ähnlich ist.

Nunmehr behaupten wir:

Satz XXIV. *Wenn ein Produkt $P(\alpha)$, das den Bedingungen* (a), (b), (c) *genügt, einem andern Produkt $Q(\beta)$ derselben Art oder einem seiner*

Stücke ähnlich ist, so muß $\alpha \leqq \beta$ sein; wenn also $P(\alpha)$ mit $Q(\beta)$ ähnlich ist, so muß $\alpha = \beta$ sein.

Der Beweis beruht auf dem Hilfssatz:

Wenn $P(\alpha)$ auf $Q(\beta)$ oder ein Stück $Q_1(\beta)$ abgebildet werden kann, so existiert ein Element von $P(\alpha)$

$$A = a_0 + a_1 + \cdots + a_\xi + \cdots = A^\xi + a_\xi + A_\xi \quad (\xi < \alpha)$$

mit lauter beweglichen Elementen a_ξ derart, daß jedes Hauptstück $[A^\xi]$, von der Ordnung ξ, ein Stück von der Ordnung $\geqq \xi$ zum Bilde hat.

Dieser Hilfssatz beweist sich durch Induktion:

Schluß auf eine Limeszahl. Ist ξ eine Limeszahl, und haben alle Hauptstücke $[A^\lambda]$ für $\lambda < \xi$ Bilder der Ordnung $\mu \geqq \lambda$, so ist $[A^\xi]$ nach der Vorschrift (b) ein echtes Stück von der Ordnung ξ und in allen Stücken $[A^\lambda]$ enthalten. Sein Bild, ein echtes Stück von $Q(\beta)$, ist in den Bildern der $[A^\lambda]$ enthalten, seine Ordnung η also $\geqq \mu \geqq \lambda$; η ist mithin größer als alle Zahlen λ und mindestens ihrem Limes ξ gleich, also $\eta \geqq \xi$.

Schluß von ξ auf $\xi + 1$. $[A^\xi]$, von der Ordnung ξ, habe ein Bild der Ordnung $\eta \geqq \xi$, die Elemente dieses Bildes sind also von der Form

$$Y = B^\eta + y_\eta + Y_\eta$$

mit festem Anfang B^η, während y_η eine Teilmenge von $M(B^\eta)$ durchläuft. Unter den Stücken, in die $[A^\xi]$ zerfällt, betrachten wir nur die echten Stücke $[A^\xi + v_\xi]$ von der Ordnung $\xi + 1$, die eine Stückmenge des Typus $V(A^\xi)$ bilden. Die Bilder dieser Stücke sind von der Ordnung $\geqq \eta$; sie können aber nicht alle von der Ordnung η sein. Denn wenn das Bild des Stückes $[A^\xi + v_\xi]$ von der Ordnung η ist, so enthält es zwei Verbindungen

$$Y = B^\eta + y_\eta + Y_\eta, \quad Z = B^\eta + z_\eta + Z_\eta \quad (y_\eta < z_\eta)$$

mit der Differenzstelle η, wo die differierenden Elemente ein Intervall (y_η, z_η) von $M(B^\eta)$ begrenzen; ist für ein zweites Stück $[A^\xi + v_\xi']$ das Bild wiederum von der Ordnung η, so enthält es zwei Elemente

$$Y' = B^\eta + y_\eta' + Y_\eta', \quad Z' = B^\eta + z_\eta' + Z_\eta' \quad (y_\eta' < z_\eta'),$$

und für $v_\xi < v_\xi'$ ist $Y < Z < Y' < Z'$, also

$$y_\eta < z_\eta \leqq y_\eta' < z_\eta',$$

d. h. die beiden Intervalle (y_η, z_η) und (y_η', z_η') exklusiv. Wäre also für jedes v_ξ das Bild von der Ordnung η, so müßte $M(B^\eta)$ eine exklusive Intervallmenge vom Typus $V(A^\xi)$ enthalten. Da dies gegen die Annahme (c) ist, so muß mindestens eines der v_ξ, nennen wir es a_ξ, so beschaffen sein, daß das Hauptstück $[A^\xi + a_\xi]$ ein Bild der Ordnung $\geqq \eta + 1 \geqq \xi + 1$ hat.

Damit ist der Induktionsschluß geführt; sein Anfang ergibt sich von selbst, da ja nach Voraussetzung $P(\alpha)$ selbst, das Hauptstück der

Ordnung 0, auf $Q(\beta)$ oder $Q_1(\beta)$, d. h. ein Stück der Ordnung $\geqq 0$ abgebildet sein soll.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich sofort, daß zu jeder Zahl $\xi (< \alpha)$ eine Zahl $\eta (\xi \leqq \eta < \beta)$ vorhanden sein, β also größer als alle ξ und demnach $\beta \geqq \alpha$ sein muß. Damit ist auch der Satz XXIV bewiesen: zwei Produkte der geschilderten Art mit verschiedenem Argument sind sicher verschieden.

Aus der Bemerkung, daß jedes echte Hauptstück $[X^\xi]$ von $P(\alpha)$ selbst ein Produkt $P(-\xi + \alpha)$ derselben Art mit dem Argument $-\xi + \alpha$ (Endstück von α) ist, läßt sich auch sofort schließen, welche Wahl des Arguments α zu der gesuchten *wesentlichen* Verschiedenheit führen wird; wir bedürfen dazu aber noch der ergänzenden Annahme:

(d) Jede Menge $V(X^\xi)$ ist in $M(X^\xi)$ dicht.

Sei sodann α eine *Hauptzahl* (§ 16), d. h. jedem ihrer Endstücke gleich, so daß jedes echte Hauptstück von $P(\alpha)$ selbst die gleiche Form $\Pi(\alpha)$ hat (ohne gerade mit $P(\alpha)$ ähnlich sein zu müssen). Auf Grund der Annahme (d) liegt zwischen irgend zwei Elementen von $P(\alpha)$

$$X = X^\xi + x_\xi + X_\xi, \quad X' = X^\xi + x_\xi' + X_\xi' \quad (x_\xi < x_\xi')$$

sicher ein Hauptstück $[X^\xi + v_\xi]$, wo $x_\xi < v_\xi < x_\xi'$, d. h. jedes Stück $P_1(\alpha)$ enthält jetzt ein Stück $\Pi(\alpha)$. Ist sodann $\alpha > \beta$, so kann nach XXIV nicht $P(\alpha) = Q(\beta)$ oder $P(\alpha) = Q_1(\beta)$ sein; es kann nunmehr aber auch nicht $P_1(\alpha) = Q(\beta)$ oder $P_1(\alpha) = Q_1(\beta)$ sein, weil sonst $\Pi(\alpha)$ einem Stück von $Q(\beta)$ ähnlich wäre. Wir haben also die Verschärfung von XXIV:

Satz XXV. *Ein Produkt, das den Bedingungen* (a)—(d) *genügt und eine Hauptzahl zum Argument hat, ist von allen Produkten derselben Art mit kleinerem Argument wesentlich verschieden; zwei Produkte dieser Art mit verschiedenen Hauptzahlargumenten sind wesentlich verschieden.*

Unter den Spezialfällen dieser Sätze bemerken wir folgenden: die Bedingungen (a), (b), (c) sind erfüllt, wenn überhaupt keine gebundenen Elemente auftreten, alle Faktoren also echte Mengen sind und keiner einer exklusiven Intervallmenge eines andern (auch nicht seiner selbst) ähnlich ist; dann ist $U(X^\xi) = 0$, $V(X^\xi) = M(X^\xi)$ zu setzen. Die Bedingung (d) verlangt noch die Dichtigkeit aller Faktoren. Also:

Satz XXVI. *Ein Produkt, dessen (variable oder feste) Faktoren stets echte Mengen sind, von denen keine exklusive Intervallmenge einer der Mengen selbst ähnlich ist, ist von allen gleichbeschaffenen Produkten verschiedenen Arguments verschieden und, im Falle von lauter dichten Faktoren, wesentlich verschieden, wenn die Argumente Hauptzahlen sind.*

Insbesondere gilt dies von den Vollpotenzen einer Basis M, die keine exklusive Menge von ihrem eigenen Typus enthält; die Vollpotenzen einer solchen Menge sind allesamt verschieden, die Vollpotenzen einer dichten

Menge dieser Art mit Hauptzahlargumenten allesamt wesentlich verschieden. Dies gilt z. B. für das Linearkontinuum, das unbegrenzte λ wie das begrenzte $\vartheta = 1 + \lambda + 1$, da jede exklusive Intervallmenge dieser Typen abzählbar ist. Es sind also die Potenzen

$$\vartheta = \vartheta(\!(1)\!),\ \vartheta(\!(\omega)\!),\ \vartheta(\!(\omega^2)\!),\ \cdots,\ \vartheta(\!(\omega^\alpha)\!),\ \cdots$$

mit Hauptzahlen der zweiten Zahlenklasse $\aleph_1$ wesentlich verschiedene*) Typen der Spezies $(c_{00}, 0)$ (nach Abtrennung der Randelemente); geht man zu Hauptzahlen der dritten Zahlenklasse weiter, so erhält man $\aleph_2$ wesentlich verschiedene Typen der Spezies $(c_{00}c_{01}c_{10}, 0)$ und $(c_{01}c_{10}c_{11}, 0)$; im allgemeinen Falle, wenn das Argument irgend eine mit ω_σ konfinale Hauptzahl der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ ist, $\aleph_{\gamma+1}$ wesentlich verschiedene Vertreter der Spezies $(W, 0)$, deren Charakterenmenge die σ^{te} Zeile und σ^{te} Spalte des Tableaus mit den Randzahlen $\gamma + 1$, $\gamma + 1$ umfaßt:

$$W = \{c_{\alpha\sigma}, c_{\sigma\alpha}\}, \quad (\alpha \leqq \gamma).$$

Dies Beispiel möge die Bemerkung am Schlusse von § 21 illustrieren.

Gehen wir jetzt zu der allgemeinen Konstruktion am Beginne des gegenwärtigen Paragraphen zurück, so erkennen wir die Anwendbarkeit des Satzes XXV. Die dortigen Vorschriften über gebundene Elemente entsprechen den Bedingungen (a), (b). Die echten Mengen $M(X^\xi)$ sind Intervalle von M, und nur deren Randelemente machen das nächste Element zu einem gebundenen; bezeichnen wir sie mit a_ξ, b_ξ, so ist also

$$U(X^\xi) = (a_\xi, b_\xi), \quad M(X^\xi) = a_\xi + V(X^\xi) + b_\xi.$$

$V(X^\xi)$ ist, als Mittelstrecke von M, eine irreduzible Menge der Spezies $(W, 0)$, also eine $c_{\sigma\sigma}$-Menge ohne $c_{\sigma\sigma}$-Lücken, und da weder M noch eines seiner Intervalle $M(Y^\eta)$ eine exklusive Intervallmenge dieser Art enthält, so ist der Vorschrift (c) genügt. Endlich ist auch (d) erfüllt. Unsere Konstruktion liefert also, wenn wir uns auf Hauptzahlargumente ϱ, die mit ω_σ konfinal und $< \omega_\lambda$ sind, beschränken, $\aleph_\lambda$ wesentlich verschiedene irreduzible Vertreter $N(\varrho)$ der Spezies $(W, 0)$, nämlich außer $M = N(1)$ noch die Produkte

$$N(\omega_\sigma),\ N(\omega_\sigma^2),\ \cdots,\ N(\omega_\sigma^{\omega+1}),\ \cdots,\ N(\omega_\sigma^\gamma),\ \cdots \qquad (\gamma < \omega_\lambda),$$

wo der Exponent γ der Cantorschen Potenz entweder eine Nichtlimeszahl oder mit ω_σ konfinal ist.

Der hiermit verschärfte Existenzbeweis für die Spezies $(W, 0)$ ist nach § 19 mit einem Federstrich auf die unstetigen Spezies desselben Geschlechtes auszudehnen. Ist N stetig und P in N dicht, so ist $N = [P]$

---

*) Da wesentlich verschiedene Typen voneinander unabhängig (§ 10) sind, so muß die Basis des Ringes aller Typen der Mächtigkeit $\leqq 2^{\aleph_0}$ mindestens $\aleph_1$ Typen umfassen; vgl. die Bemerkung am Schlusse von § 11.

die Ausfüllung von P und durch P eindeutig bestimmt. Ist also N von N' verschieden, so ist sicher P von P' verschieden, und die Anwendung auf Mittelstrecken zeigt, daß man hier statt „verschieden" auch „wesentlich verschieden" sagen darf. Wir haben damit den Satz gewonnen:

Satz XXVII. *Jede Spezies mit vollständiger Charakterenmenge, deren Randzahlen $\varkappa$, λ keine Limeszahlen sind, ist für $\varkappa \geqq \lambda$ durch mindestens $\aleph_\lambda$ wesentlich verschiedene irreduzible Typen vertreten.*

Nennen wir $\aleph_\tau$ die Mächtigkeit von ϱ ($\aleph_\sigma \leqq \aleph_\tau < \aleph_\lambda$), so ist $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma \aleph_\tau} = \aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\tau}$ die Mächtigkeit von $N(\varrho)$, liegt also zwischen $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$ und $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_{\lambda-1}}$; insbesondere gibt es sicher $\aleph_{\sigma+1}$ wesentlich verschiedene Mengen $(W, 0)$ von der niedrigsten Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$. Da $N(\varrho)$ eine exklusive Intervallmenge vom Typus $N(1) = M$ und von der Mächtigkeit $\aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$ enthält, so ist jede in $N(\varrho)$ dichte Menge von der Mächtigkeit $\geqq \aleph_{\varkappa-1}^{\aleph_\sigma}$. Die hier gewonnenen $\aleph_\lambda$ Vertreter von Spezies (U, V), die $c_{\sigma\sigma}$-Lücken enthalten, brauchen also nicht mehr die in diesem Fall erreichbare Minimalmächtigkeit $(\aleph_{\varkappa-1})_\sigma$ zu haben; nur den aus der niedrigsten Menge $N(1) = M$ selbst nach der Vorschrift von § 19 gebildeten relativ dichten Teilmengen kann man sie aufzwingen. Wenn z. B. $\aleph_\sigma$ die Cantorsche Alefhypothese erfüllt, so liefert unsere Methode von der Spezies $(c_{\sigma\sigma}, \mathfrak{W}_\sigma)$ zwar $\aleph_{\sigma+1}$ wesentlich verschiedene Vertreter, aber nur einer davon ist $= \aleph_\sigma$, die übrigen $\geqq \aleph_\sigma^{\aleph_\sigma} > \aleph_\sigma$. Insbesondere liefert sie von der Spezies (c_{00}, c_{00}) der rationalen Zahlenmenge zwar $\aleph_1$ wesentlich verschiedene Exemplare, von denen aber nur eins, nämlich η, abzählbar, die übrigen von der Mächtigkeit des Kontinuums sind.

The Multiplication of Alephs.

By

Philip E. B. Jourdain of Broadwindsor (England).

In order to prove that

$$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma,$$

where γ is any (finite or transfinite) ordinal number, we shall generalise Cantor's*) method of proving that

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

This method is to consider an aggregate $\{(\mu, \nu)\}$ of couples of integers, where μ and ν are — independently of one another — any finite positive integers**), so that this aggregate is evidently of cardinal number $\aleph_0 \cdot \aleph_0$; to arrange this aggregate in a doubly-infinite series; and to rearrange, by 'diagonal enumeration'***), the double series as

---

*) „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre". Journ. für Math. Bd. 84, 1878, pp. 242—258; cf. Math. Ann. Bd. 46, 1895, p. 494. Fundamentally the same method was used by Cantor („Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen" (Journ. für Math. Bd. 77, 1874, pp. 258—263) in proving the enumerability of the aggregate of real algebraic numbers.

Cantor (see Bernstein, „Untersuchungen aus der Mengenlehre", Diss. Göttingen, Halle a. S., 1901, p. 49; or, in the reprint, with corrections and additions, in Math. Ann. Bd. 61, 1905, pp. 150—151) has indicated that his theorem can be generalised into one on the multiplication of any Alephs, but he neither gave a proof nor mentioned the difficulty about the «multiplicative axiom» (which can be overcome, in this case).

**) The couples are *couples with sense*; that is to say, (μ, ν) is identical $(=)$ with (μ', ν') only if $\mu = \mu'$ and $\nu = \nu'$, so that, if μ is not identical with ν, (μ, ν) is not with (ν, μ), as it would be if (μ, ν) represented a *class* (without any particular ordering-relation). Here 'finite positive integer' means 'ordinal number less than ω'.

***) The meaning of this phrase is that the term $u_{\mu,\nu}$ in the double series $(u_{\mu,\nu})$ is the λ^{th} term counted, where

$$\lambda = \frac{1}{2}(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2) + \mu.$$

Cf. Jourdain, 'On Unique, Non-Repeating, Integer-Functions', Mess. of Math., May 1901.

a *simply* infinite series (the cardinal number of whose terms is $\aleph_0$), in such a way that each term of the one series occurs in the other.

This manner of enumeration can be characterised as follows. If (μ, ν) and (μ', ν') are any two different couples, and

$$\mu + \nu < \mu' + \nu',$$

or if

$$\mu + \nu = \mu' + \nu' \quad \text{and} \quad \mu < \mu',$$

then, in the simply-infinite series,

$$(\mu, \nu) \prec (\mu', \nu').$$

If

$$\mu + \nu > \mu' + \nu',$$

or if

$$\mu + \nu = \mu' + \nu' \quad \text{and} \quad \mu > \mu',$$

then

$$(\mu, \nu) \succ (\mu', \nu').$$

The only remaining case, that

$$\mu + \nu = \mu' + \nu' \quad \text{and} \quad \mu = \mu',$$

is only possible if $\nu = \nu'$, and thus if (μ, ν) and (μ', ν') are identical.

1.

Now this rule for ordering the couples (μ, ν) can be extended to the case of μ and ν being any, finite or transfinite, ordinal numbers, without any alteration. In fact, if α, β, α', and β' are any ordinal numbers, we have only the possibilities

$$\alpha + \beta > \alpha' + \beta', \quad \alpha + \beta < \alpha' + \beta', \quad \text{and} \quad \alpha + \beta = \alpha' + \beta';$$

and, in the last case, if also $\alpha = \alpha'$, we must have $\beta = \beta'$.*)

Accordingly the aggregate $\{(\alpha, \beta)\}$, where α and β are, each independently of the other, any ordinal numbers contained in the number-classes preceding some definite one**) (that which begins with ω_γ) can

*) If β is transfinite, we *can* have

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta', \; \beta = \beta', \; \text{and yet} \; \alpha' > \alpha;$$

let, for example, $\beta = \alpha = \omega$ and $\alpha' = \omega + 1$.

**) This limitation is added, since 'the series where α and β are *any* ordinal numbers' is not, in spite of appearances, a series at all (cf. Russell, Proc. Lond. Soc. (2), vol. IV, 1906, p. 33). It is necessary to conclude this from the self-contradictory results to which the supposition that there *is* a series of all ordinal (or cardinal) numbers leads. It is Russell's merit to have stated explicitly the analogous fact (*ibid.*, pp. 32—36) that certain logically determinate propositional functions do not determine classes at all. In this way, his own (cardinal) contradiction is solved in a way that agrees with my somewhat obscurely expressed solution of Burali-Forti's (ordinal) contradiction.

be put, by the above method, in the form of a simply-ordered series. We will next prove that this series is *well-ordered* (§ 2), and of type ω_γ *) (§ 3).

2.

To prove that the rule of order described brings about a well-ordering, we must show how to find, in any given part P of the aggregate $\{(\alpha, \beta)\}$ an element (α_0, β_0) which is the lowest in rank of all the members of P, when P is arranged in the way described.

Each member (α, β) of P determines one, and only one, ordinal number $\alpha + \beta$.**) Among the members of the aggregate $\{\alpha + \beta\}$, where the couples (α, β) are members of P, there is a least ordinal number $\varkappa$; for any aggregate of ordinal numbers has a least (in order of magnitude). This $\varkappa$ determines an aggregate u, of one or more members, of couples (α, β) of P such that $\alpha + \beta = \varkappa$. In u there is one and only one couple (α_0, β_0) such that α_0 is the least (in order of magnitude) ordinal number of all the first terms α of the couples which are the members of u.***)

This couple (α_0, β_0) is the first of P when P is arranged in the above order; for if there were a member (α_1, β_1) of P such that

$$(\alpha_1, \beta_1) \prec (\alpha_0, \beta_0),$$

we should have, either

$$\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_0 + \beta_0, \quad \text{or} \quad \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_0 + \beta_0 \quad \text{and} \quad \alpha_1 < \alpha_0,$$

and these are excluded by the above selections of $\alpha_0 + \beta_0$ as the least in $\{\alpha + \beta\}$, and α_0 as the least of all the α's in u.

It is to be noticed that, in the case of this aggregate $\{(\alpha, \beta)\}$, we have indicated how, in any part P of it, a specialised element (α_0, β_0) can be found, and thus that the 'multiplicative axiom'†) can be proved. If u is any aggregate, and we can prove the multiplicative axiom for u, Zermelo††) has shown that u can be well-ordered, and the converse is evidently true.

---

*) Following Russell ('The Principles of Mathematics', vol. I, Cambridge, 1903 p. 322; Jourdain, Phil. Mag., March 1904, p. 295), ω_γ denotes the first ordinal number of the $(2+\gamma)^{\text{th}}$ numberclass; so that, as will follow from our main theorem (see §§ 3 and 4), ω_γ is the least ordinal number belonging to the cardinal number $\aleph_\gamma$, and every ordinal number less than ω_γ belongs to a smaller Aleph.

**) *One* ordinal-number ζ may determine *many* couples (γ, δ) of P for which $\gamma + \delta = \zeta$; thus, if $\zeta = \omega + \omega$, two corresponding couples may be (ω, ω) and $(\omega + 1, \omega)$.

***) There cannot be *two* couples in u with the same α_0, say (α_0, β_0) and (α_0, β_0'); for $\alpha_0 + \beta_0$ is never equal to $\alpha_0 + \beta_0'$ unless $\beta_0 = \beta_0'$.

†) Cf. my paper in the Quart. Journ. of Math. 1907, pp. 356, 360—366.

††) „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann. Bd. 59, 1904, pp. 514—516.

3.

We generate*) the Alephs corresponding to the ordinal numbers by defining an $\aleph_\gamma$ for any γ, but we do not assume that all these Alephs are different, that is to say, that $\aleph_\xi < \aleph_\gamma$ if, and only if, $\xi < \gamma$. This proposition is equivalent to our theorem on the multiplication of Alephs. In fact, if α is some ordinal number, and $\zeta < \alpha$ implies that

$$\aleph_\zeta \cdot \aleph_\zeta = \aleph_\zeta,$$

then, and only then,

$$\aleph_\alpha > \aleph_\zeta,$$

and $\aleph_\alpha$ is the next greater to all these $\aleph_\zeta$'s.**)

Let us now start from the aggregate $\{(\alpha, \beta)\}$, where $\alpha < \omega_\gamma$, $\beta < \omega_\gamma$, arranged, by the above method, in a well-ordered series S, and assume that

(1) $$\zeta < \omega_\gamma \quad \text{implies that} \quad \bar{\zeta} \cdot \bar{\zeta} = \bar{\zeta},$$

where $\bar{\zeta}$ is the cardinal number associated with the ordinal number ζ.***) Then $\aleph_\gamma$ is the next Aleph greater than all the $\bar{\zeta}$'s, and we have only to prove that

$$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma. \dagger)$$

Let S' be any given segment of S and σ' the type of S'; we prove that $\bar{\sigma}' < \aleph_\gamma$. Let (α', β') be the lowest couple in S not in S', then

$$\alpha' + \beta' < \omega_\gamma.$$

For

$$\overline{\alpha' + \beta'} = \bar{\alpha}' + \bar{\beta}' \leqq 2 \cdot \bar{\xi} \leqq \bar{\xi} \cdot \bar{\xi},$$

where ξ is the larger of the two, α', β'; and (1) gives

$$\bar{\xi} \cdot \bar{\xi} = \bar{\xi} < \aleph_\gamma;$$

hence

$$\overline{\alpha' + \beta'} < \aleph_\gamma.$$

All the couples in S' are formed with numbers α, β, such that $\alpha + \beta \leqq \alpha' + \beta'$. Put $\alpha' + \beta' = \lambda$, then,

*) See Russell, op. cit., p. 322.

**) See Jourdain, Phil. Mag., Jan. 1904, p. 74, and March 1904, pp. 297, 300.

***) That is to say, the cardinal number of any aggregate which can be arranged in type ζ. Thus $\bar{\omega}_\gamma = \aleph_\gamma$.

†) If we prove this, we shall have proved the theorem on multiplication for *all* Alephs by the generalised theorem of complete induction: We know that the theorem holds for the least Aleph $\aleph_0$; and, if it holds for all Alephs less than $\aleph_\gamma$, it holds for $\aleph_\gamma$; then it holds for all Alephs.

$$\bar{\sigma'} \leqq \bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda},$$

since all the couples (α, β) of S' are such that

$$\alpha < \lambda, \quad \beta < \lambda,$$

and, since also, by (1)*),

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda} = \bar{\lambda} < \aleph_\gamma,$$

we have

(2) $$\bar{\sigma'} < \aleph_\gamma.$$

Now (2) implies that

(3) $$\bar{\sigma} \leqq \aleph_\gamma \text{ **)},$$

since, if not, there would be a segment of S of cardinal number $\aleph_\gamma$.

We have

(4) $$\bar{\sigma} = \aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma;$$

and since we also evidently have

(5) $$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma \geqq \aleph_\gamma,$$

we conclude, from (3), (4), and (5), that

(6) $$\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma.$$

Also we can conclude that S is of type ω_γ.

4.

The theorem (6) is chiefly important in proving that there actually *is* a series of different Alephs. We can define cardinal numbers of various segments of the ordinal number-series, but we cannot prove that they are different, — in other words, if ω_ϖ (the first of the $(2+\varpi)^{\text{th}}$ class) is the least ordinal number which is greater than all the ordinal numbers γ which form the extension of a certain aggregate u (for example, u may consist of the numbers less than ω_ϖ), that

$$\aleph_\varpi > \aleph_\gamma,$$

and that $\aleph_\varpi$ is the *least* such cardinal number — without a previous proof of (6).***)

Also, in the generalisation of König's†) theorem, that $2^{\aleph_0}$ is not

*) Notice that we do not assume an equality like (1) for *finite* cardinal numbers (for which it is not true, in general), but only for certain Alephs.

**) The use of the relation $\leqq$ between two cardinal numbers always indicates that the Schröder-Bernstein theorem (see my remarks in the Quart. Journ. of Math., 1907, pp. 355—356) has been applied.

***) I pointed out this in the Phil. Mag., Jan. 1904, p. 74. See also a note in § 3 above.

†) „Zum Kontinuum-Problem", Verhandl. des dritten internat. Math.-Kongr., 1905, pp. 144—147.

an Aleph of the form $\aleph_{\gamma+\omega}$, where γ is any ordinal number, to the proof that $2^{\aleph_\xi}$ is not an Aleph of the form $\aleph_{\gamma+\zeta}$, where γ is any ordinal number and ζ any Limes-number of the $(2+\xi)^{\text{th}}$ class, (6) is again required.

5.

The proof that I designed in 1903*) of the theorem that

$$\aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 \tag{7}$$

and its generalisation to (6), is only sketched, and, though having at the bottom the same thought as that used here, has a difficulty of detail**), from which the present proof is free. Also that former proof assumes the principle of arbitrary selection, but this principle can be avoided by an easily-given specification of the order in which the couples (α, β) are to be enumerated. In fact, the essence of the proof given in this paper is such a specification.

Thus my proof was not subject to the criticism which A. E. Harward***) has brought against it; — the question is quite different from that which Harward raised†) *à propos* of my mistaken argument††) on the Schröder-Bernstein theorem; but this Harward did not seem to perceive. However, the proof of (7) given by Harward†††) as a modification of my own is quite satisfactory, except that it does not emphasise the difficulty (as to the multiplicative axiom) that it overcomes. His method has the further advantage of proving that the number

$$\xi = \sum_{\zeta<\beta} \zeta + \alpha$$

takes every value less than ω_γ *once and once only*, when α and β vary *independently* of one another through all values less than ω_γ; — a generalisation of the theorem quoted in the last note of the introduction above.

---

*) Phil. Mag., March 1904, pp. 298—301.

**) Namely, a series of type ω_1 of numbers $\varkappa$ such that both

$$\alpha + \beta < \varkappa \quad \text{and} \quad \gamma < \varkappa$$

where γ is the suffix of general term of a simple series $\{a_n\}$ to which the double series $\{u_{\alpha,\beta}\}$ is to be put in correspondence and the terms a_γ of simple series have the same cardinal number as those $u_{\alpha,\beta}$ of the double series. This difficulty was pointed out to me by Prof. Zermelo.

***) 'On the Transfinite Numbers', Phil. Mag., October 1905, pp. 439—460, especially pp. 457—459.

†) Ibid., pp. 455—457.

††) Ibid., Jan. 1904, pp. 71—72.

†††) Loc. cit., pp. 458—459.

Finally, Gerhard **Hessenberg***) proved, by a wholly different method, the theorem that, quite generally,

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta,$$

which is easily proved to be equivalent to the theorem expressed by (6).

The Manor House, **Broadwindsor**, Dorset, England.
Dec. 27th, 1907, and Jan. 28th, 1908.**)

---

*) „Grundbegriffe der Mengenlehre", Göttingen 1906, pp. 106—109. On p. 109, Hessenberg stated that Zermelo had also communicated a proof of (6) to him which, since it is essentially different from his own, will be published elsewhere.

) I must here refer gratefully to the trouble which Prof. **Zermelo has taken in repeatedly criticising weak points in my proofs and suggesting improvements.

On those Principles of Mechanics which depend upon Processes of Variation.*)

By

Philip E. B. Jourdain of Broadwindsor (England).

Chief among the questions of mathematical interest, and the points of controversy, about the variational principles of mechanics are those concerning the exact meaning of the process of 'variation' used; — whether it can be regarded as a literal (proper) variation, as considered in the calculus of variations, or not. These questions are:

(a) As to the relation of the principle of least action to Hamilton's principle, and the connected one as to whether the variable t is to be varied in the former (in the latter, $\delta t = 0$);

(b) As to the extent of the principles, — whether, and under what conditions, they are applicable to the cases of non-existence of a force-function, non-holonomous conditions, and conditions which depend on t explicitly, — and the connected difficulty as to the transformation of the principles from rectangular to general coordinates.**)

Since the time of Lagrange, both questions have arisen, in a more or less explicit form, in the work of Rodrigues, Jacobi, Ostrogradsky, Routh, A. Mayer, Sloudsky, Bertrand, Voss, Helmholtz, Réthy, Hölder, Appell, and myself. The historical part, I propose to deal with elsewhere; here I will try, with especial reference to some recent papers of Réthy***), to give what seem to me to be satisfactory answers to both questions.

*) Siehe die Arbeiten der Herren Jourdain und Réthy in den Bänden 62 und 64 dieser Annalen. Da sich auch Herr Réthy mit den neuen Ausführungen Herrn Jourdains einverstanden erklärt hat, so schließen wir die Diskussion.

D. Red.

**) I find it convenient to call general coordinates 'generalised' ones when they are mutually independent.

***) „Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört", Math. Ann. Bd. 58, 1904, pp. 169—194; „Bemerkungen zur Note

1.

With regard to the questions (*a*), various views as to the relation of the principle of least action to Hamilton's principle have been taken by different people, or by the same person at different times. Owing to the impossibility of preserving the mutual independence of the variations of the generalised coordinates with the supposition that the quantity $T-U$ is to be unvaried in the variation when t is taken as the independent variable (so that $\delta t = 0$), Jacobi gave the principle of least action a form in which t is eliminated, so that it is quite distinct from, and less general then, Hamilton's principle*). Secondly, in view of this, Lagrange's principle of least action seemed to Ostrogradsky and to Mayer in his earlier (1877) work**) to be an incorrect formulation of Hamilton's principle. Thirdly, Rodrigues, in a memoir of 1814 which had been overlooked by most until much later, had shown that the above difficulty could be surmounted, and Lagrange's principle conceived as one quite different from Hamilton's, but approaching it — and deviating from Jacobi's — in form, just as Lagrange seems to have intended, if only we vary t (do not assume $\delta t = 0$). This view was accepted by Routh and Sloudsky, and by Mayer in 1886, with explicit abandonment of his former view. Fourthly, there is Helmholtz's view that Hamilton's principle is a form of Lagrange's principle. Helmholtz is only right if *suggestion* of Hamilton's principle contained in the equations of condition do not depend explicitly on t. And lastly, there is a perfectly correct identity, established by Réthy, and showing more clearly this result of Helmholtz's.

If the equations of condition do not contain t explicitly, we have, as Réthy remarked,

$$\delta T \equiv \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{d\delta q_\nu}{dt} - 2T\frac{d\delta t}{dt},$$

where the q_ν's are generalised coordinates. Putting

$$\delta_t T \equiv \delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt},$$

des Herrn Philip E. B. Jourdain über das Prinzip der kleinsten Aktion", ibid., Bd. 64, 1907, pp. 156—159.

*) In this form, 'the principle of least action' has been given in most text-books since Jacobi's time; for example, Darboux, 'Leçons sur la théorie générale des surfaces', t. 2, Paris 1889, pp. 491—500; Appell, 'Traité de mécanique rationnelle', 2e ed., t. 2., 1904, pp. 425—429; and Maggi, 'Principii della teoria matematica del movimento dei corpi', Milano, 1896, pp. 394—396.

**) „Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion", Akad. Antrittsvorlesung, Leipzig, 1877, p. 27—29.

so that the variation $\delta_t T$ is formed as if $\delta_t t = 0$, we see that

$$\delta(2T \cdot dt) \equiv (\delta T + \delta_t T)\, dt.$$

Réthy obtained this identity, supposing that T is a homogeneous quadratic function of the $\dot{q}_\nu$'s, and δ_t 'denotes a variation such that $\delta t = 0$'*), and hence:

$$(1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt - \int_{t_0}^{t_1} \Big(\delta T - \sum_\nu Q_\nu \cdot \delta q_\nu\Big)\, dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Big(\delta_t T + \sum_\nu Q_\nu \cdot \delta q_\nu\Big)\, dt.$$

Thus he concluded that the requirement that the variation of the action-integral vanishes for all continuous virtual displacements δq_ν which vanish at the limits of integration, premising that we have eliminated δt by the equation

$$\delta T - \sum_\nu Q_\nu \cdot \delta q_\nu = 0,$$

is identical with Hamilton's principle:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\delta_t T + \sum_\nu Q_\nu \cdot \delta q_\nu\Big)\, dt = 0.$$

The identity (1) *implies that the conditions do not contain t explicitly***): let us consider T as a function of the $3n$ rectangular coordinates, so that we gain generality, since T is homogeneous even if the conditions contain t. We then have

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt - \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta' U)\, dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} (\delta_t T + \delta' U)\, dt,$$

where the δx_r's are connected by the equations of condition. If, now, we suppose that the system has k degrees of freedom, and

$$(2) \qquad x_r = \varphi_r(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad r = 1, 2, \cdots, 3n,$$

we see, by a simple calculation, that the right-hand side of (1), when equated to zero, is Hamilton's principle only if

$$(3) \qquad 2(T)\frac{d\delta t}{dt} \equiv \sum_\nu \dot{q}_\nu \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{d\delta t}{dt} - \frac{\partial(T)}{\partial t}\delta t,$$

---

*) Math. Ann. Bd. 58, 1904, pp. 171—172.

**) This condition is, thus, necessary (and sufficient) for the formal identity of the two principles in question.

34*

where (T) is what T becomes when all the x's are expressed in terms of the q's.*) Now (3) implies that the conditions do not depend on t.

The equation got by putting either side of (1) equal to zero is**) the common source of both Hamilton's principle and the principle of least action, provided that we form $\delta(T)$ by putting

$$\delta x_r = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_\nu} \delta q_\nu,$$

where the x_r's are determined by such equations as (2), so that δx_ν is a *virtual* displacement, in the variation

$$\delta T \equiv \sum_r m_r \dot{x}_r \frac{d \delta x_r}{dt} - 2T \frac{d \delta t}{dt};$$

but then $\delta(T)$ is not a 'variation' properly so called, for we do not have

$$\delta(T) = \sum_\nu \left(\frac{\partial (T)}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_\nu} \delta \dot{q}_\nu \right) + \frac{\partial (T)}{\partial t} \delta t,$$

but the expression given in (21) of § 3.

Thus Helmholtz's (Lagrange's) generalised integral of least action is none other, in *form*, than half the integral which is fundamental in Hölder's**) work, and which includes a generalised Hamilton's principle and a generalised principle of least action, valid even where the conditions depend on t explicitly. But in Hölder's method we give up, in many cases, the supposition that the δ-process *is* a process of variation, strictly speaking. On the other hand, we shall next see how, even when the

---

*) Cf. § 3 below.

**) See Hölder, „Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis", Gött. Nachr., 1896, pp. 122—157 and § 3 below. Only Réthy's manner of expression leads to the confusion of his view with that of Ostrogradsky; in reality, his view is that of Rodrigues and Mayer (1886), and, under these limitations and extensions as to the equations of condition, of Hölder. Hölder's general principle is

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + 2T \frac{d \delta t}{dt} + \delta' U \right) dt = 0,$$

Hamilton's principle results from this when the δ-process is further defined by the condition $\delta t = 0$, and the principle of least action results when the δ-process is defined, by the condition, $\delta' U = \delta T$ (δt is *not* zero). Thus these two last principles are fundamentally quite distinct. Further, it was indicated by Hölder that the transformation into general coordinates was to be carried out in the way developed in § 3 below.

conditions depend on t, a literally 'variational' process can be followed. This was done by Réthy and Voss, but earlier traces are found with Routh.*)

2.

We enter, now, more fully into the class (b) of questions.

Mathematicians have had to face the difficulties introduced into the formulation of the variational principles of mechanics by two generalising suppositions: that the equations of condition contain t explicitly; and that some of the equations of condition are not integrable (the mechanical system is not holonomous).**) Two methods have been proposed. The one, contained in germ in the works of Routh, and developed, apparently independently of Routh, by Réthy and, independently of Réthy but not of Routh, by Voss (1900), preserves the strictly variational character of the δ used even when the conditions contain t; the other, due to Hölder and followed by me in the formulation of the principles for general coordinates***), abandons the strictly variational character of the δ used†) —, although Hölder's 'variations' are closely connected with variations in the strict sense —, and then deduces, by somewhat simpler considerations††), a general 'variational' principle, including both a generalised Hamilton's principle and a generalised principle of least action, valid when *both* of our above generalising suppositions are made.

---

*) In his 'Rigid Dynamics' since 1877; cf. 6th ed. (1905) of Part II ('Advanced Part'), pp. 301 sqq.

**) Other generalising suppositions are: (1) The force-function depends explicitly on t, and also may on the $\dot{q}_\nu$'s; (2) no force-function exists, but the Q_ν's depend on the q_ν's alone; (3) the same, with the Q_ν's depending on the q_ν's and t, and possibly the $\dot{q}_\nu$'s; (4) the differential equations of condition are not linear (for example, if a point is constrained to move on the surface of a cone, the differential equation of condition is not linear when the point is at the apex); (5) the conditions are expressed by inequalities. Here we do not consider (1), (3), (4), or (5); but (2) is introduced here. Of course, strictly speaking, we can only have a *variation* (δU) if a force-function U exists.

***) Voss had *intended* to do this in his paper of 1900 but, without realising it, substituted Routh's (completely different) point of view of obtaining virtual displacement.

†) Hölder was quite conscious of this fact (see a note in Quart. Journ. of Math., 1904, p. 75).

††) I mean the deduction of a *virtual* displacement from the formula

$$\delta x = \sum_\nu \frac{\partial x}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t$$

in the form

$$\delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t.$$

The abandonment of the strict conception of a 'variation' may appear to be a disadvantage. But it seems to me that this is compensated by greater simplicity; while, in any case, when we come to deal with non-holonomous systems, we must abandon this strict conception, as was pointed out by Voss in 1884 and by others later, in somewhat different forms.*) Lastly, unless the conditions do not contain t, the form of Réthy and Voss requires a condition**) holding for δt at the limits $(t = t_0, t_1)$, whereas, in Hölder's generalised principle of least action, no such condition is required.

These advantages appeared to me — and still appear to me — to be decisive in choosing Hölder's process of 'variation' in these generalised principles in preference to the other***). But, when I stated†) that $\delta x - \frac{\partial x}{\partial t}\delta t$ is a virtual displacement and that $\delta x - \dot{x}\cdot\delta t$, the displacement used by Routh, Réthy, and Voss, is not, I had not realised that two funda-

*) C. Neumann (1888), Hertz (1894), Hölder (1896) und Appell (1898); see also Boltzmann, „Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik", Teil II, Leipzig 1904, pp. 30—34.

**) Namely, that

$$\left(2T - \sum_\nu \dot{q}_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)\delta t \Big|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

If the equations do not depend explicitly on t,

$$\sum_\nu \dot{q}_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = 2T,$$

and the above condition for δt at the limits of integration is unnecessary.

***) Hölder's 'variation' becomes a variation in the strict sence when: (1) Hamilton's principle is applied, and the conditions are holonomous; or (2) the principle of least action is applied, and the conditions are holonomous, and independent of t. With Réthy, as has been remarked, the variation is a literal one even when the last restriction in (2) is taken away.

†) Quart. Journ. of Math., 1904, pp. 72, 75; Math. Ann. Bd. 62, 1906, pp. 415, 417—418.

Réthy's remark (Math. Ann. Bd. 64, 1907, pp. 156—157) that my statement that $\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\cdot dt = 0$ is only true, without further discussion, if the conditions do not contain t explicitly, is correct if δ is a *literal* variation; not correct if (as I assumed) δ is a Hölder's 'variation'. It would have been better not to write $\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\cdot dt = 0$, but to keep the form: $\int_{t_0}^{t_1}(2T\cdot d\delta t + 2\delta_1 T\cdot dt) = 0$, where $\delta_1 T$ is a 'variation' (not strictly speaking) defined by Hölder's process; but I followed Hölder's precedent, and also that in Encykl. der math. Wiss. IV 1, p. 93.

My investigations (Quart. Journ. of Math., 1905, pp. 290—294) also use Hölder's δ-process, exclusively.

mentally different kinds of 'variation' were used. That this is so, I trust I have made quite clear in the present paper: it seems that this fact has hitherto been overlooked, or only perceived obscurely. For my own part, this only became quite clear to me in consequence of two letters which Prof. Hölder wrote to me*), in which he communicated the results of an examination of the matter, which he had kindly undertaken with a view to clearing up the dispute between Réthy and myself. I desire here to record my grateful thanks to Prof. Hölder. My contribution to Hölder's method is the remark (§ 3) that the Hölder's variation of T in the form I gave can be expressed in the same form when T is replaced by (T), the same function when reduced by means of the finite conditions (which may depend on t explicitly.) This remark was necessary and sufficient for the formulation of Hölder's general principle in general coordinates**), for it showed that, in this respect, Hölder's generalised 'variations' behaved like ordinary variations.***)

I now proceed to a discussion of those virtual displacements used by Routh, Voss, and Réthy, as compared with those used by Hölder and myself.

When writing down†) the result of varying his fundamental integral when rectangular coordinates, between which equations of condition subsist, are used, Routh made the important remark ††), which we shall find used by Voss, that $\delta x - \dot{x}\,\delta t$, — the projection on the x-axis of the displacement of the particle m from its position in the actual motion at the time t to its position in the neighbouring motion *at the same time*, — is a virtual displacement. In fact, suppose that, by means of the equations of condition, each x can be expressed as a function of k mutually independent parameters $q_1, q_2, \cdots, q_k$ and t:

---

*) On Aug. 16th and Sept. 1st and 3rd, 1907.

**) Analogously, Voss and Réthy remarked that, where δ' is the operator $\delta - \frac{d}{dt}\cdot\delta t$, δ being a literal variation, δ' is a literal variation, so that it acts on both T and the above (T) in the same way.

***) In this paper, I always use *dots* to denote total differential quotients with respects t, and $\delta' U$ is used as *an abbreviation merely* of $\sum_r X_r \cdot \delta x_r$, without any implication that a force-function U exists.

†) Op. cit., art. 446, p, 303.

††) Ibid. I controverted this remark in Quart. Journ. of Math., 1904, p. 75, and Math. Ann. Bd. 62, 1906, pp. 417—418, because I was under the impression that, with Routh, δx is defined by $\sum_\nu \frac{\partial x}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \frac{\partial x}{\partial t}\delta t$, the q_ν's being generalised coordinates; $\delta x - \frac{\partial x}{\partial t}\delta t$ is then the only expression for a virtual displacement. But see the above text, and introduction.

(4) $$x_r = \varphi_r(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad r = 1, 2, \cdots, 3n^*),$$

then, where x is varied by varying the q's and t,

(5) $$\delta x_r = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \delta t,$$

while

(6) $$\dot{x}_r = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t}.$$

A *virtual* displacement $(\delta_1 x)$ of x is one which is given by

$$\sum_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} \delta q_\nu^{(1)},$$

where the $\delta^{(1)} q$'s are *any* variations of the q's. One such is given by

$$\delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t;$$

but another can be found by choosing, instead of the δq's used in some *definite* set (of $3n$ equations) of the equations (5), *other* variations of the q's. For, noticing that, by (5) and (6),

$$\delta x - \dot{x} \cdot \delta t = \sum_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} (\delta q_\nu - \dot{q}_\nu \cdot \delta t),$$

the terms of which $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ is a factor vanishing, we see that $\delta x - \dot{x}\delta t$ is virtual. The variation δx is then defined as follows: Consider any definite set of variations $\delta' q_1, \delta' q_2, \cdots, \delta' q_k, \delta' t$; form the new set $\delta' q_1 - \dot{q}_1 \cdot \delta' t, \cdots, \delta' q_k - \dot{q}_k \cdot \delta' t$, — which are *eo ipso* 'virtual'**); — then

$$\sum_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} (\delta' q_\nu - \dot{q}_\nu \cdot \delta' t)$$

represents a virtual displacement of x which we will call $\delta_1' x$. Then $\delta' x$ is defined as $\delta_1' x + \dot{x}\delta' t$; it is literally a 'variation' (which $\delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t$ is not). All the particular variations δ' form a class; in propositions about *any* member (a 'variable' member, as we say), of this class, the accent may evidently be dropped.

---

*) For the extension to the case where some of the conditions are differential, see below.

**) By this, I mean that, since the displacement of any coordinate is 'virtual' if it satisfies the equations of condition at the instant, *any* displacement of the generalised coordinates is consistent with the equations of condition subsisting between them, — for there are no such equations of condition.

We see, then, that when the conditions are holonomous, given in the form (4), the process of variation used in Hamilton's principle is, in every case, a literal variation; in the principle of least action, on the other hand, the variation is only a literal one if the equations of condition are explicitly independent of t.

Now, Réthy, by considerations closely connected with those of Routh, made the important remark that the principle of least action can be so formulated that it is a problem of literal variations even when the conditions contain t explicitly.*)

Réthy also used a literal variation; his fundamental identity is**), where Φ is a function of the q's, $\dot{q}$'s, and t,

$$(7)\quad \delta(\Phi\cdot dt) - d\left(\Phi\cdot\delta t + \sum_{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_\nu}\delta' q_\nu\right) \equiv \sum_{\nu}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_\nu}\right)\delta' q_\nu\cdot dt,$$

where here

$$(8)\quad \delta' q_\nu \equiv \delta q_\nu - \dot{q}\cdot\delta t.$$

If we add to the identity (7) the identity

$$\delta(\Phi\cdot dt) - d(\Phi\cdot\delta t) \equiv \delta'\Phi\cdot dt,$$

where $\delta'\Phi$ is formed in analogy with (8), put $\Phi = T$, and integrate the result between t_0 and t_1, we get the (Voss') theorem together with Réthy's completion of it***):

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\cdot dt \equiv \int_{t_0}^{t_0}\sum_{\nu}\left(Q_\nu + \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\nu}\right)\delta' q_\nu\cdot dt$$

---

*) This aspect of Réthy's work previously escaped me. I tacitly used Hölder's process of 'variation', while Réthy (strictly speaking, correctly) did not admit that it was a 'variation' at all (on this point, of which Hölder was perfectly conscious, see Quart. Journ. of Math., 1904, p. 75, note). Thus I wrongly attributed to Réthy, Routh and Voss certain errors. In fact, I assumed, and still assume, the greater importance of Hölder's method of forming a concept of a (not literal) variation which remains valid for non-holonomous systems; no literally variational process being capable of this.

**) Math. Ann. Bd. 58, 1904, p. 173. I only know of his earlier (1895—1896) work from this paper.

A somewhat more general formulation, brought about by adding c times the dentity $\delta(\Phi\cdot dt) - d(\Phi\cdot\delta t) \equiv \delta'\Phi\cdot dt$, c being an arbitrary constant, to (7) was given by Réthy in ibid., Bd. 64, 1907, pp. 157—158.

***) Voss' theorem cannot be inverted (see Math. Ann. Bd. 58, 1904, pp. 174—175), and the above invertible theorem was given in ibid., pp. 175—176 and Bd. 64, 1907, pp. 157—158.

if δt_0 and δt_1 are determined according to the equation

$$\left| 2T\cdot\delta t + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}\delta' q_\nu \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta' T - \sum_\nu Q_\nu \cdot \delta' q_\nu\right) dt = 0.$$

If this latter equation is satisfied for any time t_1, and if the ratios $\frac{\delta q_\nu}{\delta t}$ are subject to the equations of condition subsisting between the $\dot q_\nu$'s, then

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\cdot dt$$

vanishes when, and only when, the motion is the natural one.

Voss*) proposed to apply Hölder's process of thought to the case of quite general coordinates, which Hölder**) had only briefly indicated. In view of this explicit declaration, it is surprising to see Hölder's concept of 'variation'***) nowhere used. However, Voss' method, though it is not described by him with all the clearness possible, can be understood as a solution of the problem of finding expressions such that variations (in the literal sense) of them give the equations of motion. And this had been done, in a similar way, by Réthy.

Suppose that the equations of condition are partly in the form of linear differential equations. Thus, the finite equations (which may depend explicitly on the time) being satisfied by k parameters q_ν, there also subsist l differential equations of the form

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} p_{\mu,\nu}\, dq_\nu + p_\mu\, dt = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, l$$

where the p's are functions of the q's and t.

Considering T as a function of these n q_ν's and t, Voss obtained†) where δ is a literal variation,

---

*) „Über die Principe von Hamilton und Maupertuis" [July, 1900], Gött. Nachr., Math.-Phys. Klasse, 1900, pp. 322—327. We need not here consider the special case first (§ 1) considered by Voss, that the conditions do not depend on t explicitly; but will at once proceed to the general case.

**) *Loc. cit.*, p. 14, note.

***) The $\delta x - \frac{\partial x}{\partial t}\delta t$ of §§ 2 and 6.

†) Correcting a few slips in his calculation.

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}2T\cdot dt \equiv \int_{t_0}^{t_1}(2\delta T\cdot dt + 2T\cdot d\delta t) \equiv \left|\sum_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}\delta q_\nu + \left(2T - \sum_\nu \dot q_\nu \frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}\right)\delta t\right|_{t_0}^{t_1}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}dt\left\{\delta T - \dot T\cdot\delta t + \sum_\nu\left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}\right)(\delta q_\nu - \dot q_\nu\cdot\delta t)\right\},$$

where the δq_ν's are subject to the equations

$$\sum_{\nu=1}^{k} p_{\mu,\nu}\,\delta q_\nu + p_\mu\,\delta t = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots, l.$$

It is evident that Hölder's line of thought is quite abandoned, and that of Routh and Réthy adopted. It was necessary, to make the above identity serve in a mechanical theorem, to so arrange that $\delta q_\nu - \dot q_\nu\cdot\delta t$ should correspond to a virtual displacement.

A virtual displacement is any system of displacements $\delta_1 q_1, \delta_1 q_2, \cdots, \delta_1 q_k$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{k} p_{\mu,\nu}\,\delta_1 q_\nu = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots, l. \tag{10}$$

By combining*) (9), multiplied by δt, and (10), we get

$$\sum_{\nu=1}^{k} p_{\mu,\nu}(\delta_1 q_\nu + \dot q_\nu\cdot\delta t) + p_\mu\,\delta t = 0;$$

if, then, we define a new — not a virtual**) — displacement by the relations

$$\delta q_\nu = \delta_1 q_\nu + \dot q_\nu\cdot\delta t,$$

*) The following elucidations of Voss' not very clearly expressed method are taken from letters of Prof. Hölder's to me (dated 16. VIII. 1907 and 1. IX. 1907).

**) If all the n q_ν's were *mutually independent*, then *any* system of variations given to them would result in a virtual displacement of the mechanical system and any real variation of a q_ν is *eo ipso* virtual, as remarked in the note on p. 417 of the Math. Ann. Bd. 62. Réthy wrongly attributed (ibid., Bd. 64, p. 158) to me the remark that $\delta q_\nu - \dot q_\nu\cdot\delta t$ is not, in general, virtual: what I said (ibid., Bd. 62, pp. 418—419) was that, if δx is any variation (affecting t also, and defined by

$$\delta x = \sum_\nu\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \frac{\partial x}{\partial t}\delta t\right)$$

of x, $\delta x - \dot x\cdot\delta t$ is not virtual, — for $\delta x - \dfrac{\partial x}{\partial t}\delta t$ is. The question as to whether a certain displacement of a coordinate is 'virtual' or not can only arise when the coordinate is not independent.

Here the general case is considered: the q's fix the position of the system at the time t — and, indeed, over-determine it, for further equations of condition, which need not be integrable, hold between the dq's.

so that

$$\delta_1 q_\nu = \delta q_\nu - \dot{q}_\nu \cdot \delta t,$$

then the δq's and δt satisfy the same equations that the dq's and dt do in the actual motion; that is to say, we have

$$\sum_{\nu=1}^{k} p_{\mu,\nu} \cdot \delta q_\nu + p_\mu \cdot \delta t = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots, l.$$

If some of the relations (9) are integrable, that is to say, can be put in the form

$$d\varphi_\mu(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) = 0,$$

then *these* relations can be shown to subsist also for

$$(11) \qquad q_1 + \delta q_1,\ q_2 + \delta q_2, \cdots, q_k + \delta q_k, \quad t + \delta t,$$

so that equations of condition given in a finite (integrable) form subsist also for a motion varied in the manner represented by (11). For a holonomous system, then, the motion varied in this way is a possible one, even when the conditions depend explicitly on t and δt is not zero.

Thus, Voss imagines, instead of the varied motion brought about by virtual displacements (considered by Hölder and myself), another fictitious motion, represented by (11), and, concludes that, for such a varied path, the quantity δT can be found by direct variation of the expression T, and that this is also correct when the expression for T is simplified by the finite equations of condition.

Hence, we get Voss' theorem*):

If $\delta'(\ )$ denotes the operator $\delta(\ ) - \frac{d(\ )}{dt}\delta t$; then, if the equations

$$(12) \qquad \delta' T = \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu \cdot \delta' q_\nu,$$

$$\left| 2T \cdot \delta t + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} \delta' q_x \right|_{t_0}^{t_1} = 0,$$

are considered to be conditions for the virtual displacement $\delta' q_\nu$ and for the δt's at the times t_0 and t_1, then

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot \delta t$$

*) First stated *exactly* by Réthy.

becomes the integral

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\nu=1}^{n} \left(Q_\nu + \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} \right) \delta' q_\nu,$$

where the $\delta' q_\nu$'s are subject to the equations (10) and (12).

3.

I now come to my own derivation of the equations of motion in quite general coordinates from Hölder's general principle.

Suppose that there are l equations between the $3n$ x_r's, and t of the form

(13) $$\Psi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}, t) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, l,$$

and suppose that these finite equations are all identically satisfied by k parameters $q_1, q_2, \cdots, q_k$, where $k = 3n - l$. Thus we have $3n$ equations:

(14) $$x_r = \varphi_r(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \qquad r = 1, 2, \cdots, 3n.$$

Let us further suppose that there are, besides (13), l' non-integrable relations between the dx's and dt, or, what comes to the same thing, l' relations

(15) $$\sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu^{(i)} \cdot dq_\nu + \zeta^{(i)} \cdot dt = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots l'$$

between the dq's and dt.

The variation, δT, of T is

$$\sum_{r=1}^{3n} m_r \dot{x}_r \frac{d\delta x_r}{dt} - 2T \frac{d\delta t}{dt},$$

and, in the principle of Hölder:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T - 2T \cdot \frac{d\delta t}{dt} + \delta' U \right) dt = 0,$$

these displacements δx_r are restricted to represent *virtual* displacements. If we use the equations (14) to eliminate the $\dot{x}_r$'s from T, T becomes, we will say, (T), a function, in general, of the q's, $\dot{q}$'s, and t*), and whereas, then, a *variation* of x_r:

*) This distinction of T and (T) is useful, for we have:

$$\frac{\partial T}{\partial x_r} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \qquad \sum_{r=1}^{3n}{}' \dot{x}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r} = 2T;$$

(16) $$\delta x_r = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} \delta t$$

is not, in general, a virtual displacement, since a displacement $(\delta_1 x_r)$ is only virtual if displacements $\delta_1 q_1, \delta_1 q_2, \cdots, \delta_1 q_k$ exist such that

(17) $$\delta_1 x_r = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} \delta_1 q_\nu$$

where

(18) $$\sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu^{(i)} \delta_1 q_\nu = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, l'.$$

For a definite set of the variations δq_ν, δt used in (16), the displacement

(19) $$\delta x_r - \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \delta t,$$

which, however, is not a 'variation' in the strict sense of the word, is virtual with respect to the finite equations (14), that is to say, if we disregard, for the moment, the differential conditions (15) and the conditions (18) that the displacement of the q_ν's must satisfy when (15) are considered. In this case the δT in Hölder's principle, does *not* become a variation of (T), such that

(20) $$\delta(T) = \sum_\nu \left(\frac{\partial(T)}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_\nu} \delta \dot{q}_\nu \right) + \frac{\partial(T)}{\partial t} \delta t,$$

but what

$$\delta T \equiv \sum_r m_r \dot{x}_r \frac{d \delta x_r}{\partial t} - 2T \frac{d \delta t}{dt}$$

becomes when for the δx_r's are put the virtual displacements given by (19), so that the δT in Hölder's principle becomes, in terms of (T),

---

whereas we do *not*, in general, have:

$$\frac{\partial(T)}{\partial q_\nu} = 0, \quad \frac{\partial(T)}{\partial t} = 0, \quad \text{or} \quad \sum_{\nu=1}^{k} \dot{q}_\nu \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_\nu} = 2(T).$$

However, when the conditions do not contain t, we have

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \dot{q}_\nu \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_\nu} = 2(T);$$

though the second equality is not a consequence of the first.

$$\sum_r m_r \dot{x}_r \frac{d}{dt}\Big(\sum_\nu \frac{\partial x_r}{\partial q_\nu}\delta q_\nu\Big) - 2(T)\frac{d\delta t}{dt}$$

$$\equiv \sum_\nu \Big(\frac{\partial (T)}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{d\delta q_\nu}{dt}\Big) - 2(T)\frac{d\delta t}{dt}{}^{*)},$$

which, when transformed into

$$\sum_\nu \Big(\frac{\partial (T)}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_\nu}\delta \dot{q}_\nu\Big) + \Big(\sum_\nu \dot{q}_\nu \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_\nu} - 2(T)\Big)\frac{d\delta t}{dt} \tag{21}$$

shows, by comparison with (20), that this expression (21) is not a literal variation of (T). What I remarked**) was that the δT***) in Hölder's principle (19) can be expressed in the form (21), which, as we shall see, makes the introduction of general coordinates easy, even though we have not to deal with variations properly so called, when T is reduced to (T) by the finite equations of condition, which, in general, contain t explicitly.

Since, then also, the $\delta' U$ in Hölder's general principle transforms into $\sum_\nu Q_\nu \cdot \delta q_\nu$ by (16) and (19), and introducing now the differential conditions, Hölder's principle, where the δx's are subject to the conditions (17) and (18), transforms into the principle

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\nu \Big(Q_\nu + \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\Big)\delta q_\nu = 0,$$

where the δq_ν's are subject to the conditions

$$\sum_\nu \zeta_\nu^{(i)} \cdot \delta q_\nu = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, l'.$$

From these equations we get, in the well-known way, the equations of motion to be

$$Q_\nu + \frac{\partial (T)}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{i=1}^{l'} \lambda \cdot \zeta^{(i)} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \cdots, k,$$

where the λ's are Lagrange's multipliers.

The Manor House, Broadwindsor, Dorset. Dec. 30th, 1907 and March 10th, 1908.

---

*) In this deduction, we make use of the *finite* (non-differential) character of the equations (14) by putting

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q}.$$

It is for the reason that we use these equations that we consider first exclusively the holonomous part of the conditions.

**) Prof. Hölder tells me that he had not remarked this (Sept. 3rd, 1907).

***) Denoted $\delta_1 T$ by me in Math. Ann. Bd. 62, 1906, p. 416.

Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt.

Von

Nicolaus Kowalewski in Göttingen.

Die Untersuchung der klassischen Fälle von Euler und Lagrange bildete bis zum Ende der achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts den einzigen Gegenstand der Kreiseltheorie.

Das Erscheinen der Preisarbeit von Frau S. v. Kowalewski im Jahre 1889*) eröffnete in der Entwicklung der Kreiseltheorie eine neue Periode.

Die Frage nach der Existenz neuer Fälle, in welchen die Eulerschen Gleichungen durch Quadraturen oder klassische Funktionen lösbar sind, war seitdem in die Theorie aufgenommen, und einige neue Fälle der Integrabilität wurden aufgedeckt.

Die neueren Arbeiten beschäftigen sich fast ausschließlich mit der Aufsuchung partikulärer Fälle, in welchen die Integration der Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt vollständig durchgeführt werden kann. Die wichtigsten Untersuchungen rühren her von Heß, Staude, Stekloff, Bobyleff, Goriatschoff, Tschaplygin, Schiff und Husson.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß der Schwerpunkt des Kreisels auf einer der Hauptachsen des Trägheitsellipsoides liegt. Für einen Kreisel dieser Art haben Stekloff, Goriatschoff und Tschaplygin unter verschiedenen weiteren Bedingungen drei partikuläre Lösungen gefunden**),

*) „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe", Acta Mathematica, Bd. 12.

**) Moskau, Arbeiten der phys. Sektion der kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde: Stekloff, „Eine neue partielle Lösung der Bewegungsgleichungen eines schweren starren Körpers mit einem unbeweglichen Punkt", Bd. 10, Lief. 2, 1899; Goriatschoff, „Neue Lösung . . .", Bd. 10, L. 2, 1899; Tschaplygin, „Neue

welche nach einer gewissen Ähnlichkeit im analytischen Charakter in eine Klasse zusammengefaßt werden können. Die Methode, welche im folgenden angegeben ist, erlaubt die Lösungen von Stekloff, Goriatschoff und Tschaplygin und außerdem noch eine neue Lösung auf einheitlichem Wege herzuleiten. Als einer der wesentlichen Unterschiede ist der Umstand zu bezeichnen, daß die genannten drei Lösungen auf elliptische Funktionen führen, während in dem neuen Falle ultraelliptische Funktionen auftreten.

Die Eulerschen Gleichungen der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt können unter der gemachten Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes in folgender Form geschrieben werden:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{b-c}{a}\, qr \\[2mm] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{c-a}{b}\, rp + \dfrac{\xi}{b}\,\gamma'' \\[2mm] \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{a-b}{c}\, pq - \dfrac{\xi}{c}\,\gamma' \\[2mm] \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \\[2mm] \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \\[2mm] \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{cases}$$

Durch p, q, r sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet und durch γ, γ' und γ'' die Richtungskosinus der Vertikalen; alles in bezug auf Koordinatenachsen, die im Körper fest liegen. Die Konstanten a, b, c sind die Quotienten der Hauptträgheitsmomente durch das Gewicht und ξ, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Koordinaten des Schwerpunktes.

Wir werden uns zunächst mit der Transformation des Systems (1) beschäftigen.

Wir betrachten das allgemeine System:

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

und das System:

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i + X_i' \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Es sei außerdem:

Lösung . . .", Bd. 12, L. 1, 1904. Die Lösungen von **Bobyleff-Stekloff** vom Jahre 1895 und von **Goriatschoff-Tschaplygin** vom Jahre 1899 kommen hier nicht in Betracht. S. auch „Fortschritte der Mathematik" und den Bericht von **Stäckel** in der „Encyklopädie der math. Wiss".

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; C_1, C_2, \cdots, C_n; t) = 0$$

irgend ein Integral des Systems (2). Die Grundgleichung der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten, die in der Störungstheorie die Hauptrolle spielt, lautet:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i' \right) = 0. \tag{4}$$

Die Größen $C_1, C_2, \cdots, C_n$, die Lagrange zum Zwecke der Vereinfachung des Systems (3) als neue Variabeln eingeführt hat, sind bekanntlich durch die n Integralbeziehungen des Systems (2) bestimmt.

Als Vergleichsobjekt wählen wir in unserem Probleme die Eulersche Bewegung, während in der Störungstheorie als Vergleichsobjekt die Keplersche Bewegung auftritt.

Die Differentialgleichungen der Bewegung von Euler-Poinsot:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{b-c}{a} qr \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{c-a}{b} rp \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{a-b}{c} pq \end{cases} \tag{5}$$

haben die folgenden von der Zeit unabhängigen Integrale:

$$\frac{b-c}{a} q^2 - \frac{c-a}{b} p^2 = C_1, \tag{6}$$

$$\frac{b-c}{a} r^2 - \frac{a-b}{c} p^2 = C_2. \tag{7}$$

Wenn wir die ersten drei Gleichungen des Systems (1) mit den Gleichungen (5) vergleichen und die Terme $\frac{\xi}{b}\gamma''$ und $-\frac{\xi}{c}\gamma'$ als Zusatzglieder auffassen, so werden wir der Methode der Variation der Konstanten gemäß dazu geführt, die Größen C_1 und C_2, die durch die Gleichungen (6) und (7) definiert sind, als neue Veränderliche zu wählen.

Die Anwendung des Fundamentalsatzes (4) auf die Gleichungen (6) und (7) führt zu den Gleichungen (8) und (9):

$$\gamma'' = \frac{b}{2\xi} C_1' r, \tag{8}$$

$$\gamma' = -\frac{c}{2\xi} C_2' q. \tag{9}$$

Durch Accente bei C_1 und C_2 sind die Differentiationen nach p bezeichnet. Wir wollen C_1 und C_2 als Funktionen von p betrachten.*)

*) Das ist immer möglich abgesehen von dem Falle $p =$ Const., welcher zu der Lösung von Bobyleff-Stekloff (1895) führt; deshalb fällt dieser Fall aus den Rahmen der folgenden Untersuchung heraus.

Die Gleichungen (8) und (9) können wir einfach als Resultate der Differentiation der Gleichungen (6) und (7) nach t auffassen.

Über die mechanische Bedeutung der eingeführten Variabeln C_1 und C_2 ist folgendes zu sagen. C_1 und C_2 sind lineare homogene Kombinationen der Energie des Körpers und des Quadrates der Länge des Momentes der Bewegungsgröße um den Ursprung, wir haben:

$$bC_1 + cC_2 = \frac{b-c}{a}(ap^2 + bq^2 + cr^2), \tag{10}$$

$$b^2C_1 + c^2C_2 = \frac{b-c}{a}(a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2). \tag{11}$$

Anderseits können wir C_1 und C_2 als oskulierende Elemente auffassen, denn die Bewegung des Endpunktes der Winkelgeschwindigkeit um den Unterstützungspunkt ist hier der Bewegung eines Himmelskörpers um die Sonne vollkommen analog, so daß wir von der oskulierenden Polhodie ebenso sprechen können wie es üblich ist von der oskulierenden Bahn zu sprechen.

Mit Hilfe des Energieintegrales und der Gleichung (10) finden wir für γ folgenden Ausdruck:

$$\gamma = \frac{1}{2\xi}\left[h - \frac{a}{b-c}(bC_1 + cC_2)\right], \tag{12}$$

wo h die Energiekonstante bedeutet.

Wir differenzieren die durch Differentiation aus (6) und (7) erhaltenen Gleichungen (8) und (9) noch einmal nach t und beachten die Gleichungen (1); wir erhalten:

$$-b\frac{b-c}{a}r^2C_1'' - bC_1'\left(\frac{a-b}{c}p + \frac{1}{2}C_2'\right) + cpC_2' + 2\xi\gamma = 0, \tag{13}$$

$$c\frac{b-c}{a}q^2C_2'' + cC_2'\left(\frac{c-a}{b}p + \frac{1}{2}C_1'\right) + bpC_1' - 2\xi\gamma = 0. \tag{14}$$

Auf diese Weise werden die Kosinus γ' und γ'' eliminiert. Die Elimination von q^2, r^2 und γ aus den Gleichungen (13) und (14) mit Hilfe der Gleichungen (6), (7) und (12) gibt das folgende System von zwei Gleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der neuen Variabeln C_1 und C_2 in ihrer Abhängigkeit von p:

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned} & b\left(C_2 + \frac{a-b}{c}p^2\right)C_1'' + bC_1'\left(\frac{a-b}{c}p + \frac{1}{2}C_2'\right) - cpC_2' \\ & \qquad\qquad + \frac{a}{b-c}(bC_1 + cC_2) - h = 0, \\ & c\left(C_1 + \frac{c-a}{b}p^2\right)C_2'' + cC_2'\left(\frac{c-a}{b}p + \frac{1}{2}C_1'\right) + bpC_1' \\ & \qquad\qquad + \frac{a}{b-c}(bC_1 + cC_2) - h = 0. \end{aligned} \right.$$

Es ist zweckmäßig noch eine Transformation auszuführen. Wir setzen:

$$C_1 + \frac{c-a}{b} p^2 = \sigma, \tag{16}$$

$$C_2 + \frac{a-b}{c} p^2 = \tau. \tag{17}$$

Das System (15) geht dabei in das System (18) und die Gleichungen (6), (7), (8), (9) und (12) in die Gleichungen (19) über:

$$(18)\quad \begin{cases} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\tau'\sigma' + \frac{a-2c}{b} p\tau' + \frac{a}{b-c}\sigma + \frac{1}{b}\left[\frac{ac}{b-c} - 2(c-a)\right]\tau \\ \qquad\qquad + \frac{3a-2b}{b} p^2 - \frac{h}{b} = 0, \\ \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + \frac{2b-a}{c} p\sigma' + \frac{a}{b-c}\tau + \frac{1}{c}\left[\frac{ab}{b-c} - 2(a-b)\right]\sigma \\ \qquad\qquad + \frac{3a-2c}{c} p^2 - \frac{h}{c} = 0, \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{b-c}{a} q^2 = \sigma, \\ \frac{b-c}{a} r^2 = \tau, \\ \gamma'' = \frac{b}{2\xi}\left(\sigma' - 2\frac{c-a}{b} p\right) r, \\ \gamma' = -\frac{c}{2\xi}\left(\tau' - 2\frac{a-c}{c} p\right) q, \\ \gamma = \frac{1}{2\xi}\left[h - \frac{a}{b-c}(b\sigma + c\tau) - ap^2\right]. \end{cases}$$

Jeder Lösung des Grundsystems (18) wird das System (19) der fünf zeitfreien Integrale der Eulerschen Gleichungen entsprechen, und wir werden dieses System durch Substitution von $\sigma(p)$ und $\tau(p)$ in die Gleichungen (19) erhalten.

Das sechste Integral ist nach (1) und (19) durch eine Quadratur:

$$t + \text{const.} = \int \frac{dp}{\sqrt{\sigma\tau}} \tag{20}$$

gegeben.

Wir wollen die Integrale des Systems (18) in der Umgebung der Stelle $p = 0$ in Potenzreihen von der Form:

$$(21)\quad \begin{aligned} \sigma &= p^k \sum_0^\infty \alpha_m p^m, \\ \tau &= p^k \sum_0^\infty \beta_n p^n \end{aligned}$$

entwickeln.

Wir schreiben das System (18) in der Form:

$$(22)\quad \begin{cases} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\tau'\sigma' + Mp\tau' + M_1\sigma + M_2\tau + M_3p^2 + M_4 = 0, \\ \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + Np\sigma' + N_1\tau + N_2\sigma + N_3p^2 + N_4 = 0. \end{cases}$$

Die Einsetzung der Reihen (21) in die erste Gleichung des Systems (22) gibt:

$$(23)\quad \begin{aligned} & p^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_m\beta_n[(k+m)(k+m-1)+\frac{1}{2}(k+m)(k+n)]p^{m+n} \\ & +p^k\sum_{l=2}^{\infty}[M\beta_{l-2}(k+l-2)+M_1\alpha_{l-2}+M_2\beta_{l-2}]p^l+M_3p^4+M_4p^2=0. \end{aligned}$$

Das Resultat der Einsetzung in die zweite Gleichung des Systems (22) braucht nicht explizite hingeschrieben zu werden, da es durch einfache Vertauschung folgt; man braucht nämlich nur in (23) $M, M_1, \cdots;\ \alpha$ durch bezw. $N, N_1, \cdots;\ \beta$ zu ersetzen.

Die Glieder mit den kleinsten Exponenten in (23) sind:

$$\alpha_0\beta_0\left[k(k-1)+\frac{1}{2}k^2\right]p^{2k},$$
$$(M\beta_0k+M_1\alpha_0+M_2\beta_0)p^{k+2},$$
$$M_4p^2,$$

Da jetzt von Spezialisierung der Konstanten oder der Anfangsbedingungen noch keine Rede ist, so sind also Werte $k>1$ ausgeschlossen. Im Falle $k<1$ sind nur Werte, die der determinierenden Fundamentalgleichung:

$$(24)\qquad k(3k-2)=0$$

genügen, zulässig.

Wir wollen hier den Fall einer holomorphen Entwicklung mit $k=0$ betrachten.

Aus (23) direkt und durch Vertauschung erhalten wir die Rekursionsformeln:

$$(25)\quad \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{m=l}\alpha_m\beta_{l-m}m\left[\frac{1}{2}(l+m)-1\right]+M\beta_{l-2}(l-2)+M_1\alpha_{l-2}+M_2\beta_{l-2} \\ & \qquad +\lambda_lM_3+\mu_lM_4=0, \qquad\qquad (l=2,3,\cdots) \\ & \sum_{m=1}^{m=l}\beta_m\alpha_{l-m}m\left[\frac{1}{2}(l+m)-1\right]+N\alpha_{l-2}(l-2)+N_1\beta_{l-2}+N_2\alpha_{l-2} \\ & \qquad +\lambda_lN_3+\mu_lN_4=0, \end{aligned}$$

wo $\lambda_4 = 1$ und $\mu_2 = 1$ sind, während für alle übrigen Werte von l die Größen λ_l und μ_l verschwinden. Die erste der Gleichungen (25) enthält von den höchsten Koeffizienten β_l nicht und α_l linear, während die zweite nur β_l enthält. Die vier Konstanten α_0, β_0, α_1, β_1 bleiben willkürlich.*)

Wir wollen die Frage stellen, ob es möglich ist, daß bei besonderen Anfangsbedingungen und speziellen Werten der Konstanten die Transzendenten σ und τ in Polynome ausarten. So lange es sich nur um polynomische Lösungen handelt, braucht der Fall $k = 1$ nicht besonders betrachtet zu werden.

Wenn wir in der Entwicklung für σ bis zum Gliede mit dem Index d und in der Reihe für τ bis zur Potenz g gehen, und die übrigen Glieder weglassen, so werden wir im ganzen $d + g + 2$ Koeffizienten zur Verfügung haben. Außerdem können wir nur noch die Verhältnisse der Trägheitsmomente und die Energiekonstante h spezialisieren. Das gibt zusammen $d + g + 5$ Konstanten. Die entsprechende Anzahl der Gleichungen wird unter der Annahme, daß $d \gtreqless g$ und $d + g - 2 > d$ ist, gleich

$$2\{(d+g-2) + 1\} - 1 = 2(d+g) - 3$$

sein. Die Differenz zwischen der Anzahl der Konstanten und der Zahl der zu erwartenden Gleichungen ist somit durch die Formel:

$$D = 8 - d - g$$

gegeben.

Wir wählen $d = g = 3$, so daß die Zahl der Unbekannten um zwei die Zahl der Gleichungen übersteigt. Das ist die Voraussetzung, welche zu einer neuen Lösung führt.

Von den anderen Möglichkeiten will ich hier die folgenden anführen. Wenn wir $d = g = 2$ setzen, so führt unsere Methode auf den Fall, welcher von **Stekloff** (1899) angegeben war; die Hypothese $d = 4$, $g = 2$ gibt den Fall von **Goriatschoff** (1899); wenn man in den Entwicklungen von der Form: $\sum\limits_0^\infty \lambda_m p^m + p^{\frac{2}{3}} \sum\limits_0^\infty \mu_n p^n$, in welchen die Wurzeln von (27) als Exponenten auftreten, nur die ersten Glieder betrachtet, so ergibt sich die Lösung, die zuerst von **Tschaplygin** (1904) gefunden ist.

Die Gleichungen (27), die erfüllt sein müssen, damit σ und τ auf Polynome:

---

*) Vergl. die Reihen nach Potenzen von t von S. v. Kowalewski, bei welchen aber ein Versuch, die Rekursionsformeln aufzustellen, auf fast unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten stößt, und welche nur in vier speziellen Fällen die nötige Zahl von willkürlichen Konstanten enthalten; Acta math., Bd. 12 u. 14.

$$(26)\qquad \begin{aligned}\sigma &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3,\\ \tau &= \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \beta_3 p^3\end{aligned}$$

sich reduzieren können, werden wir aus den Rekursionsformeln (25) leicht erhalten:

$$(27)\begin{cases}
2\alpha_2\beta_0 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{a}{b-c}\alpha_0 + \frac{1}{b}\left[\frac{ac}{b-c} - 2(c-a)\right]\beta_0 - \frac{h}{b} = 0,\\
2\beta_2\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_1\alpha_1 + \frac{a}{b-c}\beta_0 + \frac{1}{c}\left[\frac{ab}{b-c} - 2(a-b)\right]\alpha_0 - \frac{h}{c} = 0,\\
6\alpha_3\beta_0 + 3\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \frac{a}{b-c}\alpha_1 + \frac{1}{b}\left[\frac{ac}{b-c} + 3a - 4c\right]\beta_1 = 0,\\
6\beta_3\alpha_0 + 3\beta_2\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \frac{a}{b-c}\beta_1 + \frac{1}{c}\left[\frac{ab}{b-c} + 4b - 3a\right]\alpha_1 = 0,\\
7\frac{1}{2}\alpha_3\beta_1 + 4\alpha_2\beta_2 + \frac{3}{2}\alpha_1\beta_3 + \frac{a}{b-c}\alpha_2 + \frac{1}{b}\left[\frac{ac}{b-c} + 4a - 6c\right]\beta_2 \\
\qquad\qquad + \frac{3a-2b}{b} = 0,\\
7\frac{1}{2}\beta_3\alpha_1 + 4\beta_2\alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_1\alpha_3 + \frac{a}{b-c}\beta_2 + \frac{1}{c}\left[\frac{ab}{b-c} + 6b - 4a\right]\alpha_2 \\
\qquad\qquad + \frac{3a-2c}{c} = 0,\\
9\alpha_3\beta_2 + 5\alpha_2\beta_3 + \frac{a}{b-c}\alpha_3 + \frac{1}{b}\left[\frac{ac}{b-c} + 5a - 8c\right]\beta_3 = 0,\\
9\beta_3\alpha_2 + 5\beta_2\alpha_3 + \frac{a}{b-c}\beta_3 + \frac{1}{c}\left[\frac{ab}{b-c} + 8b - 5a\right]\alpha_3 = 0,\\
10\frac{1}{2}\alpha_3\beta_3 = 0.
\end{cases}$$

Wir betrachten b, c und β_1 als bekannte Größen und die übrigen als Unbekannte.

Die Auflösung des Systems (27) gibt im Falle $\beta_3 = 0$ folgende Resultate:

$$(28)\qquad a = \frac{18b(b-c)}{9b-10c},$$

$$(29)\quad \alpha_0 = \beta_1^2\cdot\alpha_0' = \beta_1^2\frac{(b-c)(9b-10c)}{96b^3c(2c-3b)(4c-3b)}\{2187b^4 - 5832b^3c + 4131b^2c^2 - 30bc^3 - 488c^4\},$$

$$(30)\quad \beta_0 = \beta_1^2\cdot\beta_0' = \beta_1^2\frac{9(b-c)^2(9b-10c)}{8b(2c-3b)(4c-3b)},$$

$$(31)\quad \alpha_1 = \beta_1\cdot\alpha_1' = \beta_1\cdot\frac{1}{8b^2c}\{243b^3 - 648b^2c + 495bc^2 - 122c^3\},$$

$$(32)\quad \alpha_2 = \frac{(2c-3b)(81b^2 - 156bc + 61c^2)}{bc(9b-10c)},$$

(33) $\beta_2 = -\frac{2b}{9b-10c}$,

(34) $\alpha_3 = \beta_1^{-1}\cdot\alpha_3' = \beta_1^{-1}\cdot\frac{12(2c-3b)^2(3b-4c)}{c(9b-10c)^2}$,

(35) $\beta_3 = 0$,

(36) $H = \beta_1^2\cdot H' = \beta_1^2\cdot\frac{1}{16bc(3b-4c)}\{-2187b^4+8748b^3c-12879b^2c^2 + 8238bc^3-1888c^4\}$.

Dabei haben wir die Bezeichnung:

(37) $$H = h - \frac{a}{b-c}(b\alpha_0+c\beta_0)$$

eingeführt.

Die Beziehung (28) zwischen den Trägheitsmomenten ist verträglich mit der Bedingung, daß den Trägheitsmomenten die Seiten eines Dreieckes entsprechen. Zum Beispiel bei $c=2b$ ist nach (28) $a=\frac{18}{11}$. Die Bedingung (28) muß infolge der drei letzten Gleichungen des Systems (27) bestehen.

Durch die angegebene Auflösung des Systems (27) ist die Existenz algebraischer Integrale von der Form (26) nachgewiesen.

Auf Grund der Gleichungen (19) *und* (29)—(37) *können wir das partikuläre System der Integrale der ursprünglichen Eulerschen Gleichungen folgendermaßen schreiben:*

$$(38)\begin{cases}\frac{b-c}{a}q^2 = \alpha_0'\beta_1^2+\alpha_1'\beta_1 p+\alpha_2 p^2+\alpha_3'\beta_1^{-1}p^3,\\ \frac{b-c}{a}r^2 = \beta_0'\beta_1^2+\beta_1 p+\beta_2 p^2,\\ \gamma'' = \frac{b}{2\xi}\left[\alpha_1'\beta_1+2\left(\alpha_2-\frac{c-a}{b}\right)p+3\alpha_3'\beta_1^{-1}p^2\right]r,\\ \gamma' = -\frac{c}{2\xi}\left[\beta_1+2\left(\beta_2-\frac{a-b}{c}\right)p\right]q,\\ \gamma = \frac{1}{2\xi}\Big\{H'\beta_1^2-\frac{a}{b-c}[(b\alpha_1'+c)\beta_1 p+(b\alpha_2+c\beta_2+b-c)p^2\\ \qquad +b\alpha_3'\beta_1^{-1}p^3)]\Big\}.\end{cases}$$

Die Zeit ist nach (20) *durch eine ultraelliptische Quadratur gegeben:*

(39) $$t + \text{Const.} = \int\frac{dp}{\sqrt{(\alpha_0'\beta_1^2+\alpha_1'\beta_1 p+\alpha_2 p^2+\alpha_3'\beta^{-1}p^3)\cdot(\beta_0'\beta_1^2+\beta_1 p+\beta_2 p^2)}}.$$

Damit die Quadratsumme der Kosinus γ, γ' und γ'' beständig, und daher insbesondere bei $p=0$ gleich 1 wird, *müssen wir* β_1 *aus der Gleichung* (40) *bestimmen:*

(40) $$\left[\frac{a}{b-c}(b^2\alpha_1'^2\beta_0'+c^2\alpha_0')+H'^2\right]\beta_1^4 = 4\xi^2.$$

Es ist leicht zu sehen, *daß reelle Werte für* β_1 *und reelle Anfangswerte* q_0, r_0, γ_0, γ_0', γ_0'' *und* p_0, *die die Gleichungen* (38) *befriedigen, existieren.* Zum Beispiel können wir b und c so wählen, daß die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b-c}\alpha_0' > 0, \\ &\frac{a}{b-c}\beta_0' > 0 \end{aligned} \tag{41}$$

erfüllt sind; speziell für $c = 2b$ und in der Nähe dieses Verhältnisses sind diese Ungleichungen mit den Gleichungen (28), (29) und (30) verträglich.

Im Dezember 1907.

Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels.

Von

Paul Stäckel in Karlsruhe i. B.

§ 1.

Allgemeines über die Bewegungen eines schweren Kreisels.

Bei einem schweren starren Körper, der sich um einen festen Punkt O dreht, oder kürzer bei einem *schweren Kreisel*, werde *das im Körper feste Koordinatensystem der* x, y, z von drei aufeinander senkrechten Hauptträgheitsachsen im Punkte O gebildet, und es seien in bezug auf diese Achsen:

p, q, r die Komponenten der vektoriell aufgefaßten instantanen *Drehgeschwindigkeit* $\mathfrak{w}$ des Kreisels,

x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des *Schwerpunktes* S, s_0 die Länge der Strecke OS,

A, B, C die drei *Hauptträgheitsmomente* (die von Null verschieden sein sollen), sodaß Ap, Bq, Cr die Komponenten des vektoriell aufgefaßten *Drehmomentes* $\mathfrak{D}$ *des Impulses* sind,

c_1, c_2, c_3 die *Richtungskosinus der nach oben gerichteten Vertikalen.*

Es mögen ferner von dem Punkte O *die drei im Raume festen Achsen der* ξ, η, ζ ausgehen, und im besonderen sei die ζ-Achse die nach oben gerichtete Vertikale. Dann gelten die Gleichungen:

$$(1)\qquad c_1 = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c_2 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad c_3 = \cos\vartheta,$$

in denen nur zwei der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ auftreten. Endlich soll zur Vereinfachung das *Gewicht des Kreisels* gleich 1 gesetzt oder, was auf dasselbe herauskommt, mit A, B, C je ein durch das Gewicht des Körpers dividiertes Hauptträgheitsmoment bezeichnet werden.

Bei diesen Festsetzungen lauten die sogenannten *kinematischen Gleichungen*, die den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und den Eulerschen Winkeln ausdrücken:

$$
(2)\qquad \begin{cases} p = \sin\vartheta \sin\varphi \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ q = \sin\vartheta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ r = \qquad \cos\vartheta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}
$$

Dazu treten die *Eulerschen Gleichungen:*

$$
(3)\qquad \begin{cases} A\,dp/dt - (B - C)\,qr = z_0 c_2 - y_0 c_3, \\ B\,dq/dt - (C - A)\,rp = x_0 c_3 - z_0 c_1, \\ C\,dr/dt - (A - B)\,pq = x_0 c_1 - x_0 c_2. \end{cases}
$$

Die sechs Differentialgleichungen 1. O. (2) und (3) dienen zur Bestimmung der sechs unbekannten Funktionen $p, q, r;\ \vartheta, \varphi, \psi$ der Zeit t und liefern die ∞^6 *Bewegungen des schweren Kreisels.* Ihre Integration läßt sich jedoch auf die Integration eines einfacher gebauten Systems von Differentialgleichungen 1. O. zurückführen, das man folgendermaßen erhält.

Aus den beiden ersten kinematischen Gleichungen (2) folgt:

$$
(4)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p \sin\varphi + q \cos\varphi}{\sin\vartheta};
$$

mithin ist ψ durch eine Quadratur bestimmt, sobald man $p, q;\ \vartheta, \varphi$ als Funktionen der Zeit kennt. Da nun der Winkel ψ in den Ausdrücken (1) für die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 gar nicht vorkommt, so läßt sich das System der Gleichungen (2) und (3) durch die Gleichung (4) in Verbindung mit den Gleichungen (2) und den Gleichungen:

$$
(5)\qquad \begin{cases} dc_1/dt = rc_2 - qc_3, \\ dc_2/dt = pc_3 - rc_3, \\ dc_3/dt = qc_1 - pc_2 \end{cases}
$$

ersetzen.

In dem Sinne von C. G. J. Jacobi besitzen die Gleichungen (5) die *„Integralgleichung“:*

$$
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \text{const.};
$$

sollen die Größen c_1, c_2, c_3 Richtungskosinus sein, so muß der Integrationskonstanten der Wert 1 erteilt werden, und es ist dann

$$
(6)\qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.
$$

Von dem System der Gleichungen (3) und (5) kann man sofort noch zwei *„Integralgleichungen“* angeben, nämlich erstens die Gleichung der *lebendigen Kraft:*

$$
(7)\qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -(x_0 c_1 + y_0 c_2 + z_0 c_3) + h
$$

und zweitens die Gleichung:

$$
(8)\qquad Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3 = k,
$$

die besagt, daß die *Komponente des Impulsvektors* $\mathfrak{D}$ *nach der Vertikalen* während der betreffenden Bewegung den konstanten Wert k beibehält.

Für die genauere Begründung sei auf Nr. 36 des Artikels IV 6 *Elementare Dynamik* in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften verwiesen (Band IV, erster Teilband, S. 639—646).

§ 2.

Besondere Fälle des Kreiselproblems.

Wenn man von den Differentialgleichungen (3) und (5) noch eine vierte *„Integralgleichung"*:

$$f(p, q, r;\ c_1, c_2, c_3) = \text{const.}$$

kennt, so läßt sich ihre Integration mittels Quadraturen vollständig erledigen. Da es aber nicht gelang, bei willkürlichen Werten der *Konstanten der Massenverteilung* $x_0, y_0, z_0;\ A, B, C$ ein solches Integral zu finden, hat man gefragt, wie diese Konstanten gewählt werden müssen, damit es eine vierte Integralgleichung gibt, bei der die Funktion f *algebraisch* in den Geschwindigkeitskomponenten p, q, r ist; dabei soll die Zeit t in f nicht explizit vorkommen. Durch Ed. Husson*) ist diese Frage endgültig dahin beantwortet worden, daß es nur drei Fälle der verlangten Art gibt, nämlich:

1) den Fall des *kräftefreien Kreisels* (Euler 1760), in dem

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$$

ist;

2) den Fall des *schweren symmetrischen Kreisels* (Lagrange 1788), in dem *bei geeigneter Wahl der Bezeichnung*

$$A = B, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

ist;

3) den Fall von S. Kowalewski (1888), in dem

$$A = B = 2C, \quad z_0 = 0$$

ist.

In diesen drei Fällen lassen sich die Lagekoordinaten des Kreisels, also etwa die Eulerschen Winkel, mittels Quadraturen als Funktionen der Zeit darstellen, die neun willkürliche Konstanten enthalten, nämlich die willkürlichen Anfangswerte der Lagekoordinaten und ihrer ersten Ableitungen nach der Zeit und außerdem je drei Konstanten der Massenverteilung, die willkürlich bleiben.

---

*) Paris C. R. 141 (1905), p. 100; Thèse, Paris 1905 = Toulouse Fac. Ann. 8 (1906), p. 73; Acta math. 31 (1907), p. 71.

Im Gegensatz hierzu sollen im folgenden alle sechs Konstanten der Massenverteilung willkürlich bleiben, oder genauer: *aus der Mannigfaltigkeit der Wertsysteme x_0, y_0, z_0; A, B, C sollen nur die folgenden ausgeschlossen werden:*

$$
\begin{array}{lllll}
1) & x_0 = 0, & y_0 = 0, & z_0 = 0; & A, B, C \text{ beliebig;} \\
2) & A = B, & x_0 = 0, & y_0 = 0; & A, C, z_0 \text{ beliebig,} \\
 & B = C, & y_0 = 0, & z_0 = 0; & B, A, x_0 \text{ beliebig,} \\
 & C = A, & z_0 = 0, & x_0 = 0; & C, B, y_0 \text{ beliebig;} \\
3) & A = B = C; & x_0, y_0, z_0 \text{ beliebig.} & &
\end{array}
$$

Im Falle 1) hat man es mit einem *kräftefreien Kreisel* zu tun, im Falle 2) mit einem *symmetrischen Kreisel.* Im Falle 3) nennt man den Kreisel einen *Kugelkreisel.* Da aber beim Kugelkreisel alle Achsen, die durch den Punkt O gehen, als Hauptträgheitsachsen angesehen werden dürfen, kann man die Achsen der x, y, z stets so wählen, daß der Schwerpunkt S auf einer von ihnen liegt, und gelangt dann zu einem der drei Unterfälle des Falles 2). Um die Betrachtungen zu vereinfachen, werde festgesetzt, daß beim Kugelkreisel stets $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ sein soll; dann ist der Fall 3) als besonderer Fall unter dem Fall 2) enthalten.

Ein Kreisel, der weder kräftefrei noch symmetrisch ist, wird im folgenden als unsymmetrischer Kreisel bezeichnet werden.

Während in den Fällen von Euler, Lagrange, Kowalewski die Anfangsbedingungen beliebig gewählt werden durften, wird es bei dem *schweren unsymmetrischen Kreisel* darauf ankommen, zu untersuchen, *ob sich bei gewissen besonderen Anfangsbedingungen die Bewegungen durch Quadraturen ermitteln lassen.* Man wird erwarten dürfen, daß solche *ausgezeichnete Bewegungen* bei dem schweren unsymmetrischen Kreisel eine ähnliche Bedeutung haben werden, wie die *regulären Präzessionen* für den kräftefreien und den schweren symmetrischen Kreisel, und daß es auf diese Art gelingen wird, in das bisher fast unzugängliche Gebiet jener Kreiselbewegungen einzudringen.

Ein Ansatz hierzu war bereits 1894 von O. Staude gemacht worden. Dieser zeigte, daß man bei dem schweren unsymmetrischen Kreisel eine Schar von ∞^2 Bewegungen mittels elementarer Funktionen finden kann, nämlich die *permanenten Drehungen* des Kreisels um eine im Raume feste, vertikale Achse. Die Gesamtheit dieser Drehachsen bildet im Körper einen Kegel zweiter Ordnung:

$$(B - C) x_0 q r + (C - A) y_0 r p + (A - B) z_0 p q = 0, \tag{9}$$

und zu jeder Achse gehören zwei Drehgeschwindigkeiten, die sich jedoch nur durch den Drehsinn unterscheiden. Der kräftefreie und der schwere

symmetrische Kreisel erfordern eine besondere Betrachtung; bei ihnen kann, wenn man als Grenzfälle die Drehgeschwindigkeiten 0 und ∞ zuläßt, um *jede* durch den festen Punkt O gehende Achse permanente Drehung stattfinden.

Die permanenten Drehungen sind als besondere Fälle in einer Schar von ∞^5 *ausgezeichneten Bewegungen* enthalten, die der russische Mathematiker P. A. Schiff im Jahre 1903 entdeckt hat und die dadurch gekennzeichnet sind, daß *bei der Bewegung die Länge des Impulsvektors konstant bleibt.* Die wichtige Abhandlung von Schiff, die in russischer Sprache veröffentlicht worden war*), hat, wie es scheint, in dem westlichen Europa bis jetzt keine Beachtung gefunden. Ich selbst bin erst durch Herrn stud. math. Nic. Kowalewski, z. Z. in Göttingen, auf sie aufmerksam gemacht worden, der mir auch eine Übersetzung ins Deutsche zusandte. Da die Ausführungen Schiffs über seine Entdeckung sehr kurz sind und der Ergänzung, ja zum Teil der Berichtigung bedürfen, habe ich darauf verzichtet, sie hier in deutscher Sprache wiederzugeben, und mich vielmehr bemüht, die Bedeutung der *Schiffschen Bewegungen* in das rechte Licht zu setzen. Damit die Fragen, zu denen die *Methode* von Schiff Anlaß gibt, vollständig beantwortet werden, wird es freilich noch weiterer, erheblicher Anstrengungen bedürfen.

§ 3.

Vier lineare Verbindungen der Eulerschen Gleichungen.

Geometrisch-mechanische Überlegungen führen dazu, aus den Eulerschen Gleichungen (3) vier lineare Verbindungen herzuleiten, die in der Lehre von dem schweren Kreisel eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Am einfachsten gelangt man zu ihnen, wenn man sich der Sprache der *Vektoranalysis* bedient.

Der Vektor der Drehgeschwindigkeit mit den Komponenten p, q, r möge nach § 1 durch $\mathfrak{w}$, der Impulsvektor mit den Komponenten Ap, Bq, Cr durch $\mathfrak{D}$ bezeichnet werden. Ferner sei $\mathfrak{r}$ der Einheitsvektor auf der Vertikalen, dessen Komponenten nach den Achsen der x, y, z also die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 sind, und $\mathfrak{s}_0$ der Schwerpunktsvektor OS mit den Komponenten x_0, y_0, z_0. Wird noch das vektorielle Produkt durch eckige Klammern bezeichnet, so lassen sich die drei Gleichungen (3) durch die eine vektorielle Gleichung:

---

*) Объ уравненіяхъ движенія тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, Математическій Сборникъ, т. 24, Москва 1903, стр. 169—177 (Über die Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen unbeweglichen Punkt, Mathematische Sammlung, Bd. 24, Moskau 1903, Seite 169—177).

$$(3^*)\qquad \frac{d\mathfrak{D}}{dt} - [\mathfrak{D}\mathfrak{w}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{s}_0],$$

und die drei Gleichungen (5) durch die eine vektorielle Gleichung:

$$(5^*)\qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = [\mathfrak{r}\mathfrak{w}]$$

ersetzen. Die Form der Gleichung (3*) zeigt, daß es vorteilhaft ist, *skalar* mit den Vektoren $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}_0$ zu multiplizieren.

I. Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{w}$, so kommt:

$$\mathfrak{w}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{w}[\mathfrak{r}\mathfrak{s}_0] = -\mathfrak{s}_0[\mathfrak{r}\mathfrak{w}] = -\mathfrak{s}_0\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\frac{d(\mathfrak{s}_0\mathfrak{r})}{dt}.$$

Nun ist aber identisch:

$$\mathfrak{w}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\mathfrak{w}\mathfrak{D})}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}\mathfrak{w}\mathfrak{D})}{dt},$$

mithin ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{(\frac{1}{2}\mathfrak{w}\mathfrak{D})}{dt} = \frac{d(-\mathfrak{s}_0\mathfrak{r})}{dt}.$$

Setzt man also

$$(10^*)\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\mathfrak{D} = T,$$

so erhält man die *Gleichung der lebendigen Kraft:*

$$(7^*)\qquad T = -\mathfrak{s}_0\cdot\mathfrak{r} + h.$$

II. Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{D}$, so kommt sofort:

$$(11^*)\qquad \frac{d(\frac{1}{2}\mathfrak{D}^2)}{dt} = [\mathfrak{r}\mathfrak{s}_0].$$

Die Gleichung (11*) regelt die Änderung der *Länge des Impulsvektors* in der Zeit. Um sie kürzer zu schreiben, möge noch

$$(12^*)\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}^2 = U$$

gesetzt werden.

III. Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{r}$, so findet man zunächst:

$$\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{r}[\mathfrak{D}\mathfrak{w}].$$

Nach (5*) ist aber

$$\mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{D}[\mathfrak{r}\mathfrak{w}],$$

folglich wird

$$(13^*)\qquad \frac{d(\mathfrak{r}\mathfrak{D})}{dt} = 0,$$

d. h. *die vertikale Komponente des Impulsvektors* ist konstant:

$$(8^*)\qquad \mathfrak{r}\mathfrak{D} = k.$$

IV. Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{s}_0$, so ergibt sich

$$(14^*)\qquad \frac{d(\mathfrak{s}_0\mathfrak{D})}{dt} = \mathfrak{s}_0[\mathfrak{D}\mathfrak{w}].$$

Es ist das Verdienst von **Schiff**, die Wichtigkeit des Skalars

$$(15^*) \qquad \mathfrak{s}_0\mathfrak{D} = S$$

für die Kreiseltheorie erkannt zu haben. Der Skalar S steht übrigens in enger Beziehung zu dem *Staudeschen Kegel zweiter Ordnung*; denn dieser genügt der Gleichung

$$(9^*) \qquad \mathfrak{s}_0[\mathfrak{D}\mathfrak{w}] = 0.$$

Bleibt also während einer Bewegung des Kreisels S konstant, so ist dabei der Polhodiekegel der Kegel (9) oder doch ein Teil davon, der sich unter Umständen auf eine erzeugende Gerade des Kegels reduzieren kann.

Die Größen S, T, U, die durch die Gleichungen (15^*), (10^*) und (12^*) eingeführt wurden, besitzen, ebenso wie die Komponenten p, q, r, eine von der Wahl der Lagekoordinaten unabhängige Bedeutung. Weil für die Untersuchung der Bewegung eines *unsymmetrischen* Kreisels die drei Differentialgleichungen 1. O., denen sie genügen, von wesentlicher Bedeutung sind, sollen S, T, U als die *Hauptinvarianten* des Kreisels bezeichnet werden. Um diese *reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung* aufzustellen, könnte man sich zwar der Sprache der Vektoranalysis bedienen; allein es zeigt sich hier, wie auch in anderen Fällen, daß es vorteilhafter ist, bei Eliminationsproblemen auf die Komponenten zurückzugehen. Daher sollen zunächst die Gleichungen, die sich mittels der Vektoranalysis in so durchsichtiger Weise ergeben haben, in die Komponentenschreibung umgesetzt werden.

Die *Hauptinvarianten* S, T, U werden durch die Gleichungen definiert:

$$(15) \qquad Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0 = S,$$

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T,$$

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = U.$$

Ihre *Ableitungen nach der Zeit* sind:

$$(14) \qquad dS/dt = (B-C)x_0qr + (C-A)y_0rp + (A-B)z_0pq,$$

$$(16) \qquad dT/dt = -x_0(rc_2 - qc_3) - y_0(pc_3 - rc_1) - z_0(qc_1 - pc_2),$$

$$(11) \qquad dU/dt = c_1(Cry_0 - Bqz_0) + c_2(Apz_0 - Crx_0) + c_3(Bqx_0 - Apy_0).$$

Endlich hat man noch die drei *„Integralgleichungen"*:

$$(7) \qquad T = -(x_0c_1 + y_0c_2 + z_0c_3) + h,$$

$$(8) \qquad Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3 = k,$$

$$(6) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

§ 4.

Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung. Erster Teil: Einführung der Hauptinvarianten S, T, U statt der Komponenten p, q, r.

Die Hauptinvarianten S, T, U sind als Funktionen der Komponenten p, q, r der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch die Gleichungen definiert:

$$(15) \qquad S = Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0,$$

$$(10) \qquad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

$$(12) \qquad U = \tfrac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2).$$

Bei der Herleitung der reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung nimmt Schiff an, daß umgekehrt aus diesen Gleichungen p, q, r als Funktionen von S, T, U bestimmt worden seien. Allein einfache Beispiele zeigen, daß es keineswegs immer möglich ist, aus ihnen p, q, r zu berechnen. Hat man es zum Beispiel mit dem *kräftefreien Kreisel* zu tun, so lautet die Gleichung (15):

$$S = 0,$$

und beim *schweren symmetrischen Kreisel* hat man die Gleichungen:

$$(15') \qquad S = Crz_0,$$

$$(10') \qquad T = \tfrac{1}{2}A(p^2+q^2) + \tfrac{1}{2}Cr^2,$$

$$(12') \qquad U = \tfrac{1}{2}A^2(p^2+q^2) + \tfrac{1}{2}C^2r^2,$$

aus denen sich augenscheinlich allein $p^2 + q^2$ und r als Funktionen von S, T und U bestimmen lassen, vorausgesetzt, daß die so erhaltenen Werte die Gleichung (12') erfüllen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß damit die Ausnahmefälle erschöpft sind, d. h. daß der Lehrsatz gilt:

Lehrsatz I. *Beim schweren unsymmetrischen Kreisel sind die Komponenten p, q, r der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ Funktionen der Hauptinvarianten S, T, U.*

Beweis. Wird die Hilfsgröße

$$V = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$$

eingeführt, so lassen sich die Gleichungen (10), (12), (16) nach p^2, q^2, r^2 auflösen, sobald die drei Hauptträgheitsmomente A, B, C voneinander verschieden sind, und zwar werden p^2, q^2, r^2 lineare Funktionen von V, in denen *bei der genannten Voraussetzung* die Koeffizienten von V alle von Null verschieden sind. Zur Bestimmung von V ergibt sich aus (15) eine Gleichung der Form:

$$x_0\sqrt{aV + a'} + y_0\sqrt{bV + b'} + z_0\sqrt{cV + c'} = S,$$

aus der sich V nur dann nicht bestimmen läßt, wenn es bei *allen* Kombinationen aus den Vorzeichen der drei Quadratwurzeln auf der linken Seite nicht vorkommt. Das kann aber nur eintreten, wenn gleichzeitig

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$$

ist, also beim kräftefreien Kreisel, der ausgeschlossen wurde.

Da auch nicht $A = B = C$ sein soll (Kugelkreisel), so bleibt zu untersuchen, was eintritt, wenn A gleich B, aber verschieden von C ist. Dann zeigen aber die Gleichungen (10′) und (12′), daß $p^2 + q^2$ und r^2 lineare Funktionen von T und U werden, und aus der Identität:

$$(x_0 p + y_0 q)^2 + (y_0 p - x_0 q)^2 = (x_0^2 + y_0^2)(p^2 + q^2)$$

folgt in Verbindung mit der Gleichung (15), daß sich $x_0 p + y_0 q$ und $y_0 p - x_0 q$, also auch p und q selbst, durch S, T, U ausdrücken lassen, es sei denn, daß gleichzeitig

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

ist. Damit kommt man aber auf den ebenfalls ausgeschlossenen Fall des schweren symmetrischen Kreisels.

§ 5.

Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung. Zweiter Teil: Elimination der Richtungskosinus c_1, c_2, c_3.

Da man von dem System der Differentialgleichungen (3) und (5) die drei *„Integralgleichungen“* (6), (7), (8) kennt, lassen sich daraus die *Richtungskosinus* c_1, c_2, c_3 eliminieren. Allein die Differentialgleichungen für die Invarianten p, q, r, die man auf diesem Wege erhielte, würden wenig Nutzen gewähren, da sie erstens sehr verwickelt sind und zweitens kaum zu Scharen von Bewegungen führen, denen besondere geometrisch-mechanische Eigenschaften zukommen. Ganz anders verhält es sich, wenn man statt der p, q, r die *Hauptinvarianten* S, T, U nimmt; ja man wird sagen dürfen, daß durch den Gedanken von Schiff, statt der Komponenten p, q, r die Skalare S, T, U einzuführen, ein wesentlicher Fortschritt in der Theorie des schweren unsymmetrischen Kreisels erzielt worden ist.

Um die *reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung* zu erhalten, berechnet Schiff die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 aus den drei Gleichungen (7), (8) und (11) und setzt die so erhaltenen Werte in die Gleichungen (6) und (16) ein; dazu tritt dann noch die Gleichung (14), die von vorn herein von diesen Richtungskosinus frei ist.

Nach leichten Umformungen, bei denen man auch die Gleichung

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = s_0^2 \tag{17}$$

zu benutzen hat, ergeben sich aus den Gleichungen (7), (8), (11) für die gesuchten Richtungskosinus die folgenden Ausdrücke:

$$(18)\quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{(h-T)(2x_0U - ApS) + k(Aps_0^2 - x_0S) + dU/dt\cdot(Cry_0 - Bqz_0)}{2s_0^2U - S^2}, \\ c_2 = \dfrac{(h-T)(2y_0U - BqS) + k(Bqs_0^2 - y_0S) + dU/dt\cdot(Apz_0 - Crx_0)}{2s_0^2U - S^2}, \\ c_3 = \dfrac{(h-T)(2z_0U - CrS) + k(Crs_0^2 - z_0S) + dU/dt\cdot(Bqx_0 - Apy_0)}{2s_0^2U - S^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben jedoch nur dann einen Sinn, wenn der Nenner von Null verschieden ist. Nun gilt aber die Identität:

$$2s_0^2U - S^2 = (Apy_0 - Bqx_0)^2 + (Bqz_0 - Cry_0)^2 + (Crx_0 - Apz_0)^2,$$

mithin kann bei reellen Werten der betrachteten Größen, die hier allein in Frage kommen, der Nenner bloß verschwinden, wenn gleichzeitig:

$$(19)\qquad Apy_0 = Bqx_0,\quad Bqz_0 = Cry_0,\quad Crx_0 = Apz_0$$

ist, oder wenn, wie Schiff es ausdrückt, der Impulsvektor und der Schwerpunktsvektor der Richtung nach zusammenfallen. Schiff hat sich darauf beschränkt, diese Bedingung auszusprechen. Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, daß sie allgemein nur für den kräftefreien Kreisel und außerdem für den ruhenden Kreisel erfüllt ist. Beim kräftefreien Kreisel reduziert sich der Schwerpunktsvektor und beim ruhenden Kreisel der Impulsvektor auf Null. Werden aber diese beiden Fälle ausgeschlossen, so führen die Gleichungen (19) zu einem Widerspruch. Sie würden nämlich besagen, daß die Verhältnisse der p, q, r konstant sind, was nach einem Satze von K. B. Mlodziejowski (vergl. Artikel IV 6, Seite 644) nur in folgenden zwei Fällen eintreten kann. *Erstens*, wenn die p, q, r selbst konstant sind, wenn also permanente Drehung stattfindet. Sollen aber bei einer permanenten Drehung die Komponenten des Impulsvektors den Schwerpunktskoordinaten proportional sein, so beweist man leicht, daß entweder der Kreisel kräftefrei oder die Drehgeschwindigkeit gleich Null sein muß. Der *zweite Fall* tritt ein, wenn die Komponenten p, q, r selbst nicht konstant sind. Dann muß nach Mlodziejowski eine der Schwerpunktskoordinaten, etwa x_0, verschwinden, und der Kreisel schwingt nach Art des physikalischen Pendels um die horizontal zu legende x-Achse, sodaß $q = 0$, $r = 0$ ist. Wird nun der kräftefreie Kreisel ausgeschlossen, so folgt aus den Gleichungen (19), daß notwendig auch $p = 0$ ist, daß also der Kreisel ruht. Hiermit ist folgender Lehrsatz bewiesen:

Lehrsatz II. *Aus den Gleichungen* (7), (8), (11) *lassen sich, wenn der Fall der Ruhe ausgeschlossen wird, die Richtungskosinus der Vertikalen* c_1, c_2, c_3 *berechnen, es sei denn, daß der Kreisel kräftefrei ist.*

§ 6.

Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung. Dritter Teil: Aufstellung der Differentialgleichungen.

Nach diesen Vorbereitungen mögen die Ausdrücke (18) für die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 in die Gleichungen (6) und (16) eingesetzt werden. Nach einigen einfachen Umformungen erhält man alsdann die Gleichungen:

$$(20) \qquad (dU/dt)^2 = s_0^2(2U-k^2) - S^2 + 2kS(h-T) - 2U(h-T)^2,$$

$$(21) \qquad (2s_0^2 U - S^2)\, dT/dt$$
$$= [S(h-T) - ks_0^2]\, dS/dt + [2s_0^2 T - S(px_0 + qy_0 + rz_0)]\, dU/dt.$$

Zusammen mit der Gleichung:

$$(14) \qquad dS/dt = (B-C)x_0 qr + (C-A)y_0 rp + (A-B)z_0 pq$$

bilden die Gleichungen (20) und (21) ein System von drei Differentialgleichungen 1. O. für die drei Hauptinvarianten S, T, U. Hat man aus diesen *reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung* S, T, U bestimmt, so ergeben sich die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 aus den Gleichungen (18), und damit kennt man auch die Eulerschen Winkel ϑ und φ. Der dritte Eulersche Winkel ψ ergibt sich darauf vermöge der Gleichung (4) durch eine Quadratur, die eine neue Integrationskonstante mit sich bringt. Auf diese Art gelangt man zu allen ∞^6 Bewegungen des Kreisels.

Die Ergebnisse der §§ 4, 5 und 6 lassen sich nunmehr in den folgenden Lehrsatz zusammenfassen:

Lehrsatz III. *Um die Bewegungen eines schweren unsymmetrischen Kreisels zu ermitteln, bestimme man zunächst aus den Gleichungen:*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} (\mathrm{a}) & Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0 = S, \\ (\mathrm{b}) & \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T, \\ (\mathrm{c}) & \tfrac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = U \end{cases}$$

p, q, r als Funktionen von S, T, U. Darauf integriere man die drei Differentialgleichungen 1. *O.:*

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} (\mathrm{a}) & dS/dt = (B-C)x_0 qr + (C-A)y_0 rp + (A-B)z_0 pq, \\ (\mathrm{b}) & dT/dt = \dfrac{[S(h-T) - ks_0^2]\, dS/dt + [2s_0^2 T - S(px_0 + qy_0 + rz_0)]\, dU/dt}{2s_0^2 U - S^2}, \\ (\mathrm{c}) & (dU/dt)^2 = s_0^2(2U-k^2) - S^2 + 2kS(h-T) - 2U(h-T)^2. \end{cases}$$

Alsdann erhält man die Richtungskosinus der Vertikalen aus den Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{(h-T)(2x_0 U - ApS) + k(Aps_0^2 - x_0 S) + dU/dt \cdot (Cry_0 - Bqz_0)}{2s_0^2 U - S^2}, \\[2ex] c_2 = \dfrac{(h-T)(2y_0 U - BqS) + k(Bqs_0^2 - y_0 S) + dU/dt \cdot (Apz_0 - Crx_0)}{2s_0^2 U - S^2}, \\[2ex] c_3 = \dfrac{(h-T)(2z_0 U - CrS) + k(Crs_0^2 - z_0 S) + dU/dt \cdot (Bqx_0 - Apy_0)}{2s_0^2 U - S^2}; \end{cases}$$

außer den willkürlichen Konstanten h und k treten hierin die drei Integrationskonstanten der Gleichungen (II) auf. Aus den Werten von c_1, c_2, c_3 ergeben sich vermöge der Gleichungen

$$c_1 = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c_2 = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad c_3 = \cos\vartheta$$

die Eulerschen Winkel ϑ und φ. Schließlich findet man den Winkel ψ durch eine Quadratur aus der Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta},$$

die eine neue Integrationskonstante mit sich bringt. Auf diese Art gelangt man zu allen ∞^6 Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels.

§ 7.

Die Hauptinvarianten S, T, U beim kräftefreien und beim schweren symmetrischen Kreisel.

Der Lehrsatz III verliert seine Gültigkeit beim kräftefreien und beim schweren symmetrischen Kreisel.

Beim *kräftefreien Kreisel* ist stets $S = 0$. Außerdem bleiben auch die Hauptinvarianten T und U während jeder Bewegung konstant, und die Gleichungen (II) sind daher identisch erfüllt. Um die Bewegungen zu ermitteln, hat man also auf die ursprünglichen Gleichungen (2) und (3) zurückzugehen.

Beim *schweren symmetrischen Kreisel* hat nach der dritten Eulerschen Gleichung die Komponente r einen konstanten Wert r_0. Folglich ist auch bei ihm die Invariante S eine Konstante, nämlich

$$S = Cr_0 z_0.$$

Dagegen sind T und U als lineare Funktionen von $p^2 + q^2$ im allgemeinen nicht konstant. Die Differentialgleichungen (II) reduzieren sich hier auf eine einzige Differentialgleichung für $p^2 + q^2$. Da man aber zur Bestimmung von ψ die Komponenten p und q selbst kennen muß, läßt sich durch die Methode des Lehrsatzes III die Bewegung nicht bestimmen.

Eine ausgezeichnete Stellung haben beim schweren symmetrischen Kreisel die sogenannten *regulären Präzessionen*, bei denen $p^2 + q^2$ während der Bewegung konstant bleibt. Für diese ausgezeichneten Bewegungen haben die Hauptinvarianten T und U ebenfalls konstante Werte.

Aus dem Vorhergehenden ist zu schließen, daß der kräftefreie und der schwere symmetrische Kreisel *singuläre* Kreisel sind, die einer besonderen Untersuchung bedürfen und in ihren geometrisch-mechanischen Eigenschaften wesentlich von dem schweren unsymmetrischen Kreisel abweichen. Es ist bemerkenswert, daß der *Kowalewskische Kreisel* hierbei ganz ausfällt; die Bewegungen eines solchen Kreisels werden sich daher von denen eines anderen unsymmetrischen Kreisels nicht unterscheiden.

Noch zu einer anderen Betrachtung gibt das Vorhergehende Anlaß. Beim schweren symmetrischen Kreisel sind diejenigen Bewegungen ausgezeichnet, bei denen außer der Invariante S auch noch eine andere Invariante und damit von selbst die dritte konstant ist. Man wird daher vermuten, daß *auch für den unsymmetrischen Kreisel diejenigen Bewegungen eine besondere Bedeutung haben werden, bei denen gewisse Hauptinvarianten konstant sind.* Der genaueren Untersuchung dieser Frage sind die folgenden Paragraphen gewidmet.

§ 8.

Mehr als eine der Hauptinvarianten hat konstante Werte.

Wenn beim schweren unsymmetrischen Kreisel alle drei Hauptinvarianten konstante Werte haben, so gilt dasselbe für die Geschwindigkeitskomponenten p, q, r (Lehrsatz I), und man erhält daher eine *permanente Drehung* des Kreisels. Zu einer solchen Drehung führt aber auch die Annahme, daß zwei der Hauptinvarianten konstant sind; denn es gilt der Lehrsatz, der sich übrigens in der Abhandlung von Schiff nicht findet:

Lehrsatz IV. *Haben beim schweren unsymmetrischen Kreisel zwei der Hauptinvarianten konstante Werte, so ist notwendig auch die dritte Hauptinvariante konstant.*

Der *Beweis* für diesen Lehrsatz gliedert sich naturgemäß in drei Teile.

1) T und U haben konstante Werte. Dann folgt aus der Gleichung (IIc) auch für S ein konstanter Wert.

2) S und U haben konstante Werte. Dann folgt aus der Gleichung (IIb), daß dT/dt verschwindet, also hat auch T einen konstanten Wert.

3) S und T haben konstante Werte, S_0 und T_0. Dann folgt aus der Gleichung (IIb), daß dU/dt verschwindet, also auch U konstant ist, es sei denn, daß der Koeffizient von dU/dt gleich Null ist. Ist aber

$$2s_0^2 T_0 = S_0(px_0 + qy_0 + rz_0),$$

so wird, und da s_0 und T_0 von Null verschieden sind:

$$px_0 + qy_0 + rz_0 = a, \tag{22}$$

wo a eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Zu der Gleichung (22) kommen noch aus (Ia), (Ib), (IIa) die Gleichungen:

$$(23)\qquad Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0 = S_0,$$

$$(24)\qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T_0,$$

$$(25)\qquad (B-C)x_0qr + (C-A)y_0rp + (A-B)z_0pq = 0.$$

Da der Kreisel unsymmetrisch sein soll, so ist ausgeschlossen, daß $A = B = C$ ist; wohl aber können zwei der Hauptträgheitsmomente, etwa A und B, einander gleich, jedoch von dem dritten, also von C, verschieden sein. Tritt dies ein, so wird nach (25):

$$(A-C)(x_0q - y_0p)r = 0.$$

Ist $r = 0$, so wird nach (24) $p^2 + q^2$ eine Konstante, folglich ist auch nach (Ic) U konstant. Ist aber r von Null verschieden und $x_0q - y_0p = 0$, so ist nach (22) und (23):

$$x_0p + y_0q = a - rz_0 = (S_0 - Crz_0) : A,$$

mithin, da konstantes r sofort konstantes U nach sich zieht, $z_0 = 0$. Aus den Gleichungen

$$x_0p + y_0q = a, \quad y_0p - x_0q = 0$$

ergeben sich aber konstante Werte von p und q, da die Annahme $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ auf den kräftefreien Kreisel führen würde. Sind nun p und q konstant, so ist es nach (24) auch r und daher schließlich auch U.

Nunmehr darf vorausgesetzt werden, daß die Hauptträgheitsmomente A, B, C alle drei voneinander verschieden sind. Je nach der Beschaffenheit der Schwerpunktskoordinaten x_0, y_0, z_0 hat man jetzt verschiedene Unterfälle zu unterscheiden. Da der kräftefreie Kreisel ausgeschlossen ist, können höchstens zwei dieser Koordinaten verschwinden. Es sei zuerst etwa $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, aber z_0 verschieden von Null. Dann folgt aus (23), daß r eine Konstante ist, und aus (25), daß die eine der Komponenten p, q verschwindet. Die Gleichung (24) zeigt aber, daß unter diesen Umständen auch die andere eine Konstante sein muß. Da also p, q, r alle drei konstant sind, ist auch die Hauptinvariante U konstant.

Verschwindet nur eine der Schwerpunktskoordinaten, etwa z_0, so lassen sich aus den Gleichungen (22) und (23) x_0p und y_0q, also auch p und q selbst bestimmen, p und q sind also konstant. Dann aber zeigt die Gleichung (24), daß auch r konstant ist, womit wiederum die Konstanz von U nachgewiesen ist.

Sind endlich x_0, y_0, z_0 alle drei von Null verschieden, so führe man eine Hilfsgröße

$$(26)\qquad v = A^2px_0 + B^2qy_0 + C^2rz_0$$

ein und berechne px_0, qx_0, rz_0 aus den Gleichungen (22), (23), (26). Man erhält dafür lineare Funktionen von v, bei denen, ähnlich wie bei den linearen Funktionen von V in § 4 dieser Abhandlung, die Koeffizienten von v nicht verschwinden. Da man jetzt durch die Schwerpunktskoordinaten dividieren darf, gilt dasselbe für p, q, r selbst. Setzt man die so gefundenen Ausdrücke für p, q, r in die Gleichung (24) ein, so ergibt sich eine Gleichung zweiten Grades für v, bei der der Koeffizient von v^2 sicher von Null verschieden ist. Mithin läßt sich v aus dieser Gleichung bestimmen und hat einen konstanten Wert. Folglich gilt dasselbe für p, q, r und schließlich auch für U.

§ 9.

Nur eine der Hauptinvarianten hat einen konstanten Wert.

Der Lehrsatz IV zeigt, daß bei dem schweren unsymmetrischen Kreisel zu den permanenten Drehungen nur noch die Bewegungen hinzutreten, bei denen bloß eine der Hauptinvarianten S, T, U einen konstanten Wert hat. Schiff ist jedoch in seiner Abhandlung auf den Fall, daß die lebendige Kraft T konstant ist, gar nicht eingegangen und hat auch über den Fall, daß S konstant ist, nur einige Bemerkungen gemacht, die er selbst als der Ergänzung bedürftig bezeichnet. Dagegen hat er für den Fall, daß U konstant ist, daß also während der Bewegung die Länge des Impulsvektors erhalten bleibt, ein bemerkenswertes Ergebnis gefunden, über das hier berichtet werden soll.

Da die Gleichung gilt:

$$U = \tfrac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2), \tag{Ic}$$

muß der konstante Wert U_0 von U eine wesentlich positive Größe sein. Setzt man diesen Wert U_0 für U in die Gleichungen (II) ein, so liefert die Gleichung (c) eine algebraische Relation zwischen S und T, und *nun tritt der merkwürdige Umstand ein, daß vermöge dieser Relation die Gleichung* (b) *identisch erfüllt ist.* Mithin lassen sich die Gleichungen (II), wenn U konstant ist, durch die drei Gleichungen ersetzen:

$$dS/dt = (B-C)x_0qr + (C-A)y_0rp + (A-B)z_0pq, \tag{27}$$

$$U = U_0, \tag{28}$$

$$0 = s_0^2(2U_0 - k^2) - S^2 + 2kS(h-T) - 2U_0(h-T)^2. \tag{29}$$

Die Größen p, q, r, die auf der rechten Seite der Gleichung (27) auftreten, sind zunächst durch die Gleichungen (I) als Funktionen von S und T definiert. Da aber durch die Gleichung (29) T als algebraische

Funktion von S bestimmt wird, so läßt sich die rechte Seite der Gleichung (27) schließlich als algebraische Funktion von S allein darstellen, und daher *wird die Zeit t ein Abelsches Integral in der Variablen S*. Nach Schiff wird dieses Integral besonders einfach, wenn der Schwerpunkt auf einer der Hauptachsen liegt, und reduziert sich sogar auf ein elliptisches Integral, wenn noch dazu $U_0 = k$ gesetzt wird.

Die Funktionen der Zeit p, q, r enthalten im vorliegenden Falle die drei willkürlichen Konstanten h, k, U_0 und als vierte Konstante etwa den Anfangswert von S, S_0. Da nun bei der Quadratur, durch die der Winkel ψ bestimmt wird, noch eine willkürliche Konstante, nämlich der Anfangswert ψ_0 von ψ, hinzukommt, so ergeben sich auf diese Art ∞^5 *Bewegungen* des schweren unsymmetrischen Kreisels, die dadurch ausgezeichnet sind, daß bei jeder von ihnen die Länge des Impulsvektors immer denselben Wert behält. Bei jeder dieser Bewegungen beschreibt, wie schon Schiff hervorgehoben hat, der Impulsvektor im *Raume* einen Kreiskegel, dessen Achse die Vertikale ist; denn die Komponente des Impulsvektors nach der Vertikalen hat den konstanten Wert k, folglich muß auch die horizontale Komponente *der Größe nach* konstant sein.

In dieser Beziehung sind also die von Schiff entdeckten Bewegungen des unsymmetrischen Kreisels das genaue Analogon zu den *regulären Präzessionen* des schweren symmetrischen Kreisels. Allerdings besteht ein erheblicher Unterschied: während es beim schweren symmetrischen Kreisel nur ∞^4 reguläre Präzessionen gibt, bleibt beim schweren unsymmetrischen Kreisel die Länge des Impulsvektors bei ∞^5 Bewegungen erhalten. Gemeinsam sind den beiden Scharen nur die permanenten Drehungen; denn es ist leicht zu beweisen, daß beim unsymmetrischen Kreisel außer den permanenten Drehungen keine regulären Präzessionen eintreten können. Aber auch hier besteht ein Unterschied: beim schweren symmetrischen Kreisel kann um jede durch den festen Punkt O gehende Achse permanente Drehung stattfinden, beim schweren unsymmetrischen Kreisel dagegen nur um die vertikal zu stellenden erzeugenden Geraden des Staudeschen Kegels.

Bei diesem Vergleich wird man noch zu einer anderen wichtigen Frage geführt. Während die Bewegungen des schweren symmetrischen Kreisels im allgemeinen auf *elliptische Integrale* führen, läßt sich die reguläre Präzession mittels *Kreisfunktionen* erledigen. Man wird daher vermuten dürfen, daß auch beim unsymmetrischen Kreisel die Bewegungen mit konstanter Länge des Impulsvektors sich durch einfachere analytische Hilfsmittel erledigen lassen, als die allgemeinen Bewegungen. Freilich weiß man bis jetzt noch nichts über den Grad der Transzendenz, den die Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit beim unsymmetrischen Kreisel

besitzen; allein es ist zu hoffen, daß gerade die reduzierten Gleichungen der Bewegung (II) darüber einen gewissen Aufschluß geben werden. Wenn nämlich U nicht konstant ist, kann man nach einer Bemerkung von Nic. Kowalewski aus den Gleichungen (II) zwei Differentialgleichungen 1. O. für S und T als Funktionen von U gewinnen; aus diesen beiden Gleichungen aber *folgt für T als Funktion von U eine algebraische Differentialgleichung 2. O. Da aber*, wie ich meinerseits hinzufüge, *von P. Painlevé die Klassifikation der algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach der Transzendenz ihrer Integrale vollständig durchgeführt worden ist, sind die Mittel gegeben, den analytischen Charakter des Kreiselproblems genau festzustellen*; die Durchführung dieses Gedankens wird freilich noch harte Rechenarbeit kosten.

§ 10.

Schlußbemerkung.

Die Lehre von den Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels würde eine erhebliche Förderung erfahren, wenn die ausgezeichneten Bewegungen, bei denen die Länge des Impulsvektors erhalten bleibt, genauer untersucht würden. Es kämen dabei besonders zwei Probleme in Betracht, die zum Schluß ausführlich formuliert werden sollen.

Erstes Problem. *Man bestimme unter den Voraussetzungen, die bei dem schweren unsymmetrischen Kreisel für die Konstanten der Massenverteilung x_0, y_0, z_0; A, B, C gemacht wurden, aus den Gleichungen:*

$$\text{(a)} \qquad Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0 = S,$$

$$\text{(b)} \qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T,$$

$$\text{(c)} \qquad \tfrac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = U_0,$$

$$\text{(d)} \qquad s_0^2(2U_0 - k^2) - S^2 + 2kS(h-T) - 2U_0(h-T)^2,$$

in denen U_0 eine positive, von Null verschiedene Konstante bedeutet, während die Werte der Konstanten h und k beliebig gewählt werden dürfen, die Größen p, q, r als Funktionen von S. Darauf setze man:

$$\text{(e)} \qquad \sin\vartheta \sin\varphi = \frac{(h-T)(2x_0U_0 - ApS) + k(Aps_0^2 - x_0S)}{2s_0^2U_0 - S^2},$$

$$\text{(f)} \qquad \sin\vartheta \cos\varphi = \frac{(h-T)(2y_0U_0 - BqS) + k(Bqs_0^2 - y_0S)}{2s_0^2U_0 - S^2},$$

$$\text{(g)} \qquad \cos\vartheta = \frac{(h-T)(2z_0U_0 - CrS) + k(Crs_0^2 - z_0S)}{2s_0^2U_0 - S^2}$$

und endlich:

$$\text{(h)} \qquad \frac{d\psi}{dS} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta[(B-C)x_0qr + (C-A)y_0rp + (A-B)z_0pq]}.$$

Es soll die Natur der so definierten Funktionen ϑ, φ, $\frac{d\psi}{dt}$ *von* S *untersucht werden; Problem der* ∞^4 *Bahnkurven des Kreisels im Raume der* ϑ, φ, ψ.

Zweites Problem. *Durch die Gleichungen* (a), (b), (c), (d) *mögen* p, q, r *als algebraische Funktionen von* S *bestimmt sein. Man soll die Abelschen Integrale*

$$\text{(i)} \qquad t - t_0 = \int_{S_0}^{S} \frac{dS}{(B-C)x_0 qr + (C-A)y_0 rp + (A-B)z_0 pq}$$

und

$$\text{(k)} \qquad \psi - \psi_0 = \int_{S_0}^{S} \frac{p \sin\varphi + q \cos\varphi}{\cos\vartheta} \cdot \frac{dt}{dS}\, dS$$

untersuchen; Problem der Bewegung des unsymmetrischen Kreisels im Laufe der Zeit.

Bei beiden Problemen handelt es sich nur um sogenannte *algebraische Operationen*, und die Schwierigkeiten liegen lediglich in der wirklichen Durchführung der Rechnungen. Möge sich aber auch hier der Wahlspruch erfüllen, den die Amsterdamer Sammlung von Aufgaben aus der Mechanik trägt: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.*

Zur Theorie der trinomischen Gleichungen.

Von

P. Bohl in Riga.

Um die Anzahl derjenigen Wurzeln einer trinomischen Gleichung zu bestimmen, deren Absolutwert kleiner als eine willkürlich gegebene positive Größe ist, gibt es eine einfache Regel, deren Anwendung nur elementare trigonometrische Rechnungen erfordert. Diese Regel, welche, soweit mir bekannt, bisher noch nicht bemerkt worden ist, soll im folgenden mitgeteilt und hergeleitet werden.

Es möge die trinomische Gleichung

$$ax^n + bx^m + c = 0 \tag{1}$$

gegeben sein. Hierbei bedeuten a, b, c irgend welche von Null verschiedene reelle oder komplexe Zahlen. Die Moduln dieser Zahlen bezeichnen wir wie üblich mit $|a|$, $|b|$, $|c|$; α, β, γ sollen die Argumente von a, b, c darstellen. n, m sind irgend welche der Bedingung $n > m > 0$ genügende ganze Zahlen. Den größten gemeinschaftlichen Teiler derselben wollen wir mit τ bezeichnen.

Die Anzahl der Wurzeln von (1), *deren Modul kleiner als die positive Zahl p ist, wird erhalten, indem man das τ-fache einer Zahl ζ bildet, die folgendermaßen bestimmt werden kann:*

I. *Ist jede der drei Größen $|a|p^n$, $|b|p^m$, $|c|$ kleiner als die Summe der beiden andern, so bilden wir ein Dreieck, dessen Seiten den genannten Größen proportional sind. w_1 und w_2 mögen die beiden Winkel ausdrücken, die den $|a|p^n$ und $|b|p^m$ entsprechenden Seiten gegenüberliegen. ζ gibt nun die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen an, welche zwischen*

$$\frac{n(\beta-\gamma+\pi)-m(\alpha-\gamma+\pi)}{2\pi\tau} - \frac{nw_1+mw_2}{2\pi\tau}$$

(2) *und*

$$\frac{n(\beta-\gamma+\pi)-m(\alpha-\gamma+\pi)}{2\pi\tau} + \frac{nw_1+mw_2}{2\pi\tau}$$

liegen.

II. *Eine der drei Größen* $|a|p^n$, $|b|p^m$, $|c|$ *sei gleich der Summe der beiden andern oder größer als diese Summe. Wird in diesem Falle von zwei nachher zu erwähnenden Annahmen abgesehen, so gilt*

$$\textit{für } |c| \overline{>} |a|p^n + |b|p^m \qquad \zeta = 0,$$

$$\textit{für } |b|p^m \overline{>} |a|p^n + |c| \qquad \zeta = \frac{m}{\tau},$$

$$\textit{für } |a|p^n \overline{>} |b|p^m + |c| \qquad \zeta = \frac{n}{\tau}.$$

Die eben genannten Ausnahmen treten auf:

Erstens, wenn $|b|p^m = |a|p^n + |c|$, $p^{n-m} \gtrless \frac{m|b|}{n|a|}$ *gilt und außerdem*

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{n(\beta-\gamma)-m(\alpha-\gamma)}{\pi}+n\right]$$

eine gerade ganze Zahl ist.

Zweitens, wenn $|a|p^n = |b|p^m + |c|$ *gilt und außerdem*

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{n(\beta-\gamma)-m(\alpha-\gamma)}{\pi}-m\right]$$

eine gerade ganze Zahl ist.

In diesen Ausnahmefällen ist der oben angegebene Wert für ζ *um* 1 *zu vermindern, so daß also im ersten Fall* $\zeta = \frac{m}{\tau} - 1$, *im zweiten* $\zeta = \frac{n}{\tau} - 1$ *gilt.*

Beim Beweise dieses Satzes genügt es offenbar, den Fall $\tau = 1$, $\gamma = 0$ zu betrachten. *Wir werden deshalb* m *und* n *als relative Primzahlen voraussetzen und* $\gamma = 0$ *annehmen.*

Auf die soeben mitgeteilte Regel wurde ich bei einer Untersuchung über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem geführt. Nähere Angaben hierüber möchte ich gelegentlich der Veröffentlichung dieser Untersuchung machen.

§ 1.

Über einige im folgenden benutzte Bezeichnungen.

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein, die im folgenden benutzt werden. $w_1(x_1, x_2, x_3)$, $w_2(x_1, x_2, x_3)$, $w_3(x_1, x_2, x_3)$ mögen drei Funktionen bezeichnen, welche für alle reellen positiven Werte der Variabeln x_1, x_2, x_3 folgendermaßen definiert sind. Ist jede der drei Größen x_1, x_2, x_3 kleiner als die Summe der beiden andern, so stellen wir ein Dreieck her, dessen Seiten den Werten x_1, x_2, x_3 proportional sind. $w_1(x_1, x_2, x_3)$, $w_2(x_1, x_2, x_3)$, $w_3(x_1, x_2, x_3)$ drücken dann die Winkel aus, welche den x_1, x_2, x_3 entsprechenden Seiten gegenüberliegen. Ist aber eine der Größen x_1, x_2, x_3 etwa x_μ gleich der Summe der beiden andern oder größer als

diese Summe, so ist $w_\mu(x_1, x_2, x_3) = \pi$, während die beiden andern Funktionen den Wert Null annehmen. Offenbar sind die drei Funktionen w_1, w_2, w_3 eindeutig und stetig.

Im Hinblick auf das Folgende ist es nützlich zu bemerken, daß stets

$$x_1 e^{-i w_2(x_1, x_2, x_3)} + x_2 e^{i w_1(x_1, x_2, x_3)} - x_3 = 0 \tag{3}$$

gilt, *falls keine der positiven Größen x_1, x_2, x_3 größer als die Summe der beiden andern ist.*

Besteht andererseits zwischen drei reellen positiven Größen x_1, x_2, x_3 und zwei reellen Größen φ, ψ die Beziehung

$$x_1 e^{i\varphi} + x_2 e^{i\psi} + x_3 = 0, \tag{4}$$

so ist keine der Größen x_1, x_2, x_3 größer als die Summe der beiden anderen und es gilt mindestens eine der folgenden zwei Aussagen

$$\varphi \equiv \pi - w_2(x_1, x_2, x_3), \qquad \psi \equiv \pi + w_1(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

$$\varphi \equiv -\pi + w_2(x_1, x_2, x_3), \qquad \psi \equiv -\pi - w_1(x_1, x_2, x_3). \tag{6}$$

Hierbei drückt das Zeichen $\equiv$ hier, wie überhaupt in dieser Arbeit, die Gleichheit bis auf ganze Vielfache von 2π aus.

§ 2.

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene positive Zahl den Modul einer Wurzel darstellt.

Es möge nun u den Modul, φ ein Argument einer Wurzel der Gleichung (1) bezeichnen. Dann haben wir

$$|a| u^n e^{i(\alpha + n\varphi)} + |b| u^m e^{i(\beta + m\varphi)} + |c| = 0. \tag{7}$$

Es gilt daher nach § 1 mindestens eine der folgenden zwei Reihen:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha + n\varphi &\equiv \pi - w_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|), \\ \beta + m\varphi &\equiv \pi + w_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha + n\varphi &\equiv -\pi + w_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|), \\ \beta + m\varphi &\equiv -\pi - w_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Hieraus folgt dann weiter, daß mindestens eine der Größen

$$\frac{n(\beta+\pi) - m(\alpha+\pi) + [n w_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|) + m w_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|)]}{2\pi} \tag{10}$$

und

$$\frac{n(\beta+\pi) - m(\alpha+\pi) - [n w_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|) + m w_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|)]}{2\pi} \tag{11}$$

gleich einer ganzen Zahl ist.

Ist andererseits u eine solche positive Größe, daß erstens keine der Zahlen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ größer als die Summe der beiden andern ist, und daß zweitens wenigstens einer der Ausdrücke (10) *und* (11) *gleich einer ganzen Zahl wird, so ist, wie wir sogleich sehen werden, u der Modul einer Wurzel von* (1).

Unter der genannten Annahme besteht nämlich eine Gleichung von der Form

$$(12)\quad n(\beta+\pi) - m(\alpha+\pi) + \varepsilon[nw_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|) \\ + mw_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|)] = g \cdot 2\pi$$

wobei ε gleich $+1$ oder gleich -1 ist und g eine gewisse ganze Zahl bezeichnet. Man bestimme nun zwei ganze Zahlen M und N, welche der Bedingung $n \cdot N - m \cdot M = g$ genügen. Dann gilt für alle Werte von z

$$(13)\quad n(\beta+\pi-N2\pi+\varepsilon w_1+mz) - m(\alpha+\pi-M2\pi-\varepsilon w_2+nz) = 0,$$

wobei der Kürze wegen bei w_1 und w_2 die Argumente $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ fortgelassen sind.

Wir bestimmen nun z in der Weise, daß

$$(14)\quad \beta + \pi - N \cdot 2\pi + \varepsilon w_1 + mz = 0$$

gilt. Es ergibt sich hierbei ein reeller z-Wert, für welchen auch

$$\alpha + \pi - M \cdot 2\pi - \varepsilon w_2 + nz$$

verschwindet. Wir haben nunmehr

$$(15)\quad w_1 \equiv -\varepsilon(\beta+\pi+mz), \qquad -w_2 \equiv -\varepsilon(\alpha+\pi+nz)$$

Bildet man nun die Gleichung (3) für $x_1 = |a|u^n$, $x_2 = |b|u^m$, $x_3 = |c|$ und berücksichtigt (15), so ergibt sich

$$(16)\quad |a|u^n e^{-\varepsilon(\alpha+\pi+nz)i} + |b|u^m e^{-\varepsilon(\beta+\pi+mz)i} - |c| = 0.$$

Es ist klar, daß diese Gleichung gültig bleibt, wenn man ε durch $-\varepsilon$ ersetzt; sie bleibt daher auch gültig, wenn man ε durch $+1$ oder -1 nach Belieben ersetzt. Wählen wir $\varepsilon = -1$, so erhalten wir

$$(17)\quad |a|e^{\alpha i} \cdot u^n \cdot e^{nzi} + |b|e^{\beta i} u^m e^{mzi} + |c| = 0.$$

Es ist somit $u \cdot e^{zi}$ eine Wurzel der Gleichung (1). Unsere Behauptung ist daher bewiesen.

Ist $n\beta - m\alpha$ ein ganzes Vielfaches von π, so ist die Summe der Ausdrücke (10) und (11) für alle positiven u eine ganze Zahl. Es sind daher die Ausdrücke (10) und (11) entweder beide ganzzahlig oder beide nicht ganzzahlig.

Ist andererseits $n\beta - m\alpha$ kein ganzes Vielfaches von π, so ist die Summe von (10) und (11) nicht gleich einer ganzen Zahl. Es können daher diese Ausdrücke nicht gleichzeitig ganzzahlig sein.

§ 3.

Die Intervalle, in welchen keine Moduln von Wurzeln vorkommen können.

Indem wir mit u eine reelle positive Variable bezeichnen, setzen wir

$$(18)\qquad \begin{cases} A = \quad |a|u^n - |b|u^m - |c|, \\ B = -|a|u^n + |b|u^m - |c|, \\ C = -|a|u^n - |b|u^m + |c|. \end{cases}$$

Es möge ferner h diejenige reelle positive Zahl bedeuten, für welche

$$(19)\qquad h^{n-m} = \frac{m|b|}{n|a|}$$

gilt.

A nimmt mit wachsendem u für $u < h$ ab, für $u > h$ zu und ist für genügend kleine u negativ, für genügend große u positiv. Es wird daher A für *einen* u-Wert $u = \mathfrak{a}$ gleich Null, während für $u < \mathfrak{a}$

$$A < 0,$$

für $u > \mathfrak{a}$

$$A > 0$$

gilt.

C nimmt mit wachsendem u ab und ist für genügend kleine u positiv, für genügend große u negativ. Es verschwindet daher C für *einen* u-Wert $u = \mathfrak{c}$, während für $u < \mathfrak{c}$

$$C > 0,$$

für $u > \mathfrak{c}$

$$C < 0$$

gilt. Für $u = \mathfrak{c}$ haben wir $A = A + C < 0$ und es ist daher $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$, wie unmittelbar aus den oben über A gemachten Bemerkungen folgt.

B nimmt für $u < h$ zu, für $u > h$ ab und ist sowohl für genügend kleine als auch für genügend große u negativ. Für $u = h$ nimmt B einen Wert B_m an, welcher alle andern von B angenommenen Werte übertrifft. Wir haben, wie leicht zu sehen,

$$(20)\qquad B_m = |b|h^m\left[1 - \frac{m}{n}\right] - |c|.$$

Ist $B_m < 0$, so gilt stets $B < 0$. Ist $B_m = 0$, so wird B für $u = h$ gleich Null, für alle andern u gilt $B < 0$; in diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{b} = h$. Ist $B_m > 0$, so wird B zweimal gleich Null, etwa für $u = \mathfrak{b}_1$ und $u = \mathfrak{b}_2 > \mathfrak{b}_1$. Für $\mathfrak{b}_1 < u < \mathfrak{b}_2$ gilt dann $B > 0$, für $u < \mathfrak{b}_1$ sowie für $u > \mathfrak{b}_2$ aber $B < 0$. Die mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ bezeichneten Größen liegen stets zwischen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$. Um uns hiervon zu überzeugen, nehmen wir an, daß für $u = u_0$

$$B = 0$$

gelte. Dann haben wir für $u = u_0$

$$A = A + B < 0;$$

es ist daher $u_0 < \mathfrak{a}$. Ferner haben wir für $u = u_0$

$$C = C + B < 0$$

und daher $u_0 > \mathfrak{c}$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir können nun die u-Gebiete angeben, für welche jede der drei Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ kleiner als die Summe der beiden andern ist. Falls $B_m < 0$, so ist das betreffende Gebiet durch $\mathfrak{c} < u < \mathfrak{a}$ gegeben. Ist $B_m = 0$, so besteht das in Rede stehende Gebiet aus den aneinander stoßenden Gebieten $\mathfrak{c} < u < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} < u < \mathfrak{a}$. Ist $B_m > 0$, so besteht das gesuchte Gebiet aus den beiden getrennt liegenden Gebieten $\mathfrak{c} < \mathfrak{a} < \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2 < u < \mathfrak{a}$.

Für die Grenzpunkte des besprochenen Gebiets ist eine der drei Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ gleich der Summe der beiden andern, und zwar haben wir:

für $u = \mathfrak{c}$ $\qquad |c| = |a|u^n + |b|u^m,$

für $u = \mathfrak{a}$ $\qquad |a|u^n = |b|u^m + |c|,$

für $u = \mathfrak{b}$, $u = \mathfrak{b}_1$, $u = \mathfrak{b}_2$ $\qquad |b|u^m = |a|u^n + |c|,$

wobei die letzte Reihe natürlich nur im Falle des Auftretens von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ in Frage kommt.

Für diejenigen u-Werte, welche weder im besprochenen Gebiet liegen, noch mit den Grenzpunkten zusammenfallen, ist eine der drei Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ größer als die Summe der beiden andern und zwar haben wir

für $u < \mathfrak{c}$ $\qquad |c| > |a|u^n + |b|u^m,$

für $u > \mathfrak{a}$ $\qquad |a|u^n > |b|u^m + |c|,$

für $\mathfrak{b}_1 < u < \mathfrak{b}_2$ $\qquad |b|u^m > |a|u^n + |c|,$

wobei die letzte Reihe natürlich nur im Falle des Auftretens von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ in Anwendung kommt.

§ 4.

Einführung von P und $\omega(u)$.

Es mögen λ_1, λ_2, λ_3 usw. diejenigen verschiedenen reellen positiven Zahlen bedeuten, welche Moduln von Wurzeln sind. Die Bezeichnung sei hierbei so gewählt, daß die λ-Größen mit wachsendem Index zunehmen.*) Offenbar ist keine der drei Größen $|a|\lambda_x^n$, $|b|\lambda_x^m$, $|c|$ größer als die

*) Natürlich kann auch der Fall eintreten, daß nur eine λ-Größe existiert.

Summe der beiden andern, wenn κ einen der bei den λ-Größen vorkommenden Indizes bedeutet.

Indem wir mit u wieder eine reelle positive Variable bezeichnen, setzen wir

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\frac{n(\beta+\kappa) - m(\alpha+\kappa)}{2\pi} = P, \\ &\frac{n w_1(|a|u^n, |b|u^m, |c|) + m w_2(|a|u^n, |b|u^m, |c|)}{2\pi} = \omega(u). \end{aligned}$$

Wird u gleich einer der λ-Größen, so ist nach § 2 mindestens einer der Ausdrücke

$$(22)\qquad P + \omega(u) \quad \text{und} \quad P - \omega(u)$$

gleich einer ganzen Zahl. Ist andererseits für ein gewisses u keine der Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ größer als die Summe der beiden anderen und gleicht ferner mindestens einer der Ausdrücke (22) einer ganzen Zahl, so fällt u mit einem λ-Wert zusammen. Ist $n\beta - m\alpha$ ein ganzes Vielfaches von π, so sind die Ausdrücke (22) entweder beide ganzzahlig oder beide nicht ganzzahlig. Ist aber $n\beta - m\alpha$ kein ganzes Vielfaches von π, so können diese Ausdrücke nicht gleichzeitig ganzzahlig sein.

Für $u \leqq \mathfrak{c}$ haben wir offenbar $\omega(u) = 0$, für $u \geqq \mathfrak{a}$

$$\omega(u) = \frac{n}{2}\cdot$$

Tritt der Wert $\mathfrak{b}$ oder das Wertepaar $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ auf, so gilt für $u = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}_1 \leqq u \leqq \mathfrak{b}_2$

$$\omega(u) = \frac{m}{2}\cdot$$

Wir führen endlich noch folgende Bezeichnungen ein. $G(u)$ gebe die Anzahl der *zwischen* den Größen (22) gelegenen ganzen Zahlen an, $\mathfrak{Z}(u)$ sei die Anzahl derjenigen λ-Größen, welche kleiner als u sind, $Z(u)$ bedeute die Anzahl derjenigen Wurzeln, deren Modul kleiner als u ist.

§ 5.

Der allgemeine Fall, in welchem $2P$ nicht ganzzahlig ist.

Wir setzen nun zunächst voraus, daß $n\beta - m\alpha$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Haben wir in diesem Fall $u \leqq \mathfrak{c}$, oder $u \geqq \mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{b}_1 \leqq u \leqq \mathfrak{b}_2$, oder $u = \mathfrak{b}$, so ist offenbar keine der Größen (26) ganzzahlig. Hieraus schließen wir erstens, daß $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}$ nicht Moduln von Wurzeln sein können. Zweitens folgt aus dem Gesagten, daß u stets einen Wurzelmodul darstellt, sobald nur eine der Größen (22) eine ganze Zahl ist.

Es möge nun u die Werte von $u = \mathfrak{c}$ bis $u = \mathfrak{a}$ stetig wachsend durchlaufen. Die Größen $P + \omega(u)$ und $P - \omega(u)$ ändern sich hierbei stetig von P bis $P + \frac{n}{2}$ resp. $P - \frac{n}{2}\cdot$ Da die beiden letztgenannten Größen nicht ganzzahlig sind, so liegen zwischen ihnen n verschiedene ganze Zahlen $g_1, g_2, \cdots, g_n$. Diesen letzteren können offenbar n u-Werte $u_1, u_2, \cdots, u_n$ so zugeordnet werden, daß für $u = u_\mu$ eine der Größen (22) den Wert g_μ annimmt. Die Werte $u_1, u_2, \cdots, u_n$ müssen voneinander verschieden sein und stellen nach dem obigen Wurzelmoduln dar. Da nun aber unsere Gleichung vom n^{ten} Grade ist, so können außer den genannten Wurzelmoduln keine anderen existieren. Es folgt somit, daß alle Wurzeln in unserem Fall verschiedene Moduln besitzen, daß diese Moduln durch $u_1, u_2, \cdots, u_n$ geliefert werden und daß diese u-Werte die einzigen sind, für welche eine der Größen (22) ganzahlig wird.

Wir wollen nun annehmen, es sei für $u = u_\nu$ etwa $P + \omega(u)$ gleich g_ν. *Für* $u > u_\nu$ *muß dann* $P + \omega(u) > g_\nu$ *gelten.* Andernfalls müßte nämlich für ein gewisses $u > u_\nu$

$$P + \omega(u) = g_\nu$$

gelten, was mit dem Obigen nicht vereinbar wäre. *Für* $u < u_\nu$ *muß dagegen* $P + \omega(u) < g_\nu$ *gelten*, wie analog bewiesen wird.

Ist andererseits für $u = u_\nu$

$$P - \omega(u) = g_\nu,$$

so haben wir für $u > u_\nu$

$$P - \omega(u) < g_\nu,$$

für $u < u_\nu$

$$P - \omega(u) > g_\nu.$$

Der Beweis geschieht entsprechend dem vorigen.

Für $u \overline{\gtrless} \mathfrak{c}$ ist offenbar $G(u) = 0$. Wächst u, indem es mit dem Werte $u = \mathfrak{c}$ anfängt, so ändert sich $G(u)$ nur beim Überschreiten eines der Werte $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Diese Änderung geschieht für den Wert $u_\varkappa$ in folgender Weise: Für u-Werte, welche $u_\varkappa$ genügend nahe liegen und der Bedingung $u \overline{\gtrless} u_\varkappa$ genügen, gilt $G(u) = G(u_\varkappa)$; für u-Werte, welche $u_\varkappa$ genügend nahe liegen und größer als $u_\varkappa$ sind, gilt $G(u) = G(u_\varkappa) + 1$. Die Richtigkeit dieser Behauptungen geht aus dem Vorhergehenden unmittelbar hervor.

Genau dieselben Aussagen, welche wir soeben hinsichtlich $G(u)$ machten, gelten offenbar auch hinsichtlich $\mathsf{Z}(u)$. Wir haben daher $G(u) = \mathsf{Z}(u)$. Ferner gilt in unserem Fall $\mathsf{Z}(u) = Z(u)$. Wir sind somit zu folgendem Satz gelangt:

Ist $n\beta - m\alpha$ *kein ganzzahliges Vielfaches von* π, *so ist die Anzahl derjenigen Wurzeln, deren Modul kleiner als die reelle positive Zahl* u *ist,*

gleich der Anzahl der zwischen $P - \omega(u)$ und $P + \omega(u)$ gelegenen ganzen Zahlen.

Aus dem Vorhergehenden wollen wir nun eine für das Folgende nützliche Folgerung ziehen. Wir bezeichnen das in § 3 besprochene u-Gebiet, für welches jede der Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ kleiner als die Summe der beiden andern ist, mit T. Offenbar ändert sich weder das Gebiet T noch die Funktion $\omega(u)$ bei Abänderungen der Größen α und β.

Es sei nun zunächst u' ein solcher u-Wert des Gebietes T, daß $2\omega(u')$ keine ganze Zahl darstellt. Wir ändern dann α und β in der Weise ab, daß $P + \omega(u')$ ganzzahlig ist. Da $2P$ dann nicht ganzzahlig ist, so ist die Bedingung unseres Paragraphen erfüllt. *Somit gilt nach dem Obigen für* $u > u'$

$$\omega(u) > \omega(u'),$$

für $u < u'$

$$\omega(u) < \omega(u').$$

Es sei nun zweitens u'' ein solcher u-Wert des Gebietes T, daß $2\omega(u'')$ ganzahlig ist. Gelingt es uns zu beweisen, daß für eine gewisse Umgebung von u'' $2\omega(u)$ nur für u'' ganzzahlig wird, so folgt offenbar *daß für* $u > u''$

$$\omega(u) > \omega(u''),$$

für $u < u''$

$$\omega(u) < \omega(u'')$$

gilt. Der genannte Nachweis läßt sich aber leicht erbringen. Zu diesem Zweck nehmen wir versuchsweise an, eine solche Umgebung existiere nicht. Dann muß es in beliebiger Nähe von u'' andere u-Werte geben, für welche $\omega(u) = \omega(u'')$ gilt. Ändern wir nun α, β so ab, daß $P + \omega(u'')$ ganzzahlig wird, so erkennen wir die Existenz einer unendlichen Zahl verschiedener Wurzeln. Dieses unmögliche Resultat zwingt uns, unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen zu lassen.

*Wir haben damit bewiesen, daß im Gebiete T die Funktion $\omega(u)$ mit wachsendem u wächst.**)

---

*) Liegt ein solcher reeller positiver u-Wert vor, daß jede der Größen

$$|a|u^n, \ |b|u^m, \ |c|$$

kleiner ist als die Summe der beiden andern, so besitzt, wie man beweisen kann, $\omega(u)$ eine endliche positive Ableitung. Dieser Satz wurde in der ursprünglichen Fassung meiner Arbeit von mir benutzt. Herr Professor O. Blumenthal hatte die Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, daß man den genannten Satz leicht vermeiden kann; in diesem Sinn habe ich dann die obigen Betrachtungen abgeändert.

§ 6.

Der Fall, in welchem $2P$ ganzzahlig ist.

Es sei nun zweitens $n\beta - m\alpha$ *ein ganzes Vielfaches von* π.

Es ist klar, daß die Regel $G(u) = Z(u)$ auch unter den jetzigen veränderten Verhältnissen in Kraft bleibt, *wenn* u *einen solchen Wert besitzt, daß* $P + \omega(u)$ *und* $P - \omega(u)$ *nicht ganzzahlig sind.* In diesem Fall ändern sich nämlich $Z(u)$ und $G(u)$ nicht, wenn wir α und β durch andere reelle Werte ersetzen, wofern nur die neuen Werte den alten genügend nahe liegen. Man kann die neuen Werte hierbei so wählen, daß an Stelle von $n\beta - m\alpha$ kein ganzes Vielfaches von π tritt. Dann ist die im vorigen Paragraphen gemachte Voraussetzung erfüllt und wir erkennen leicht die Richtigkeit unserer Bemerkung.

Die Regel $G(u) = Z(u)$ bleibt ferner für alle $u \lessgtr \mathfrak{c}$ in Kraft. In der Tat haben wir für $u \lessgtr \mathfrak{c}$ stets $G(u) = Z(u) = 0$. Um den Gültigkeitsbereich der Regel noch genauer zu erkennen, bemerken wir zunächst folgendes: Es sei u' irgend eine reelle positive Zahl. Für alle u-Werte, die kleiner als u' sind und u' genügend nahe liegen, gilt dann offenbar $G(u) = G(u')$, $Z(u) = Z(u')$. Indem wir uns auf diese Bemerkung und das bisher über den Gültigkeitsbereich der Regel Gesagte stützen, erkennen wir, daß der genannte Gültigkeitsbereich sich sicher auf alle diejenigen u-Werte erstreckt, für welche jede der drei Größen $|a|u^n$, $|b|u^m$, $|c|$ *kleiner* als die Summe der beiden anderen ist. Ferner gehören $\mathfrak{a}$ sowie die möglicherweise auftretenden $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}_1$ zu dem Gültigkeitsbereich.

Wir wenden unsere Aufmerksamkeit nun auf das Gebiet $u > \mathfrak{a}$. Für dieses Gebiet haben wir offenbar $Z(u) = n$, während $G(u)$ die Anzahl der zwischen $P - \frac{n}{2}$ und $P + \frac{n}{2}$ gelegenen ganzen Zahlen angibt. Je nachdem $P - \frac{n}{2}$ eine ganze Zahl ist oder nicht, haben wir daher $G(u) = n - 1$ oder $G(u) = n$. Es tritt dabei der erste oder zweite Fall ein, je nachdem die Größe

$$\frac{n\beta - m\alpha}{\pi} - m \tag{23}$$

eine *gerade* ganze Zahl ist oder nicht, und es gilt im ersten Falle $Z(u) = G(u) + 1$, im zweiten $Z(u) = G(u)$.

Wir haben nun noch das möglicherweise auftretende Gebiet $\mathfrak{b}_1 < u \lessgtr \mathfrak{b}_2$ zu untersuchen. Wählen wir, falls $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ auftreten, die u-Werte u_1 und u_2 so aus, daß sie $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ genügend nahe liegen und die Ungleichungen $u_1 < \mathfrak{b}_1$, $u_2 > \mathfrak{b}_2$ befriedigen, so gelten offenbar folgende Aussagen:

1) $Z(u_1) = G(u_1) = G(\mathfrak{b}_1) = G(\mathfrak{b}_2)$, $\quad Z(u_2) = G(u_2)$,

2) Die Differenz $Z(u_2) - Z(u_1) = G(u_2) - G(\mathfrak{b}_2)$ gibt die Anzahl der Wurzeln an, deren Modul gleich $\mathfrak{b}_1$ oder gleich $\mathfrak{b}_2$ ist.

Bei der zweiten Aussage ist zu berücksichtigen, daß keine *zwischen* $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ gelegene Zahl Modul einer Wurzel sein kann.

Erinnern wir uns noch an die Gleichung $\omega(\mathfrak{b}_2) = \frac{m}{2}$, so erhalten wir folgendes Resultat: Ist

$$\frac{n\beta - m\alpha}{\pi} + n \tag{24}$$

eine *gerade* ganze Zahl, so ist $G(\mathfrak{b}_2) = m - 1$, $G(u_2) = m + 1$; ist aber die Größe (24) keine gerade ganze Zahl, so gilt $G(\mathfrak{b}_2) = G(u_2) = m$. Hierbei wird u_2 stets als $\mathfrak{b}_2$ genügend nahe vorausgesetzt.

Die Anzahl der Wurzeln, deren Modul gleich $\mathfrak{b}_1$ oder gleich $\mathfrak{b}_2$ ist, wird in dem ersten der soeben erwähnten zwei Fälle gleich zwei, in dem zweiten gleich Null. Im ersten Falle sind $P - \omega(u)$ und $P + \omega(u)$ für $u = \mathfrak{b}_1$ und $u = \mathfrak{b}_2$ ganze Zahlen; es sind daher $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ im genannten Falle Moduln von Wurzeln.

Wir haben demnach zunächst folgendes festgestellt: Treten $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ auf und ist die Größe (24) eine gerade ganze Zahl, so gibt es eine und nur eine Wurzel mit dem Modul $\mathfrak{b}_1$, sowie eine und nur eine Wurzel mit dem Modul $\mathfrak{b}_2$. Ist aber die Größe (24) keine gerade ganze Zahl, so stellen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ nicht Moduln von Wurzeln dar. Nunmehr ist es leicht, die Untersuchung des Gebietes $\mathfrak{b}_1 < u \gtreqless \mathfrak{b}_2$ durchzuführen. Es besteht, wie wir wissen, die Gleichung $Z(\mathfrak{b}_1) = G(\mathfrak{b}_1)$. Für das Gebiet $\mathfrak{b}_1 < u \gtreqless \mathfrak{b}_2$ gilt $G(u) = G(\mathfrak{b}_1)$; $Z(u)$ ist aber in diesem Gebiete gleich

$$Z(\mathfrak{b}_1) + 1 = G(u) + 1 \quad \text{oder gleich} \quad Z(\mathfrak{b}_1) = G(u),$$

je nachdem die Größe (24) eine gerade ganze Zahl ist oder nicht.

Mit Hilfe der bisher gewonnenen Resultate kann nunmehr der in der Einleitung formulierte Satz leicht verifiziert werden.

Über binäre bilineare Formen.

Von

M. Pasch in Gießen.

Sind f, f' quadratische Formen von $x_1|x_2$, Δ und Δ' ihre Diskriminanten, Θ die harmonische Invariante, H die Hessesche Determinante, so läßt sich die Diskriminante von H durch Δ, Δ', Θ ausdrücken. Eine Verallgemeinerung hiervon für binäre bilineare Formen habe ich in dem Aufsatz: „Über bilineare Formen und deren geometrische Anwendung", diese Annalen 1891, Bd. 38, Seite 24 ff. gegeben.

In dem Fall der binären Formen sind ferner f, f', Δ, Δ', Θ, H durch eine Relation verknüpft. Eine Verallgemeinerung dieser Relation soll im folgenden vorgenommen werden. Daran schließen sich Anwendungen auf die binäre trilineare Form.

1. Dem erwähnten Aufsatz entnehme ich nachstehende Bezeichnungen:

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \Sigma a'_{ik} x_i y_k, \qquad (i, k = 1, 2)$$

$$\Delta = \det f = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad \Delta' = \det f' = a'_{11} a'_{22} - a'_{12} a'_{21},$$

$$\Theta = a_{11} a'_{22} - a_{12} a'_{21} - a_{21} a'_{12} + a_{22} a'_{11},$$

$$X = 2 \det_y f f' = X_{11} x_1^2 + 2 X_{12} x_1 x_2 + X_{22} x_2^2,$$

$$Y = 2 \det_x f f' = Y_{11} y_1^2 + 2 Y_{12} y_1 y_2 + Y_{22} y_2^2.$$

Außerdem bezeichne ich Δ mit R_{11}, Δ' mit R_{22}, Θ mit R_{12} und R_{21}. Wird noch eine binäre bilineare Form $f''(xy)$ eingeführt, so kann die Determinante von f'' mit R_{33}, die harmonische Invariante von f und f'' mit R_{13} und R_{31}, die von f' und f'' mit R_{23} und R_{32} bezeichnet werden.

2. Für beliebige $p_1|p_2$ ist:

$$\Delta(xp) = \begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \\ a_{11} p_1 + a_{21} p_2 & a_{12} p_1 + a_{22} p_2 \end{vmatrix},$$

wo $(xp) = x_1 p_2 - x_2 p_1$; weiter für beliebige $p_1|p_2$, $q_1|q_2$:

$$\Delta(xp)(yq) = f(xy) f(pq) - f(xq) f(py),$$

$$\Delta'(xp)(yq) = f'(xy) f'(pq) - f'(xq) f'(py).$$

Für beliebige ϱ, σ, τ erhält man:

$$\det(\varrho f + \sigma f') = \Delta\varrho^2 + \Theta\varrho\sigma + \Delta'\sigma^2,$$

$$\det(\varrho f + \sigma f' + \tau f'') = R_{11}\varrho^2 + R_{22}\sigma^2 + R_{33}\tau^2 + R_{23}\sigma\tau + R_{31}\tau\varrho + R_{12}\varrho\sigma.$$

Wenn f und f' zerfallen:

$$f = l_x\lambda_y, \quad f' = m_x\mu_y, \quad \text{wo} \quad l_x = l_1x_1 + l_2x_2 \text{ usw.},$$

so wird:

$$\Delta = 0, \quad \Delta' = 0, \quad \Theta = (\lambda m)(\lambda\mu).$$

3. Ich gehe nun davon aus, daß identisch

$$f(xy)f(pq) = f(xq)f(py) + \Delta(xp)(yq),$$

$$f'(xy)f'(pq) = f'(xq)f'(py) + \Delta'(xp)(yq),$$

und mithin

$$rf + sf' = \varrho f(xq)f(py) + \sigma f'(xq)f'(py) + \tau(xp)(yq),$$

wo

$$r = \varrho f(pq), \quad s = \sigma f'(pq), \quad \tau = \varrho\Delta + \sigma\Delta'.$$

Indem ich jetzt P_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ aus den zerfallenden Formen

$$f(xq)f(py), \quad f'(xq)f'(py), \quad (xp)(yq)$$

so bilde, wie oben R_{ik} aus f, f', f'', finde ich:

$$\det(rf + sf') = \varrho^2 P_{11} + \sigma^2 P_{22} + \tau^2 P_{33} + \sigma\tau P_{23} + \tau\varrho P_{31} + \varrho\sigma P_{12},$$

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = 0,$$

$$P_{23} = (f'(pq))^2, \quad P_{31} = (f(pq))^2, \quad P_{12} = \frac{1}{4} Y(qq) X(pp),$$

$$\varrho^2\Delta(f(pq))^2 + \varrho\sigma\Theta f(pq)\cdot f'(pq) + \sigma^2\Delta'(g(pq))^2$$

$$= \sigma(\varrho\Delta + \sigma\Delta')(f'(pq))^2 + \varrho(\varrho\Delta + \sigma\Delta')(f(pq))^2 + \frac{1}{4}\varrho\sigma X(pp) Y(qq)$$

und schließlich:

$$\Theta f(pq) f'(pq) = \Delta(f'(pq))^2 + \Delta'(f(pq))^2 + \frac{1}{4} X(pp) Y(qq),$$

oder, wenn p, q durch x, y ersetzt werden:

$$XY + 4\Delta f'^2 - 4\Theta f'f + 4\Delta' f^2 = 0. \tag{1}$$

Dies ist die gesuchte Relation.

4. Wird, wie in dem oben erwähnten Aufsatz, mit weiteren Veränderlichen $z_1|z_2$ eine binäre trilineare Form

$$F(xyz) = \Sigma a_{ikl}x_iy_kz_l = z_1 f + z_2 f' \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

gebildet und

$$2\Delta z_1^2 + 2\Theta z_1 z_2 + 2\Delta' z_2^2 \text{ mit } Z$$

bezeichnet, so ist

$$X = 2\det_{yz} F, \quad Y = 2\det_{zx} F, \quad Z = 2\det_{xy} F,$$

und es folgen aus (1) zwei weitere Relationen:

$$YZ + 2X_{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 - 4X_{12}\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1} + 2X_{22}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 = 0,$$

$$ZX + 2Y_{11}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 - 4Y_{12}\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial F}{\partial y_1} + 2Y_{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 = 0.$$

Die Kovarianten X, Y, Z stehen demnach in derartigem Zusammenhang, daß, sobald eine von ihnen identisch verschwindet, zugleich mindestens eine der beiden andern identisch verschwinden muß. Eine ähnliche Erscheinung im ternären Gebiete habe ich in diesen Annalen 1894, Band 44, Seite 94 ff. nachgewiesen.

5. Das Verschwinden der Invariante Δ ist die Bedingung dafür, daß f in lineare Faktoren zerfällt:

$$f(xy) = \frac{1}{f(pq)} f(xq)\, f(py).$$

Im Fall $\Delta = \Delta' = \Theta = 0$ wird etwa:

$$f = l_x \lambda_y, \quad f' = m_x \mu_y, \quad \text{wobei} \quad (lm)(\lambda\mu) = 0.$$

Das identische Verschwinden von $\det(\varrho f + \sigma f')$, d. i. von Z, ist mithin die Bedingung dafür, daß f und f' einen linearen Faktor gemein haben, m. a. W. dafür, daß F einen von $z_1|z_2$ freien linearen Faktor enthält. Entsprechend ist das identische Verschwinden von X oder Y die Bedingung für das Auftreten eines von $x_1|x_2$ oder $y_1|y_2$ freien linearen Faktors in F (siehe den eingangs erwähnten Aufsatz, Seite 25). Man beachte auch, daß z. B.

$$\frac{1}{2}(yq)\, X = f(xy)\, f'(xq) - f(xq)\, f'(xy).$$

Das gleichzeitige identische Verschwinden von Y und Z, Z und X oder X und Y ist die Bedingung für das Auftreten eines linearen, nur von $x_1|x_2$, $y_1|y_2$ oder $z_1|z_2$ abhängigen Faktors in F.

Das Zerfallen von F in drei lineare Faktoren wird durch das gleichzeitige Verschwinden von X, Y und Z ausgedrückt.

Gießen, 1907.

On the linear differential equation of hyperbolic type.

By

MAX MASON in New Haven, U. S. A.

The different boundary value problems which arise in connection with the partial differential equation

$$(1) \qquad u_{xy} = au_x + bu_y + cu + f$$

have been treated by distinct methods, based for the most part on successive approximations and on the method of Riemann*). It is the object of this paper to consider a boundary value problem which includes as special cases several of those previously studied.

Consider a rectangle R bounded by the lines

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad x = x_2, \quad y = y_2$$

containing the point (x_0, y_0) in its interior. Let C_x and C_y be two curves intersecting at (x_0, y_0), representable in the form

$$(C_x) \quad y = \varphi(x), \quad (C_y) \quad x = \psi(y),$$

where it is assumed that for $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ the functions $\varphi(x)$ and $\psi(y)$ are single-valued and continuous, that the derivative $\varphi'(x)$ is continuous, and that the inequalities

$$(2) \qquad y_1 \leqq \varphi(x) \leqq y_2, \quad x_1 \leqq \psi(y) \leqq x_2$$

are satisfied. *It is required to determine a function u, continuous in R together with the derivatives u_x, u_y, u_{xy}, which satisfies the differential equation*

$$(1) \qquad u_{xy} = au_x + bu_y + cu + f,$$

and the conditions

$$(3) \qquad (u)_{y=\varphi(x)} = U(x), \quad (u_y)_{x=\psi(y)} = Y(y).$$

---

*) See, for example, Encyklopädie d. math. Wissenschaften II A 7 [Sommerfeld], and R. d'Adhémar, Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles, Paris 1907. The work of Picard, in particular, has been of fundamental importance. See § 3 below.

The coefficients of the equation (1) are supposed to be continuous in R; $U(x)$ and $Y(y)$ are given functions, continuous in the intervals (x_1, x_2) and (y_1, y_2) respectively, and the derivative $U'(x)$ is continuous in the interval (x_1, x_2).

§ 1.

The functional equation and its formal solution.

Let $u_{xy} = v$. Then if u satisfies the conditions (3),

$$u_y = \int_{\psi(y)}^{x} v(\xi, y)\, d\xi + Y(y),$$

$$u = \int_{\varphi(x)}^{y}\int_{\psi(\eta)}^{x} v(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\varphi(x)}^{y} Y(\eta)\, d\eta + U(x),$$

$$u_x = -\varphi'(x)\int_{\psi(\varphi(x))}^{x} v(\xi, \varphi(x))\, d\xi + \int_{\varphi(x)}^{y} v(x, \eta)\, d\eta - \varphi'(x)\, Y(\varphi(x)) + U'(x).$$

If v be any function which is continuous in R the function u, defined by the second of the above equations, is continuous in R together with the derivatives u_x, u_y, u_{xy}, and satisfies the conditions (3). The necessary and sufficient condition that u satisfies the differential equation (1) is the following functional equation for v, found by substituting the above expressions for u, u_x, u_y, u_{xy} in equation (1):

$$\text{(4)} \quad v(x,y) = g(x,y) + a(x,y)\int_{\varphi(x)}^{y} v(x, \eta)\, d\eta - a(x,y)\,\varphi'(x)\int_{\psi(\varphi(x))}^{x} v(\xi, \varphi(x))\, d\xi$$
$$+ b(x,y)\int_{\psi(y)}^{x} v(\xi, y)\, d\xi + c(x,y)\int_{\varphi(x)}^{y}\int_{\psi(\eta)}^{x} v(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

where

$$\text{(4')} \quad g(x,y) = a(x,y)\,[U'(x) - \varphi'(x)\, Y(\varphi(x))] + b(x,y)\, Y(y)$$
$$+ c(x,y)\Big[\int_{\varphi(x)}^{y} Y(\eta)\, d\eta + U(x)\Big] + f(x,y).$$

This equation has the form

$$\text{(5)} \quad v = g + Sv,$$

where g is a known continuous function and S is a linear operator defined by the equation

$$(6) \qquad Sz = a(x,y)\int_{\varphi(x)}^{y} z(x,\eta)\,d\eta - a(x,y)\,\varphi'(x)\int_{\psi(\varphi(x))}^{x} z(\xi,\varphi(x))\,d\xi$$
$$+ b(x,y)\int_{\psi(y)}^{x} z(\xi,y)\,d\xi + c(x,y)\int_{\varphi(x)}^{y}\int_{\psi(\eta)}^{x} z(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

A continuous solution is required. Suppose such a solution v exists. Then the value $g + Sv$ may be substituted for v in the second member of (5), and the same substitution may again be made in the resulting equation. After $n-1$ such substitutions the equation

$$v = g + Sg + S^2g + \cdots + S^{n-1}g + S^nv$$

is obtained. It will be shown in the next section that the series

$$z + Sz + S^2z + S^3z + \cdots$$

converges absolutely and uniformly in R, where z is any function which is continuous in R. Then the limit for $n = \infty$ may be taken in the above equation, and the equation

$$(7) \qquad v = g + Sg + S^2g + S^3g + \cdots$$

is obtained. *Hence if a solution of* (5) *exists it is given by equation* (7) *and is therefore unique.*

Conversely equation (7) defines a continuous solution v of the functional equation (5). For since the convergence of the series (7) is uniform the function v is continuous, and may be written in the form

$$v = g + Sg + S^2g + \cdots + S^ng + R_n,$$

where R_n approaches zero uniformly for all values of x, y in R, as n increases indefinitly. It follows from the definition (6) of the operator S that

$$\lim_{n=\infty} SR_n = 0,$$

and therefore, since the equation

$$Sv = Sg + S^2g + \cdots + S^{n-1}g + SR_n$$

holds for all values of n,

$$Sv = Sg + S^2g + S^3g + \cdots$$
$$= v - g.$$

The function v is therefore a continuous solution of the functional equation (4).

Now equation (4) is the necessary and sufficient condition that the function u, which satisfies the condition (3), is a solution of the differential equation (1). The following theorem may therefore be stated, whereby use is made of the convergence proof of the following section:

The differential equation:

$$u_{xy} = au_x + bu_y + cu + f$$

admits a unique solution under the conditions

$$(u)_{y=\varphi(x)} = U(x), \quad (u_y)_{x=\psi(y)} = Y(y),$$

the solution being given by the equations

$$u = \int_{\varphi(x)}^{y}\int_{\psi(\eta)}^{x} v(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\varphi(x)}^{y} Y(\eta)\, d\eta + U(x),$$

$$v = g + Sg + S^2 g + S^3 g + \cdots,$$

where the function g and the operator S are defined by equations (4′) *and* (6).

§ 2.

Convergence of the process.

It is to be shown that the series

$$z + Sz + S^2 z + S^3 z + \cdots, \tag{8}$$

formed for any function z which is continuous in R, converges uniformly and absolutely in R. Let γ be the greatest of the maxima of

$$|a|, \quad 2|a\varphi'|, \quad 2|b|, \quad \sqrt{|c|}$$

in R, and write

$$\alpha = x_1 - (x_2 - x_1), \quad \beta = y_1 - (y_2 - y_1).$$

Then for all values of x, y in R it follows, on account of (2), that

$$|x - \varphi(y)| \leqq x_2 - x_1 \leqq x - \alpha,$$

$$|y - \psi(x)| \leqq y_2 - y_1 \leqq y - \beta.$$

Define three operators S_1, S_2, S_3 by the equations

$$S_1 w = \gamma \int_{\alpha}^{x} w(\xi, y)\, d\xi, \quad S_2 w = \gamma \int_{\beta}^{y} w(x,\eta)\, d\eta, \quad S_3 w = \gamma^2 \int_{\beta}^{y}\int_{\alpha}^{x} w(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

where $w(x,y)$ is a function defined for all values x and y in the intervals $\alpha \leqq x \leqq x_2$, $\beta \leqq y \leqq y_2$. Then, if δ be the maximum of $|z|$ in R,

$$|Sz| < (S_1 + S_2 + S_3)\,\delta,$$

and

$$|S^k z| < (S_1 + S_2 + S_3)^k \delta.$$

Hence the series (8) *converges absolutely and uniformly in R, if the series of positive terms*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (S_1 + S_2 + S_3)^k \delta \tag{9}$$

converges uniformly in R.

The operators S_1, S_2, S_3 are commutative and associative, so that in the series (9) each term of the form $S_1^{k_1} S_2^{k_2} S_3^{k_3}$ occurs with the factor

$$\frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}.$$

Now $S_3 w = S_1 S_2 w = S_2 S_1 w$, so that

$$\sum_{k=0}^{\infty} (S_1+S_2+S_3)^k \delta = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} S_1^m S_2^n \delta,$$

where

$$A_{m,n} = \sum \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!},$$

the summation being extended over all positive integers k_1, k_2, k_3 including zero, which satisfy the equations

$$k_1+k_3 = m, \quad k_2+k_3 = n.$$

Now $A_{m,n}$ is increased if these two conditions be replaced by the single equation

$$k_1+k_2+2k_3 = m+n,$$

and is further increased if this equation be replaced by

$$k_1+k_2+k_3 = m+n.$$

But the summation under the last condition gives

$$(1+1+1)^{m+n} = 3^{m+n}.$$

Therefore

$$A_{m,n} < 3^{m+n}.$$

Now

$$S_1^m S_2^n \delta = \frac{\gamma^m (x-\alpha)^m}{m!} \cdot \frac{\gamma^n (y-\beta)^n}{n!} \delta,$$

and therefore the terms of the series

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} S_1^m S_2^n \delta$$

are less than the terms of the series

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[3\gamma(x-\alpha)]^m \, [3\gamma(y-\beta)]^n}{m!\cdot n!} \delta = \delta e^{3\gamma(x-\alpha+y-\beta)}.$$

It follows that the series (8) *converges absolutely and uniformly in* R.

§ 3.

Special cases of the boundary problem.

1°. *The value of u is given on the intersecting curves $y=\varphi(x)$, $x=x_0$:*

$$(u)_{y=\varphi(x)} = U(x), \quad (u)_{x=x_0} = V(y).$$

The second condition may be replaced by the equation

$$(u_y)_{x=x_0} = V'(y),$$

since u is known for one point of the line $x = x_0$, namely the intersection of this line with the curve $y = \varphi(x)$. The problem*) is therefore included in the general case for $\psi(y) = x_0$, $Y(y) = V'(y)$.

2°. *The value of u is given on the intersecting lines $x = x_0$, $y = y_0$.*

This classical problem**) is included in 1° for the case $\varphi(x) = y_0$.

3°. *The value of u and of its normal derivative are given along a monotone curve C.*

Since the curve is monotone these conditions are equivalent to giving the values of u and u_y along the curve. By letting the curve C_x and C_y coincide in the monotone curve C the general problem is reduced to this important special case.***) The formulas are simplified by the fact that $\varphi(x)$ and $\psi(y)$ are here inverse functions.

Combinations of these special cases may be made to solve further boundary problems; for example Hadamard's „mixed problem"†) is obtained by combining 1° and 3°.

New Haven, Connecticut, August 1907

*) First solved by *Picard* for the special case $\varphi(x) = x$. See Note I in *Darboux*, Théorie générale des surfaces, 4, p. 353. More general problems of this nature have recently formed the subject of investigations by *Goursat*. See Annales de la Fac. de Toulouse, 2e série. t. V and VI.

**) First rigorous solution was given by *Picard*. Note I in *Darboux*, Théorie générale des surfaces, 4, p. 353.

***) *Picard*, Journal de Math. 4e série, 6 (1890).

†) Bulletin de la Soc. Math. de France, 1900, 1903.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.